ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С. Шведов

О НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Препринт WP2/2013/02

Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
2013

УДК 519.246
ББК 22.172
Ш34

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Шведов, А. С. О нечетко-случайных величинах [Текст] : препринт WP2/2013/02 /
Ш34 А. С. Шведов ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2013. – 28 с. – 70 экз. – (Серия WP2 «Количественный анализ в экономике»).

В работе предлагается определение нечетко-случайной величины, несколько отличающееся от существующих в литературе определений. Рассматриваются нечеткое ожидание, ожидание и дисперсия нечетко-случайной величины, скалярное произведение и ковариация нечетко-случайных величин. Даются понятия нечеткой квантили и распределения нечетко-случайной величины.

УДК 519.246
ББК 22.172

Ключевые слова: случайное множество; нечетко-случайная величина

Классификация JEL: C14, C32

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

1. Введение

В эконометрических моделях для передачи неопределенности используются и случайные величины, и нечеткие величины. Случайные величины передают то, что экономические показатели могут с разными вероятностями принимать разные значения. Нечеткие величины передают приблизительность в определении самих значений этих экономических показателей. Кроме того, нечеткие величины могут оказаться предпочтительнее, когда для хорошего определения нужных вероятностей недостает статистических данных.

Нечеткие множества (частным случаем которых являются нечеткие числа) были предложены в работе [17]. Понятие нечеткой величины связывают с работой [13].

С целью предложить единый подход, включающий в себя в качестве частных случаев и вероятностное моделирование, и нечеткое моделирование, рассматриваются конструкции, называемые нечетко-случайными величинами. Грубо говоря, нечетко-случайная величина – это случайная величина, значениями которой являются не обычные действительные числа, а нечеткие числа. Однако детали определения здесь существенны.

Изучение нечетко-случайных величин начато в работах [11], [12], [15]. Из более поздних работ назовем [7], [8], [9], [10], [16]. Следует сказать также о книге [3], в которой представлены многие работы, связанные с изучением нечетко-случайных величин. В настоящей работе нами не дается обзор существующего большого числа публикаций, где описываются применения нечетко-случайных величин, в частности, в портфельной теории.

Основное отличие нашего подхода от существующих следующее. Как и в других работах, в данной работе нечетко-случайная величина – это измеримая функция, определенная на вероятностном пространстве и принимающая значения в некотором метрическом пространстве. В предшествующих работах значительное внимание уделено построению метрических пространств, элементами которых являются нечеткие числа. Нами используется обычное метрическое пространство, элементами которого являются компактные подмножества двумерного евклидова пространства, с расстоянием Хаусдорфа. (При этом рассматриваются одномерные нечетко-случайные величины.) Но значениями измеримых функций могут быть не произвольные компактные множества, а лишь некоторые "горки". На наш взгляд, у такого подхода существуют значительные преимущества. При этом многие формулы, в частности, для моментов нечетко-случайных величин, а также другие конструкции, разумеется, близки к соответствующим формулам и конструкциям, использовавшимся в предшествующих работах.

В работах [4], [5] при рассмотрении случайных множеств в d-мерном евклидовом пространстве изучается и оказывается полезным понятие дисперсии случайного множества. При этом дисперсия является неотрицательным числом. В работах [9], [14] подход из работ [4], [5] применяется к многомерным нечетко-случайным величинам. При этом дисперсия многомерной нечетко-случайной величины остается неотрицательным числом. Но дисперсия многомерной случайной величины – это ковариационная матрица. Поэтому в настоящей работе дисперсия и ковариация определяются лишь для одномерных нечетко-случайных величин.

В параграфе 2 настоящей работы предлагается определение нечетко-случайной величины как случайного множества. Устанавливается измеримость функций, задающих боковые границы этого случайного множества. В параграфе 3 рассматриваются нечеткое ожидание, ожидание и дисперсия нечетко-случайной величины, скалярное произведение и ковариация нечетко-случайных величин. В параграфе 4 даются понятие нечеткой квантили и распределения нечетко-случайной величины.

2. Определение нечетко-случайной величины

Пусть U – некоторое пространство, метрическое или топологическое, наделенное или не наделенное линейной структурой. Результаты данной работы относятся к случаю $U = \mathbb{R}^2$, хотя некоторые из рассуждений из приводимых ниже могут быть отнесены и к более общим ситуациям.

