2. Полат Е.С. Теория и практика дистанционного обучения: Учеб. Пособие для студ. высш.пед.учеб.заведений – М.. Издательский центр «Академия», 2004.- 416 с.
3. Примерные программы внеурочной деятельности. Начальное и основное образование; под редакцией В.А. Горского. - 2-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 111 с. – (Стандарты второго поколения).
4. Интеграция формального и неформального образования: методические рекомендации / под науч. ред. В.А. Горского; авт.-сост. В.А. Горский, С.В. Ким, Д.В. Смирнов; Учреждение РАО «Институт содержания и методов обучения». – М.: УРАО ИСМО , 2011. 219 с.
5. Федеральный закон Российской Федерации от 28 февраля 2012 г. N 11-ФЗ "О внесении изменений в Закон Российской Федерации "Об образовании" в части применения электронного обучения, дистанционных образовательных технологий ". Российская газета http://www.rg.ru/
6. Википедия www.wikipedia.org

## МЕТОДИКА СОЗДАНИЯ ИНТЕРАКТИВНЫХ УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ В ПАКЕТЕ МАТЕМАТИКА 8

*Воробьев Е.М.,*
*д.ф.м.н., профессор, МЭСИ*
*Тел. (495) 442 23 91, E-mail: EVorobiev@mesi.ru*
*Никишкин В.А.,*
*к.ф.м.н., зав. каф. ВМ МЭСИ*
*Тел. (495) 442 23 91, E-mail: VNikishkin@mesi.ru*

### Введение

Использование компьютерных алгебр для обучения началось практически одновременно с их выходом в свет. Изначально компьютерные алгебры были предназначены только для проведения чисто алгебраических расчетов. Однако вскоре появились интегрированные программные системы, позволяющие в одном сеансе работы с ними проводить символьные, графические и численные расчеты. Упомянем в этой связи «Математику», «Мэйпл» и «Маткад». О степени внедрения интегрированных систем в образование можно судить по следующему факту. Из всех учебных пособий по математике, выпущенных в 2007 году крупнейшим издательством научной и учебной литературы CRC Press, 25% использовало в своем изложении системы математических расчетов.

Важнейшее место среди учебных пособий занимают руководства по дисциплине Математический анализ. Это объясняется ее чрезвычайной важностью для приложений и, следовательно, включением в учебные планы практически всех инженерных, естественнонаучных и экономических специальностей. Влияние математических систем на преподавание происходит, в основном, по двум направлениям. Первое - визуализация математических объектов: последовательностей, функций, кривых и поверхностей, дискретных данных и т.п. Второе - автоматизация расчетов, облегчающих выполнение студентами проектов, интересных как сами по себе, так и имеющих прикладное значение.

Между тем, потенциально влияние систем на дисциплину Математический анализ (Математика), по нашему мнению, может быть значительно более глубоким и затрагивать экспликацию основных понятий дисциплины: вещественного числа, непрерывной функции, производной, интеграла и т.п. В настоящей работе мы обсудим вопросы, связанные с методикой создания в системе «Математика» [1] интерактивных учебных пособий по дисциплине Математика.

**Визуализация в преподавании математических дисциплин**

В обучении математическим дисциплинам присутствуют две тенденции: одна – стремление к логической строгости, стройности и прозрачности предмета, другая – использование в разумных пределах интуитивного понимания математических объектов и фактов. В различное время та или другая выходят на передний план. Как отмечается в работе [2]: «математика содержит как пространственные, кинематические элементы, так и арифметические и алгебраические.…Делать опору на один из типов, значит, нарушать баланс, что приводит к обеднению математики и игнорированию важной составляющей ее потенциала».

С массовым распространением компьютерной техники и математического обеспечения интуитивная составляющая получила мощную опору в виде возможности визуализации математических объектов («визуализационный ренессанс»). Под визуализацией мы понимаем графическое или геометрическое представление математических результатов, направленное на интуитивное понимание проблем, понятий или фактов и облегчающих их вербальную формулировку.