Пусть $\mathcal{K}$ – множество, элементами которого являются компактные подмножества пространства U. Компактные подмножества пространства U будем обозначать K_1, K_2, K_3 и т.д. При $U = \mathbb{R}^d$ утверждение, что множество $K \subseteq U$ является компактным, равносильно утверждению, что множество K является ограниченным и замкнутым.

Множество $\mathcal{K}$ можно превратить в метрическое пространство, введя расстояние $dist(K_1, K_2)$ между элементами $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Пусть $dist(K_1, K_2)$ – наибольшее из чисел

$$\sup_{u_1 \in K_1} \inf_{u_2 \in K_2} ||\, u_1 - u_2||, \qquad \sup_{u_2 \in K_2} \inf_{u_1 \in K_1} ||\, u_1 - u_2||.$$

$dist(K_1, K_2)$ называется расстоянием Хаусдорфа.

Доказательство того, что множество $\mathcal{K}$ с функцией $dist(K_1, K_2)$ в качестве расстояния является метрическим пространством, приводится в [2, с. 223 – 224]. По сути, доказывать надо только неравенство треугольника, что

$$dist(K_1, K_3) \leq dist(K_1, K_2) + dist(K_2, K_3)$$

для любых компактных множеств K_1, K_2, K_3 из U.

Подмножества множества $\mathcal{K}$ будем обозначать M, M^G, M_F и т.д.

Как и в любом метрическом пространстве, в пространстве $\mathcal{K}$ существует система открытых подмножеств и система замкнутых подмножеств. Следовательно, можно говорить о семействе борелевских подмножеств метрического пространства $\mathcal{K}$, как о наименьшей σ-алгебре, содержащей все открытые подмножества и все замкнутые подмножества. Обозначим эту σ-алгебру борелевских подмножеств через S.

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство. Как обычно, Σ – некоторая система подмножеств множества Ω, являющаяся σ-алгеброй. Подмножества множества Ω, входящие в эту систему, называются событиями, и для любого события определена его вероятность.

Следующее определение дается, например, в [1] для отображений, определенных на вероятностном пространстве и принимающих значения в произвольном метрическом пространстве. Разумеется, оно может быть применено и в том случае, когда в качестве метрического пространства берется $\mathcal{K}$.

Определение 1. Отображение $A : \Omega \to \mathcal{K}$ называется *измеримым*, если для любого $M \in S$ подмножество множества Ω

$$\{\omega \in \Omega : A(\omega) \in M\}$$

входит в σ-алгебру Σ.

Поясним, что $A(\omega)$ – это компактное подмножество множества U при любом $\omega \in \Omega$. M, как было сказано выше, некоторая систем компактных подмножеств множества U.

Определение 2. Измеримое отображение $A : \Omega \to \mathcal{K}$ называется *случайным компактным множеством.*

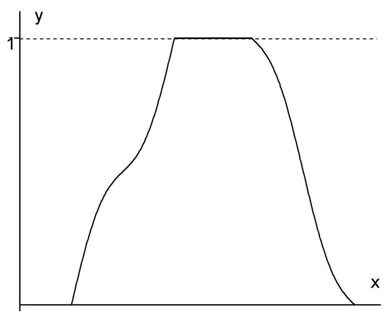

Рис. 1. Нечеткое число

Определение 3. Компактное подмножество $K \subseteq \mathbb{R}^2$ назывется *нечетким числом*, если выполнены следующие условия. При $y_1 \notin [0, 1]$ пересечение множества K с прямой $y = y_1$ пусто. При $y_1 \in [0, 1]$ пересечение множества K с прямой $y = y_1$ имеет вид

$$\{(x, y) : k_1(y_1) \leq x \leq k_2(y_1), y = y_1\},$$

где k_1 – монотонно неубывающая непрерывная слева функция аргумента y, k_2 – монотонно невозрастающая непрерывная слева функция аргумента y.

Говоря нестрого, нечеткое число – это "горка" высоты 1, склоны которой могут содержать и вертикальные, и горизонтальные участки (см. рис. 1).

Покажем, почему при выполнении приведенных условий множество K является замкнутым. Предположим, что это множество не является замкнутым. Тогда существует последовательность точек (x_n, y_n), принадлежащая множеству K, сходящаяся к точке (x^*, y^*), которая не принадлежит множеству K. Выполнение условия $0 \leq y^* \leq 1$ очевидно, и имеет место одно из неравенств $x^* < k_1(y^*)$ или $x^* > k_2(y^*)$. Предположим, что выполняется первое неравенство (если выполняется второе неравенство, рассуждения аналогичны). Допустим также, что $0 < y^* < 1$ (рассмотрение точек $y^* = 0$ и $y^* = 1$ проводится по той же схеме). Очевидно, такой последовательности (x_n, y_n) не может существовать, если функция k_1 непрерывна в точке y^*. Пусть

$$k_1(y^* - 0) < k_1(y^* + 0).$$

Здесь через $k_1(y^* - 0)$ и $k_1(y^* + 0)$ обозначены, соответственно, пределы слева и справа для значений функции k_1 в точке y^*. Опять, такой последовательности (x_n, y_n) не может существовать, если $k_1(y^*) = k_1(y^* - 0)$. Но условие $k_1(y^*) = k_1(y^* - 0)$ и есть условие непрерывности слева функции k_1 в точке y^*. Полученное противоречие показывает, что множество K является замкнутым.

Из рис. 2 также видно, что при отсутствии непрерывности слева функций k_1 и k_2 замкнутость множества K теряется.

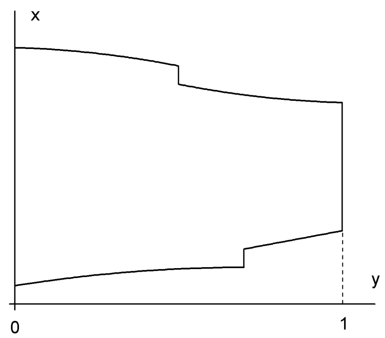

Рис. 2. Графики функций $k_1(y)$ (нижняя кривая) и $k_2(y)$ (верхняя кривая)

Определение 4. Случайное компактное множество A называется *нечетко-случайной величиной*, если при любом $\omega \in \Omega$ множество $A(\omega)$ – нечеткое число.

Это означает, что при любом $\omega \in \Omega$ и при любом $y_1 \in [0, 1]$ пересечение множества $A(\omega)$ с прямой $y = y_1$ имеет вид

$$\{(x, y) : a_1(\omega, y_1) \leq x \leq a_2(\omega, y_1), y = y_1\},$$

при фиксированном $\omega \in \Omega$ функции a_1 и a_2 как функции аргумента y непрерывны слева, и при $0 \leq y_1 < y_2 \leq 1$ выполняются неравенства

$$a_1(\omega, y_1) \leq a_1(\omega, y_2) \leq a_2(\omega, y_2) \leq a_2(\omega, y_1). \qquad (1)$$

Измеримость при фиксированном y_1 функций $a_1(\omega, y_1)$ и $a_2(\omega, y_1)$ устанавливается следующим образом. При $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим замкнутое множество

$$F_c = \{(x, y) : x \leq c, y = y_1\}.$$

Тогда

$$\{\omega \in \Omega : a_1(\omega, y_1) \leq c\} = \{\omega \in \Omega : A(\omega) \cap F_c \neq \emptyset\}. \qquad (2)$$

Пусть открытое множество $G \subseteq U$. Рассмотрим подмножество метрического пространства $\mathcal{K}$

$$M^G = \{K \in \mathcal{K} : K \subseteq G\}.$$

Нетрудно увидеть, M^G – открытое подмножество метрического пространства $\mathcal{K}$ (ср. [6]). Действительно, пусть $K_0 \in M^G$. Это означает, что $K_0 \subseteq G$. Тогда

$$\varepsilon = \inf_{u_1 \in K_0,\, u_2 \in U \setminus G} ||\, u_1 - u_2|| > 0.$$

Для любого $K \in \mathcal{K}$ такого, что $dist(K, K_0) < \varepsilon$, выполняется условие $K \subseteq G$, то есть $K \in M^G$. Это означает, что K_0 входит в M^G вместе со своей ε-окрестностью. То есть M^G – открытое множество.

При замкнутом множестве $F \subseteq U$ положим

$$M_F = \{K \in \mathcal{K} : K \cap F \neq \emptyset\}.$$

Нетрудно увидеть, что $M_F = \mathcal{K} \setminus M^{U \setminus F}$. Поэтому M_F – замкнутое подмножество пространства $\mathcal{K}$. Отсюда следует, что $M_F \in S$. Поскольку

$$\{\omega \in \Omega : A(\omega) \cap F \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega : A(\omega) \in M_F\},$$

подмножество пространства Ω, определяемое формулой (2), является событием.

Измеримость функции $a_2(\omega, y)$ устанавливается так же.