Ренессансом рассматриваемое явление можно назвать потому, что изначально, со времен античности рисунки и диаграммы являлись важной составной частью математических рассуждений. В самом деле, само слово «теорема» - фундамент и опора логической составляющей любой математической теории, в античности означало «зрелище, вид, взгляд», т.е. то, что можно непосредственно увидеть. Античный математик в ответ на требование предъявить доказательство вполне мог что-либо начертить, скажем, палочкой на песке и сказать: «Смотри!». Вспомним также, сколь часто в математических работах встречаются слова «рассмотрим» и «очевидно».

В Новое время Декарт в своих Regulae ad directionem ingenii (Правилах применения интеллекта) [3] подчеркивал. «Необходимо использовать все ресурсы *интеллекта, воображения, чувств и памяти* для того, чтобы, с одной стороны, отчетливо представлять себе простые утверждения, а, с другой стороны, чтобы сравнивать то, что мы видим, с тем, что мы уже знаем, и, тем самым, чтобы понять это».

Однако открытие неевклидовой геометрии в XIX веке имело следствием возникновение недоверия к простым и наглядным соображениям в математике. В XX веке логические парадоксы интуитивной теории множеств Кантора и плодотворное само по себе направление формализации математики, связанное с именем Гильберта и приведшее к крупным открытиям в математике, низвело интуицию и визуализацию в подчиненное формальной логике положение. Во введении к учебнику по линейной алгебре и элементарной геометрии Дьедонне [4] отмечено, что автор «решил не использовать в тексте ни единого рисунка» и что «желательно как можно скорее избавить студентов от рисунков и использовать геометрические образы как можно реже (за исключением точек, прямых и плоскостей)».

Маятник, однако, качнулся в другую сторону. В последние десятилетия возобладала более взвешенная позиция по отношению к визуализации. В докладе Комитета по математическим наукам Национального совета по научным исследованиям (США) [5] отмечаются разделы математики, в которых достигнуты впечатляющие успехи и открываются новые перспективы. В частности, это относится к области «Компьютерная визуализация как математический инструментарий». В докладе говорится: «в последние годы компьютерная графика сыграла выдающуюся роль в чистой и прикладной математике, и перспективы ее применения чрезвычайно многообещающи».

**Предел последовательности**

«Математика» имеет средства для визуализации функций, кривых и поверхностей в трехмерном пространстве, а также дискретных данных в форме графиков, гистограмм и диаграмм. Особую роль играет возможность оживлять графические объекты с помощью мультипликации. Ниже мы приведем конкретные примеры визуализации и изложим методику программирования интерактивных графических иллюстраций для лекционных курсов.

Обратимся к теме «Предел числовой последовательности». Понятие предела одно из самых трудных для понимания во всей дисциплине Математический анализ. С трудностями и парадоксами его точного определения сталкивались еще античные философы и логики. Яркой иллюстрацией этого служат апории Зенона, в частности, знаменитая апория «Ахиллес и черепаха». Она состоит в следующем. Быстрый Ахиллес взялся соревноваться в беге с черепахой и дал ей фору в несколько шагов. Утверждается, что Ахиллес, несмотря на то, что он может развить скорость в сто раз больше скорости черепахи, никогда не догонит ее, так как пока Ахиллес добежит до того места, где первоначально находилась черепаха, последняя отползет на некоторое расстояние. Это утверждение можно повторять бесконечно, т.е. процесс не имеет конца. Математически, время, за которое Ахиллес может догнать черепаху, равно бесконечной сумме

$$\frac{a}{\mathrm{v}}\sum_{k=0}^{\infty} 0.01^{k}, \qquad (1)$$

где a – фора, v – скорость черепахи.

В математическом анализе средством разрешить это противоречие и, тем самым, закончить не имеющий конца процесс, является предел последовательности. Его строгое определение было дано в начале XIX века чешским математиком Больцано и французским математиком Коши.

**Определение.** Вещественное число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для каждого вещественного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N($\varepsilon$), что для всех номеров n > N($\varepsilon$) выполняется неравенство $|A - a_n| < \varepsilon$.