3. Нечеткие и числовые характеристики нечетко-случайных величин

Наложим требование, чтобы все рассматриваемые функции $a_1(\omega, y)$, $a_2(\omega, y)$ и т.д. были ограничены по абсолютной величине одной и той же, возможно, очень большой константой. Такое требование отвечает существу моделируемых экономических явлений. (Хотя и исключает использование многих распространенных в теории вероятностей распределений.)

Определение 5. *Нечетким ожиданием* нечетко-случайной величины A называется подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ следующего вида

$$\{(x, y) : 0 \le y \le 1, a_{e\,1}(y) \le x \le a_{e\,2}(y)\},$$

где

$$a_{e\,1}(y) = \int_\Omega a_1(\omega, y) dP, \qquad a_{e\,2}(y) = \int_\Omega a_2(\omega, y) dP. \tag{3}$$

Очевидно, что функция $a_{e\,1}(y)$ – монотонно неубывающая, и функция $a_{e\,2}(y)$ – монотонно невозрастающая. Непрерывность слева функций $a_{e\,1}(y)$ и $a_{e\,2}(y)$ устанавливается при помощи теоремы Лебега о сходимости последовательности интегралов для сходящейся почти всюду последовательности функций, ограниченных по абсолютной величине одной и той же интегрируемой функцией. Поэтому нечеткое ожидание нечетко-случайной величины A – это нечеткое число.

Определение 6. *Ожиданием* нечетко-случайной величины A называется число

$$a_e = \int_0^1 \frac{a_{e\,1}(y) + a_{e\,2}(y)}{2} dy. \tag{4}$$

Для a_e будем использовать также обозначение $E(A)$.

Замечание. Аналогично может быть определено ожидание произвольного нечеткого числа, не обязательно являющегося нечетким ожиданием нечетко-случайной величины.

Определение 7. *Ковариацией* нечетко-случайной величины A и нечетко-случайной величины B называется число

$$Cov(A,B) = \frac{1}{2}\int_0^1 h_1(y)dy + \frac{1}{2}\int_0^1 h_2(y)dy,$$

где

$$h_i(y) = \int_\Omega (a_i(\omega,y) - a_e)(b_i(\omega,y) - b_e)dP, \qquad i = 1,2.$$

(b_1, b_2, $b_{e\,1}$, $b_{e\,2}$, b_e для нечетко-случайной величины B имеют тот же смысл, что и a_1, a_2, $a_{e\,1}$, $a_{e\,2}$, a_e для нечетко-случайной величины A.)

Предположим, что функции $a_i(\omega,y) - a_e$, $b_i(\omega,y) - b_e$, $i = 1,2$ ограничены по абсолютной величине одной и той же константой N.

Покажем, что функции $h_1(y)$ и $h_2(y)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[0,1]$. Обозначим

$$\alpha(\omega,y) = a_1(\omega,y) - a_e, \qquad \beta(\omega,y) = b_1(\omega,y) - b_e.$$

Пусть $0 \le y_1 < y_2 \le 1$. Имеем

$$|\,h_1(y_2) - h_1(y_1)| =$$

$$= \left|\int_\Omega \left(\alpha(\omega,y_2)\beta(\omega,y_2) - \alpha(\omega,y_1)\beta(\omega,y_1)\right) dP\right| \le$$

$$\le \int_\Omega |\,\alpha(\omega,y_2)\beta(\omega,y_2) - \alpha(\omega,y_2)\beta(\omega,y_1)|\, dP +$$

$$+\int_\Omega |\,\alpha(\omega,y_2)\beta(\omega,y_1)-\alpha(\omega,y_1)\beta(\omega,y_1)|\,dP\le$$

$$\le N\int_\Omega |\,\beta(\omega,y_2)-\beta(\omega,y_1)|\,dP+$$

$$+N\int_\Omega |\,\alpha(\omega,y_2)-\alpha(\omega,y_1)|\,dP=$$

$$=N\int_\Omega (\,\beta(\omega,y_2)-\beta(\omega,y_1))\,dP+$$

$$+N\int_\Omega (\,\alpha(\omega,y_2)-\alpha(\omega,y_1))\,dP.$$

Таким образом, при любом разбиении

$$0=y_0<y_1<\ldots<y_s=1$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{s}|\,h_1(y_j)-h_1(y_{j-1})|\le$$

$$\le N\int_\Omega (\,\beta(\omega,1)-\beta(\omega,0))\,dP+$$

$$+N\int_\Omega (\,\alpha(\omega,1)-\alpha(\omega,0))\,dP,$$

что и дает ограниченность вариации функции $h_1(y)$. Ограниченность вариации функции $h_2(y)$ устанавливается аналогично. Функция ограниченной вариации представима в виде разности двух монотонно неубывающих функций и, следовательно, является борелевской. Поэтому, с учетом ограниченности всех подинтегральных функций, внешние интегралы в определении $Cov(A,B)$ существуют.

Определение 8. *Скалярным произведением* нечетко-случайной величины A и нечетко-случайной величины B называется число

$$\langle A,B\rangle=\frac{1}{2}\int_0^1 h_1(y)dy+\frac{1}{2}\int_0^1 h_2(y)dy,$$

где

$$h_i(y) = \int_\Omega a_i(\omega, y) b_i(\omega, y) dP, \qquad i = 1, 2.$$

Корректность определения скалярного произведения показывается точно так же, как корректность определения ковариации.

Очевидно, что

$$Cov(A, B) = \langle A, B \rangle - a_e \int_0^1 \frac{b_{e\,1}(y) + b_{e\,2}(y)}{2} dy -$$

$$-b_e \int_0^1 \frac{a_{e\,1}(y) + a_{e\,2}(y)}{2} dy + a_e b_e.$$

Это дает соотношение

$$Cov(A, B) = \langle A, B \rangle - a_e b_e,$$

являющееся аналогом хорошо известного соотношения для ковариации случайных величин.

Определение 9. *Дисперсией* нечетко-случайной величины A называется число

$$Var(A) = Cov(A, A).$$

Для любой нечетко-случайной величины A

$$Var(A) \geq 0.$$

Определение 10. Нечетко-случайные величины A и B называется *независимыми*, если для любых $M_1, M_2 \in S$

$$P(A \in M_1, B \in M_2) = P(A \in M_1) P(B \in M_2).$$

Из формулы (2) следует, что если нечетко-случайные величины A и B независимы, то при любом y независимы случайные величины $a_1(\omega, y)$ и $b_1(\omega, y)$, и независимы случайные величины $a_2(\omega, y)$ и $b_2(\omega, y)$.

Поэтому для независимых нечетко-случайных величин A и B

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_\Omega a_1(\omega, y)dP \int_\Omega b_1(\omega, y)dP\right) dy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_\Omega a_2(\omega, y)dP \int_\Omega b_2(\omega, y)dP\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 a_{e\,1}(y)b_{e\,1}(y)dy + \frac{1}{2}\int_0^1 a_{e\,2}(y)b_{e\,2}(y)dy.$$

Полученное выражение является аналогом утверждения, что ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению ожиданий.

Соответственно, для ковариации независимых нечетко-случайных величин A и B получаем выражение

$$Cov(A, B) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(a_{e\,1}(y)b_{e\,1}(y) + a_{e\,2}(y)b_{e\,2}(y)\right) dy -$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^1 \left(a_{e\,1}(y) + a_{e\,2}(y)\right) dy \cdot \int_0^1 \left(b_{e\,1}(y) + b_{e\,2}(y)\right) dy.$$

В отличие от ковариации независимых случайных величин, которая должна быть равна нулю, ковариация независимых нечетко-случайных величин не обязана равняться нулю.

Пусть A и B – нечетко-случайные величины, λ – действительное число.

Определение 11. *Суммой* нечетко-случайных величин A и B называется нечетко-случайная величина $A + B$, обладающая тем свойством, что для любого $\omega \in \Omega$ и для любого

$y_1 \in [0,1]$ пересечение множества $(A+B)(\omega)$ с прямой $y = y_1$ имеет вид

$$\{(x,y) : a_1(\omega,y_1)+b_1(\omega,y_1) \le x \le a_2(\omega,y_1)+b_2(\omega,y_1), y = y_1\}.$$

Определение 12. *Произведением* действительного числа λ и нечетко-случайной величины A называется нечетко-случайная величина λA, обладающая тем свойством, что для любого $\omega \in \Omega$ и для любого $y_1 \in [0,1]$ пересечение множества $(\lambda A)(\omega)$ с прямой $y = y_1$ имеет вид

$$\{(x,y) : \lambda a_1(\omega,y_1) \le x \le \lambda a_2(\omega,y_1), y = y_1\}, \quad \text{если} \quad \lambda \ge 0,$$

$$\{(x,y) : \lambda a_2(\omega,y_1) \le x \le \lambda a_1(\omega,y_1), y = y_1\}, \quad \text{если} \quad \lambda < 0.$$

Из формул (3) и (4) следует, что

$$E(A+B) = E(A) + E(B), \qquad E(\lambda A) = \lambda E(A).$$

Из определения скалярного произведения следует, что для любых нечетко-случайных величин A, B и C и для любого действительного числа λ

$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle,$$

$$\langle A+B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle,$$
$$\langle \lambda A, \lambda B\rangle = \lambda^2 \langle A, B\rangle.$$

Последнее свойство может быть распространено и на скалярные произведения вида $\langle \lambda A, \mu B\rangle$, если числа λ и μ не имеют противоположные знаки.