Если воспользоваться понятием предела, то можно доказать, что последовательность частичных сумм ряда в формуле (1) имеет пределом число 1/99. Отсюда следует, что время, за которое Ахиллес догонит черепаху равно a/(99 v). Но это не отменяет логического парадокса Зенона, ибо фактического суммирования, т.е. сложения одного за другим чисел $0.01^k$ в бесконечном числе никто не производил!

Трудность понимания определения предела студентами заключается в том, что последовательность дана, а предел не задан или не существует. И именно эту трудность призвана помочь преодолеть визуализация. Она использует математическое понятие графика последовательности, а, точнее, графика отрезка последовательности для номеров n элементов последовательности от 1 до m. Для определенности, рассмотрим последовательность $a_n$ = n/(n+1).

### Методика визуализации в системе «Математика»

**Первый этап.** Определяем команду data[k], вычисляющую массив данных, состоящий из пар чисел вида (n, $a_n$) для n от 1 до произвольного натурального числа k.

**data[k_] = Table[{n, n/(n+1)}, {n,1,k}];**

**Второй этап.** Осуществляем визуализацию массива data[k] с помощью графической команды ListPlot, полагая k = 30:

**ListPlot[data[30]]**

После выполнения этой команды получаем следующий невыразительный рисунок (Рис.1).

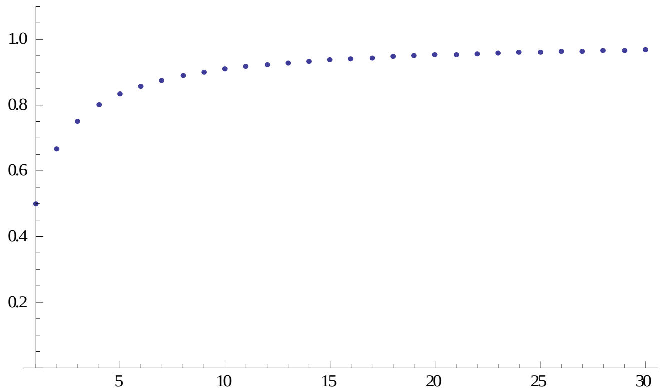


**Рис. 1. Исходный график последовательности**

**Третий этап.** Снабжаем график заголовком с помощью аргумента PlotLabel, вспомогательной линией, соединяющей точки графика и помогающей пользователю следить за их порядком (аргумент Joined -> True). Чтобы на графике сохранились точки, задаем аргумент Mesh -> Full. Увеличим размер точек для большей выразительности графика с помощью аргумента MeshStyle. Укрупняем для удобства пользователя размер шрифта меток на осях (аргумент TicksStyle) и снабжаем оси стрелками, как это принято в учебниках. Для этого используем аргумент AxesStyle в виде AxesStyle -> Directive[Thick, Arrowheads[{0, 0.03}]]. Таким образом, получается следующая команда.

**ListPlot[ data[30], Joined -> True, Mesh -> Full, MeshStyle -> {PointSize[0.015]}, PlotLabel -> Style[“График последовательности”, 14, Bold], TicksStyle -> Directive[{12, Bold}],
AxesStyle -> Directive[{Thick, Arrowheads[0.03]}]]**

Выполнение команды приводит к следующему рисунку (Рис.2).

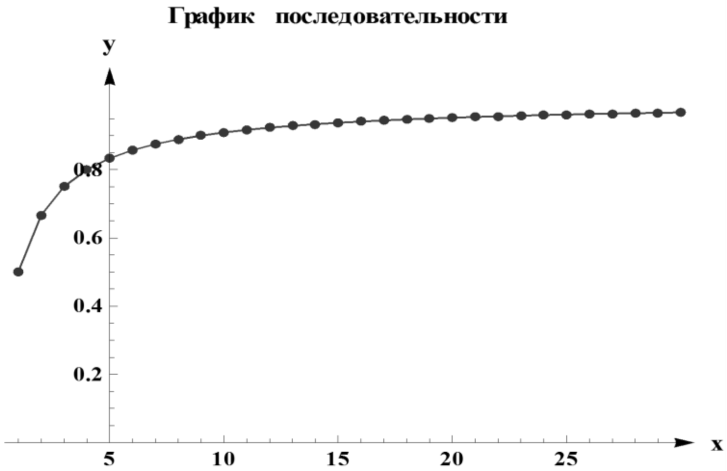

**Рис. 2. График с заголовком, вспомогательной линией, названиями осей и стрелками на концах осей**

Изучение графика позволяет высказать гипотезу о том, что рассматриваемая последовательность имеет предел, близкий по величине к 1.