Аналогичные свойства имеют место для ковариаций и для дисперсий.

$$Cov(A,B) = Cov(B,A),$$

$$Cov(A+B,C) = Cov(A,C) + Cov(B,C),$$
$$Cov(\lambda A, \lambda B) = \lambda^2 Cov(A,B),$$
$$Var(A+B) = Var(A) + Var(B) + 2Cov(A,B),$$
$$Var(\lambda A) = \lambda^2 Var(A).$$

Пример. Пусть пространство Ω разбито на попарно непересекающиеся события $H_1, H_2, \ldots, H_m$; $p_j = P(H_j)$ при $j = 1, \ldots, m$,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Индикатором события H_j называется функция

$$I_{H_j}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \omega \notin H_j \\ 1, & \text{если} \quad \omega \in H_j \end{cases}$$

Нечетко-случайная величина A называется *простой*, если она имеет вид

$$A(\omega) = \sum_{j=1}^{m} I_{H_j}(\omega) K_j \qquad \text{при} \qquad \omega \in \Omega,$$

где $K_1, \ldots, K_m$ – нечеткие числа. (Сумма нечетких чисел и произведение действительного числа и нечеткого числа определяются так же, как сумма нечетко-случайных величин и, соответственно, произведение действительного числа и нечетко-случайной величины.)

Другими словами, функция A принимает значение K_j при $\omega \in H_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть при $y_1 \in [0,1]$ пересечение множества K_j с прямой $y = y_1$ имеет вид

$$\{(x,y) : k_{j1}(y_1) \le x \le k_{j2}(y_1), y = y_1\},$$

где k_{j1} – монотонно неубывающая непрерывная слева функция аргумента y, k_{j2} – монотонно невозрастающая непрерывная слева функция аргумента y.

При $y_1 \in [0,1]$ для простой нечетко-случайной величины A пересечение множества $A(\omega)$ с прямой $y = y_1$ имеет вид

$$\{(x,y) : \sum_{j=1}^{m} I_{H_j}(\omega) k_{j1}(y_1) \le x \le \sum_{j=1}^{m} I_{H_j}(\omega) k_{j2}(y_1), y = y_1\}.$$

Нечеткое ожидание простой нечетко-случайной величины A имеет вид

$$\{(x,y) : 0 \le y \le 1, a_{e\,1}(y) \le x \le a_{e\,2}(y)\},$$

где

$$a_{e\,1}(y) = \sum_{j=1}^{m} p_j k_{j1}(y) \qquad a_{e\,2}(y) = \sum_{j=1}^{m} p_j k_{j2}(y),$$

то есть является нечетким числом вида

$$p_1 K_1 + p_2 K_2 + \ldots + p_m K_m.$$

3. Нечеткие квантили и распределения нечетко-случайных величин

При $0 < p < 1$, $y \in [0,1]$ для нечетко-случайной величины A определим функции $q_{1,\,p}(y)$ и $q_{2,\,p}(y)$.

$q_{1,\,p}(y)$ – это точная нижняя грань тех $x \in \mathbb{R}$, для которых

$$P(\omega \in \Omega : a_1(\omega, y) \le x) \ge p.$$

$q_{2,p}(y)$ – это точная верхняя грань тех $x \in \mathbb{R}$, для которых

$$P(\omega \in \Omega : a_2(\omega, y) < x) \leq p.$$

Пусть $y_1 < y_2$. Тогда графики функций распределения случайных величин, входящих в формулу (1), располагаются относительно друг друга так, как показано на рис. 3. Разумеется, в общем случае эти функции не обязаны быть непрерывными, строго монотонными между 0 и 1 и иметь не пересекающиеся внутри полосы $0 < y < 1$ графики.