**Четвертый этап.** Приступаем к созданию динамической визуализации. С этой целью в системе Математика 8 существует специальная команда **Manipulate**:

**Manipulate[ListPlot[data[k], Joined -> True, Mesh->Full, MeshStyle -> {PointSize[0.015]}, PlotLabel -> Style[“График последовательности”,14, Bold], TicksStyle->Directive[{12, Bold}], AxesStyle->Directive[{Thick,Arrowheads[0.03]}], PlotRange->{{0,30},All}],{k,1,30}],**

в результате выполнения которой возникает графический объект (Рис.3) с ползунком и кнопками управления. На рисунке отображены первые пятнадцать из тридцати элементов последовательности.

Графический объект содержит 30 кадров мультфильма. Кадры можно изучать один за другим или просматривать в виде мультфильма. Мультфильм обеспечивает динамическое появление новых точек графика и делает особенно выразительным понятие сходимости: последовательность «сходится» к пределу в данном случае равному единице, так как визуально становится все ближе и ближе к нему.

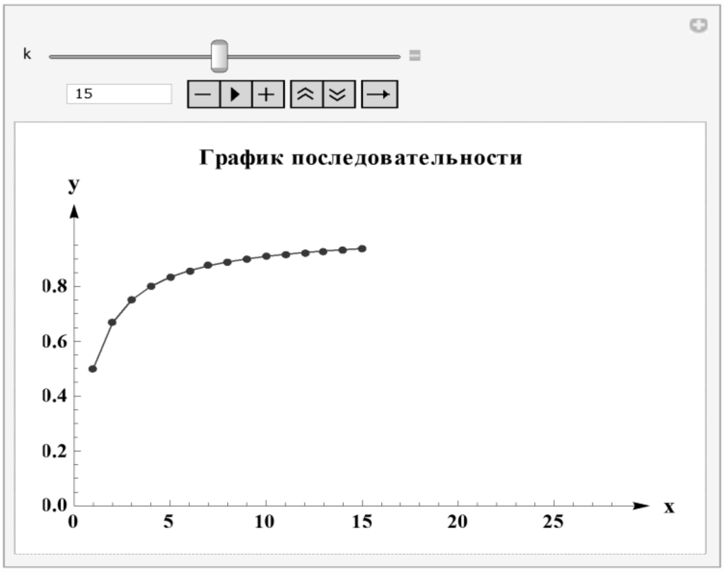


**Рис.3. Динамическая визуализация графика последовательности**

Для того, чтобы мультфильм был высокого качества, приходится специально заботиться о резервировании на рисунке места для появляющихся в дальнейшем, но отсутствующих в данном кадре точек графика. Для этой цели служит опциональный аргумент PlotRange. Установленный на значение {{0,30}, All}, он обеспечивает выполнение поставленной цели.

### Литература


1. Е.М. Воробьев. Введение в систему символьных, графических и численных расчетов «Математика». Диалог-МИФИ, 2005.
2. P.J. Davis, J.A. Anderson. Nonanalytic Aspects of Mathematics and Their Implication for Research and Education. SIAM Review, 21, 1979, pp. 112-117.
3. Р. Декарт. Рассуждение о методе. Изд-во АН СССР, 1953, сер. Классики науки.
4. Ж. Дьедоне. Линейная алгебра и элементарная геометрия. М.: Наука, 1972.
5. National Research Council. Renewing U.S. Mathematics. National Academy Press, Washington, D.C., 1990.