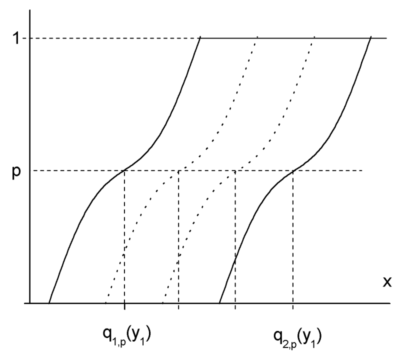

Рис. 3. Графики функций распределения случайных величин $a_1(\omega, y_1)$ и $a_2(\omega, y_1)$ (сплошные линии) и случайных величин $a_1(\omega, y_2)$ и $a_2(\omega, y_2)$ (штриховые линии), $y_1 < y_2$

Покажем, что $q_{1,p}(y)$ – монотонно неубывающая функция аргумента y. В силу (1) при $y_1 < y_2$ для любого $x \in \mathbb{R}$

$$P(\omega \in \Omega : a_1(\omega, y_1) \leq x) \geq P(\omega \in \Omega : a_1(\omega, y_2) \leq x).$$

Поэтому если вторая вероятность больше или равна p, то и первая вероятность больше или равна p. Следовательно, множество тех точек x, для которых первая вероятность больше или равна p, не меньше, чем множество тех точек x, для которых вторая вероятность больше или равна p. Поэтому $q_{1,p}(y_1) \le q_{1,p}(y_2)$.

Покажем, что $q_{2,p}(y)$ – монотонно невозрастающая функция аргумента y. В силу (1) при $y_1 < y_2$ для любого $x \in \mathbb{R}$

$$P(\omega \in \Omega : a_2(\omega, y_2) < x) \ge P(\omega \in \Omega : a_2(\omega, y_1) < x).$$

Поэтому если первая вероятность меньше или равна p, то и вторая вероятность меньше или равна p. Следовательно, множество тех точек x, для которых вторая вероятность меньше или равна p, не меньше, чем множество тех точек x, для которых первая вероятность меньше или равна p. Поэтому $q_{2,p}(y_1) \ge q_{2,p}(y_2)$.

Покажем, что $q_{1,p}(y)$ – непрерывная слева функция аргумента y. Пусть $y_n \uparrow y$ при $n \to \infty$. При любом $\omega \in \Omega$ функция $a_1(\omega, y)$ непрерывна слева как функция аргумента y, поэтому

$$a_1(\omega, y_n) \uparrow a_1(\omega, y) \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Положим

$$x^* = \inf_{x \in \mathbb{R}} P(\omega \in \Omega : a_1(\omega, y) \le x) \ge p,$$

$$x_n^* = \inf_{x \in \mathbb{R}} P(\omega \in \Omega : a_1(\omega, y_n) \le x) \ge p.$$

Из (1) следует, что

$$x_1^* \le x_2^* \le \ldots \le x_n^* \le \ldots \le x^*.$$

Предположим, что функция $q_{1,p}(y)$ не является непрерывной слева в точке y, и

$$\lim_{n \to \infty} x_n^* < x^*.$$

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для событий

$$C = \{\omega \in \Omega : a_1(\omega, y) \le x^* - \delta\},$$

$$C_n = \{\omega \in \Omega : a_1(\omega, y_n) \le x^* - \delta\}$$

выполняются условия $P(C) < p$ и $P(C_n) \ge p$ при всех n. Из соотношения

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots \supseteq C$$

следует, что

$$C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Пусть $\omega \in C_n$ при любом n. Тогда $a_1(\omega, y_n) \le x^* - \delta$ при любом n. Из условия

$$a_1(\omega, y_n) \to a_1(\omega, y) \qquad \text{при} \qquad n \to \infty$$

следует, что $a_1(\omega, y) \le x^* - \delta$. То есть $\omega \in C$ и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C.$$

Таким образом,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Но тогда по теореме о непрерывности вероятности

$$P(C) = \lim_{n \to \infty} P(C_n) \ge p.$$

Полученное противоречие показывает, что функция $q_{1,p}(y)$ является непрерывной слева в точке y.

Покажем, что $q_{2,p}(y)$ – непрерывная слева функция аргумента y. Пусть $y_n \uparrow y$ при $n \to \infty$. При любом $\omega \in \Omega$ функция $a_2(\omega, y)$ непрерывна слева как функция аргумента y, поэтому

$$a_2(\omega, y_n) \downarrow a_2(\omega, y) \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Положим

$$x^* = \sup_{x \in \mathbb{R}} P(\omega \in \Omega : a_2(\omega, y) < x) \leq p,$$

$$x_n^* = \sup_{x \in \mathbb{R}} P(\omega \in \Omega : a_2(\omega, y_n) < x) \leq p.$$

Из (1) следует, что

$$x_1^* \geq x_2^* \geq \ldots \geq x_n^* \geq \ldots \geq x^*.$$

Предположим, что функция $q_{2,p}(y)$ не является непрерывной слева в точке y, и

$$\lim_{n \to \infty} x_n^* > x^*.$$

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для событий

$$C = \{\omega \in \Omega : a_2(\omega, y) < x^* + \delta\},$$

$$C_n = \{\omega \in \Omega : a_2(\omega, y_n) < x^* + \delta\}$$

выполняются условия $P(C) > p$ и $P(C_n) \leq p$ при всех n. Из соотношения

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots \subseteq C_n \subseteq \ldots \subseteq C$$

следует, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C.$$

Пусть $\omega \in C$. Тогда $\omega \in C_n$ хотя бы при одном n, иначе при всех n выполнялось бы условие $a_2(\omega, y_n) \geq x^* + \delta$, и не могло бы выполняться условие

$$a_2(\omega, y_n) \to a_2(\omega, y) \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Это означает, что

$$C \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Таким образом,

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Но тогда по теореме о непрерывности вероятности

$$P(C) = \lim_{n \to \infty} P(C_n) \leq p.$$

Полученное противоречие показывает, что функция $q_{2,p}(y)$ является непрерывной слева в точке y.

Определение 13. *Нечеткой квантилью* порядка p нечетко-случайной величины A называется нечеткое число Q_p такое, что при любом $y_1 \in [0, 1]$ пересечение множества Q_p с прямой $y = y_1$ имеет вид

$$\{(x, y) : q_{1,p}(y_1) \leq x \leq q_{2,p}(y_1), y = y_1\}.$$

Функции $q_{1,p}(y)$ и $q_{2,p}(y)$ определены выше.

Отображение $p \to Q_p$ является нечетко-случайным аналогом функции, обратной к функции распределения случайной величины.

Библиографический список

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

2. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

3. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

4. Ляшенко Н.Н. О предельных теоремах для сумм независимых компактных случайных подмножеств евклидова пространства // Записки научных семинаров ЛОМИ, 85 (1979), 113 – 128.

5. Ляшенко Н.Н. Статистика случайных компактов в евклидовом пространстве // Записки научных семинаров ЛОМИ, 98 (1980), 115 – 139.

6. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 580. Berlin: Springer, 1977.

7. Colubi A., Dominguez-Menchero J.S., Lopez-Diaz M., Ralescu D.A. On the formalization of fuzzy random variables // Information Sciences, 133 (2001), 3 – 6.

8. Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001), 487 – 497.

9. Körner R. On the variance of fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems, 92 (1997), 83 – 93.

10. Krätschmer V. A unified approach to fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems, 123 (2001), 1 – 9.

11. Kwakernaak H. Fuzzy random variables – I. Definitions and theorems // Information Sciences, 15 (1978), 1 – 29.

12. Kwakernaak H. Fuzzy random variables – II. Algorithms and examples for the discrete case // Information Sciences, 17 (1979), 153 – 178.

13. Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems, 1 (1978), 97 – 110.

14. Näther W. Regression with fuzzy data // Computational Statistics and Data Analysis, 51 (2006), 235 – 252.

15. Puri M.L., Ralescu D.A. Fuzzy random variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 114 (1986), 409 – 422.

16. Shapiro A.F. Fuzzy random variables // Insurance: Mathematics and Economics, 44 (2009), 307 – 314.

17. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control, 8 (1965), 338 – 353.

Shvedov A. S. On fuzzy random variables [Text] : Working paper WP2/2013/02 / A. S. Shvedov ; National Research University "Higher School of Economics". – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2013. – 28 p. – (Series WP2 "Quantitative Analysis of Russian Economy"). – 70 copies (in Russian).

This paper presents a new definition of fuzzy random variable as a random set. Fuzzy expectation, expectation and variance of a fuzzy random variable are considered. Covariance and inner product of fuzzy random variables are investigated. The concepts of fuzzy quantile and distribution of a fuzzy random variable are introduced.

JEL Classification: C14, C32

Key words: random set, fuzzy random variable

Препринт WP2/2013/02
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Шведов Алексей Сергеевич

О нечетко-случайных величинах

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики" с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Тираж 70 экз. Уч.-изд. л. 1,65
Усл. печ. л. 1,62 Заказ №   . Изд. № 1553

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики"