С.С. Грачева,
доцент, к.т.н.,
НИУ ВШЭ,
г. Москва, Россия
znanie01@mail.ru

М.А. Першин,
аспирант,
НИУ ВШЭ,
г. Москва, Россия,
p0844_pm@mail.ru

Дискретная задача оптимизации рекламной политики компании в случае линейной модели динамики спроса

Optimal advertising expenditures of a monopolist with an only good in discrete linear model

Аннотация: В работе рассмотрена проблема определения оптимального объема расходов на рекламу компании в ситуации монополии на конечном горизонте планирования. Для поставленной линейной задачи оптимального управления в дискретном времени методом динамического программирования получено аналитическое решение. Результаты работы позволяют расширить применение математических методов при решении различных проблем в области маркетинга.

Abstract: The paper is devoted to determination optimal advertising expenditures for a monopolist – seller of the only good. The linear optimal control problem in discrete time is formulated and explicit solution is obtained via dynamic programming method. The obtained solution is analyzed with numerical implementation.

Ключевые слова: рекламные расходы, оптимальное управление, дискретная модель, динамическое программирование, линейная модель

Key words: advertising expenditures, optimal control, discrete model, dynamic programming, linear model

Введение

Определение рекламного бюджета является одним из вопросов, возникающих перед продавцом товаров (услуг) при их сбыте. Развитие математического аппарата привело к совершенствованию подходов к решению данной проблемы. В последнее время наибольшее развитие в научной литературе получили основанные на теории оптимального управления модели, позволяющие определить оптимальный уровень рекламы для максимизации выручки или прибыли от реализации продукции. Целесообразность рассмотрения динамических моделей или моделей многошаговой оптимизации заключается в том, что они позволяют распределить рекламные расходы на протяжении рассматриваемого периода и отследить траекторию продаж в зависимости от момента времени. Кроме того, одношаговая задача является частным случаем многошаговой.

Динамические рекламные модели разрабатывались в работах зарубежных и российских исследователей: С. Сети [11, 13-16], А. Прасада [11, 16], П. Чинтагунты [12], Г. Сорджера [17], Е.В. Астафьевой [1], Д.Д. Ахмедовой [2, 3, 4], И.П. Бородиной [5], О.А. Змеева [3, 4], А.Ф. Терпугова [4] и др.

В основном в центре внимания указанных авторов находились модели в непрерывном времени (во всех указанных, за исключением [9] и [10]). В общем виде задача определения оптимального плана рекламных расходов в указанных работах имела следующий вид:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = s_0,\ x(T) \in S_T,$$

$$x(t) \geq 0,\ u(t) \in [0, \bar{U}],$$

$$\int_0^T F(x(t), u(t))dt \to \sup_{u(t)},$$

где T - горизонт планирования, $x(t)$ - продажи в момент t, s_0 - продажи в начальный момент времени, S_T - множество допустимых значений объема продаж в момент T, $u(t)$ - расходы на рекламу в момент t, U - максимальный размер средств, которые могут быть направлены на рекламу в момент t, $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ - уравнение динимики, описывающее изменение продаж, $\int_0^T F(x(t), u(t))dt$ - прибыль за период T. Динамические модели в непрерывном времени имеют значительную теоретическую ценность, однако их применение на практике затруднено ввиду дискретного характера принятия решений и экономических показателей.

В настоящей работе рассматривается линейная дискретная многошаговая задача оптимального управления, позволяющая найти такой оптимальный объем рекламных расходов, при котором достигается максимальный размер прибыли.

Постановка задачи оптимального управления

В общем виде многошаговая задача определения оптимального объема рекламных расходов компании, реализующей уникальный продукт и не имеющей конкурентов на рынке, на конечном горизонте планирования по аналогии с описанной выше задачей в непрерывном времени может быть сформулирована следующим образом:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t),$$

$$x_0 = s_0,\ x_T \in S_T,$$

$$x_t \geq 0,\ u_t \in [0, U_t] \text{ при } t = \overline{0,T},\ (1)$$

$$\Pi = \sum_{t=0}^{T} F_t(x_t, u_t) \to \sup_{u_t, t=\overline{0,T}},$$

где T - число моментов принятия решения (число шагов), x_t - продажи за временной промежуток $[t-1; t)$, s_0 - продажи в начальный момент времени, S_T - множество допустимых значений терминального объема продаж, u_t - расходы на рекламу на *t*-ом шаге, U_t - максимальный размер средств, которые могут быть направлены на рекламу на *t*-ом шаге, $f_t(x_t, u_t)$ - функция, описывающая динамику продаж и позволяющая оценить объем продаж на следующем шаге x_{t+1} в зависимости от текущих объема продаж x_t и рекламных расходов u_t, Π – прибыль на всем горизонте планирования, $F_t(x_t, u_t)$ - прибыль в момент *t* при x_t и u_t.

Решение основано на методе динамического программирования Р. Беллмана [7].

Для спецификации модели необходимо определить вид функций $f_t(x_t, u_t)$ и $F_t(x_t, u_t)$. Положим, что временной промежуток периодов $[t-1; t)$ одинаков при любом *t*. Тогда функция прибыли на *t*-ом шаге имеет вид $F_t(x_t, u_t) = (p_t x_t - u_t)/(1 + r_t)^t$, где p_t – цена единицы продукции за вычетом расходов на ее производство на протяжении периода $[t-1; t)$, $r_t \geq 0$ – ставка дисконтирования на соответствующий срок, $(1 + r_t)^t$ - коэффициент дисконтирования на начальный момент времени. Основную сложность представляет определение зависимости $f_t(x_t, u_t)$ между текущим объемом продаж x_t, рекламными расходами u_t и объемом продаж на следующем шаге x_{t+1}. Вид функции зависимости между расходами на рекламу и объемом продаж может быть получен на основе как теоретических предположений и умозаключений (например, модель Видаля – Вольфа [18] или логарифмическая рекламная модель Сети [15]), так и регрессионных моделей. В настоящей статье положим, что динамика продаж описывается функцией $x_{t+1} = b + (1-\delta)x_t + \alpha u_t$, где правая часть является авторегрессионной моделью распределенных лагов ADL(1,1) [8], $b \geq 0$ - величина постоянного спроса на продукцию компании, $\alpha \geq 0$ - коэффициент, характеризующий влияние рекламных расходов на объем продаж, $\delta \in [0;1]$ - коэффициент, характеризующий снижение достигнутого уровня продаж при отсутствии рекламы.

Задача оптимального управления в формулировке (1) допускает различные функции и их параметры на каждом шаге *t*. В таком случае решение задачи в аналитическом виде будет чрезмерно громоздким и предпочтительно решать задачу численно с привлечением ЭВМ. Решение возможно реализовать в Microsoft Excel.

Предположим, что параметры модели не меняются на всем интервале планирования Т (если это не так, то их можно заменить средними значениями, оцененными на основе имеющихся статистических данных).

В задаче оптимального управления (1) допускается ограничение на терминальный объем продаж x_T. Если компания не планирует продавать товар (услугу) после окончания горизонта планирования, то есть горизонт планирования совпадает со сроком жизни товара, x_T может принимать любые целые неотрицательные значения. Если горизонт планирования меньше срока жизни товара (услуги), то в зависимости от ожиданий компании может быть наложено ограничение на терминальный объем продаж в виде равенств или неравенств. В настоящее статье рассмотрим сначала задачу оптимального управления без ограничений на конечный объем продаж, затем при наличии этих ограничений.

Таким образом, задача оптимального управления (1) принимает вид:

$$\Pi = \sum_{t=0}^{T} \frac{(px_t - u_t)}{(1+r)^t} \to \sup_{u_t \ge 0},$$

$$x_{t+1} = b + (1-\delta)x_t + \alpha u_t,\ x_0 = s_0,\ x_T \in S_T \qquad (2)$$

$$x_t \ge 0,\ u_t \in [0, \bar{U}] \text{ при } t = \overline{0,T}.$$

Интервал планирования Т задан и конечен.

Решение задачи (2) без ограничения на терминальный объем продаж

Рассмотрим задачу оптимального управления (2) без ограничения на терминальный объем продаж.

Для решения данной задачи необходимо найти $T+1$ функций Беллмана. Решение задачи осуществляется в обратном порядке, начиная с шага T. Функция Беллмана на T-ом шаге будет иметь вид:

$$V_0(x) = \sup_{u_T \in [0,U]} \left(\frac{px_T - u_T}{(1+r)^T} \right) = \frac{px_T}{(1+r)^T},$$

при оптимальной величине затрат на рекламу в момент T $u^*_T = 0$. В дальнейшем функция Беллмана $V_i(x)$ будет определяться из уравнения

$$V_i(x) = \sup_{u_{T-i} \in [0,U]} \left(\frac{px_{T-i} - u_{T-i}}{(1+r)^{T-i}} + V_{i-1}(b + \alpha u_{T-i} + (1-\delta)x_{T-i}) \right). \quad (3)$$

Функция Беллмана на $T-1$-ом шаге имеет вид

$$V_1(x) = \sup_{u_{T-1} \in [0,U]} \left(\frac{px_{T-1} - u_{T-1}}{(1+r)^{T-1}} + \frac{p(b + \alpha u_{T-1} + (1-\delta)x_{T-1})}{(1+r)^T} \right) =$$

$$= \sup_{u_{T-1} \in [0,U]} \left(\frac{-(1+r)u_{T-1} + \alpha p u_{T-1} + x_{T-1}(p(1+r+(1-\delta))) + bp}{(1+r)^T} \right),$$

откуда можно найти оптимальный уровень расходов на рекламу на шаге $T-1$:

$$u^*_{T-1} = \begin{cases} 0, \text{при } \alpha p - (1+r) \le 0 \\ U, \text{при } \alpha p - (1+r) > 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Тогда с учетом (4) функцию Беллмана на данном шаге можно представить:

$$V_1(x) = x_{T-1} \frac{p(1+r+(1-\delta))}{(1+r)^T} + const_1.$$

Функция Беллмана на $T-2$-ом шаге:

$$V_2(x) = \sup_{u_{T-2} \in [0,U]} \Big(\frac{px_{T-2} - u_{T-2}}{(1+r)^{T-2}} + \frac{p(1+r+(1-\delta))}{(1+r)^T}(b + (1-\delta)x_{T-2} +$$

$$+ \alpha u_{T-2}) + const_1 \Big) = x_{T-2} \frac{p((1+r)^2 + (1-\delta)(1+r+(1-\delta))}{(1+r)^T} + const_2,$$

при оптимальном уровне расходов на рекламу:

$$u^*_{T-2} = \begin{cases} 0, \text{при } \alpha p(1+r+1-\delta) - (1+r)^2 \le 0 \\ U, \text{при } \alpha p(1+r+1-\delta) - (1+r)^2 > 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Функция Беллмана на $T-3$-ем шаге:

$$V_3(x)=\sup_{u_{T-3}\in[0,U]}\left\{\frac{px_{T-3}-u_{T-3}}{(1+r)^{T-3}}+\frac{p((1+r)^2+(1-\delta)(1+r+(1-\delta))}{(1+r)^T}(b+\right.$$

$$\left.+(1-\delta)x_{T-3}+\alpha u_{T-3})+const_2\right)=x_{T-3}\left(\frac{p((1+r)^3+(1-\delta)((1+r)^2))}{(1+r)^T}+\right.$$

$$\left.+\frac{p(1-\delta)^2(1+r+(1-\delta))}{(1+r)^T}\right)+const_3,$$

при оптимальном уровне расходов на рекламу:

$$u*_{T-3}=\begin{cases}0,при\ \alpha p((1+r)^2+(1-\delta)(1+r)+(1-\delta)^2)-(1+r)^3\le 0\\ U,при\,\alpha p((1+r)^2+(1-\delta)(1+r)+(1-\delta)^2)-(1+r)^3>0\end{cases}.\qquad(6)$$

Из (4), (5) и (6) можно заметить закономерность изменения оптимального уровня расходов на рекламу в зависимости от шага $T-i$. Тогда на $T-i$ -ом шаге оптимальный уровень расходов на рекламу может быть найден по формуле:

$$u*_{T-i}=\begin{cases}0,при\ \alpha p\left(\sum_{j=0}^{i-1}(1-\delta)^j(1+r)^{i-1-j}\right)-(1+r)^i\le 0\\ U,при\,\alpha p\left(\sum_{j=0}^{i-1}(1-\delta)^j(1+r)^{i-1-j}\right)-(1+r)^i>0\end{cases}.\qquad(7)$$

Заметим, что сумму $\sum_{j=0}^{i-1}(1-\delta)^j(1+r)^{i-1-j}$ можно представить как $\frac{((1+r)^i-(1-\delta)^i)}{((1+r)-(1-\delta))}$ (если выполняется хоты бы одно из условий: $r\neq 0$ или $\delta\neq 0$).

Тогда (7) можно переписать следующим образом:

$$u*_{T-i}=\begin{cases}0,при\ \frac{\alpha p((1+r)^i-(1-\delta)^i)}{(r+\delta)}-(1+r)^i\le 0\\ U,при\,\frac{\alpha p((1+r)^i-(1-\delta)^i)}{(r+\delta)}-(1+r)^i>0\end{cases}\quad\text{или}$$

$$u*_t=\begin{cases}0,при\ \frac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}\le 0\\ U,при\,\frac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}>0\end{cases}.\qquad(8)$$

Функция $\dfrac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}$ является степенной функцией от *t* и в зависимости от коэффициентов модели либо не меняет знак вовсе, либо меняет его только один раз в точке

$$t_0 = T + \frac{\ln(\alpha p - r - \delta) - \ln(\alpha p)}{\ln(1+r) - \ln(1-\delta)}, \qquad (9)$$

то есть между шагами $\lfloor t_0 \rfloor$ и $\lceil t_0 \rceil$. Точка переключения (9), если она существует на $[0;T]$, всегда меньше *T*. Кроме того, $\dfrac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}$ на шаге *T* всегда меньше 0.

Тогда при существовании точки переключения (9) на $[0;T]$ оптимальное управление рекламными расходами (8) можно записать:

$$u^*_t = \begin{cases} 0, при\ t \geq \lceil t_0 \rceil \\ U, при\ t \leq \lfloor t_0 \rfloor \end{cases};$$

если точка переключения (9) $t_0 \notin [0;T]$, то $u^*_t = 0$ на любом шаге *t*.

Зная оптимальный уровень расходов на рекламу u^*_t на каждом шаге $t=\overline{0,T-1}$, найдем соответствующие объемы продаж в моменты $t=\overline{1,T}$. При начальном объеме продаж $x_0 = s_0$ объем продаж на любом шаге $t=\overline{1,T}$ можно найти по формуле

$$x^*_t = (1-\delta)^t s_0 + b\sum_{j=0}^{t-1}(1-\delta)^j + \alpha\sum_{l=0}^{t-1}u^*_l(1-\delta)^{t-1-l}. \qquad (10)$$

Отметим, что $x^*_t \geq 0$ на любом шаге $t=\overline{1,T}$ по постановке задачи ($b \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\delta \in [0;1]$, $s_0 \geq 0$).

Отсюда прибыль компании при применении оптимальной рекламной политики равна

$$П^* = \sum_{t=0}^{T}\frac{(px^*_t - u^*_t)}{(1+r)^t}. \qquad (11)$$

Решение задачи (2) с ограничением на терминальный объем продаж

Рассмотрим задачу оптимального управления (2) с ограничением на объем продаж в конце горизонта планирования $x_T \in S_T$.

Перед решением данной задачи необходимо определить, является ли такой объем продаж $x_T \in S_T$ достижимым при начальном объеме продаж $x_0 = s_0$. Учитывая, что объем продаж x_T описывается

$$x_T = (1-\delta)^T s_0 + b\sum_{j=0}^{T-1}(1-\delta)^j + \alpha\sum_{l=0}^{T-1}u_l(1-\delta)^{T-1-l},$$

а расходы на рекламу могут принимать значения $u_t \in [0, U]$, найдем минимальный и максимальный объемы продаж x_T, которые могут быть достигнуты из $x_0 = s_0$:

$$x_{T,\min} = (1-\delta)^T s_0 + b\sum_{j=0}^{T-1}(1-\delta)^j, \quad x_{T,\max} = (1-\delta)^T s_0 + (b+\alpha U)\sum_{j=0}^{T-1}(1-\delta)^j \qquad (13)$$

или при $\delta \neq 0$

$$x_{T,\min} = (1-\delta)^T s_0 + \frac{b(1-(1-\delta)^T)}{\delta}, \quad x_{T,\max} = (1-\delta)^T s_0 + \frac{(b+\alpha U)(1-(1-\delta)^T)}{\delta}.$$

Не ограничивая общности, при решении задачи рассмотрим два типа ограничений: в виде равенства и в виде неравенств.

I. Предположим, что ограничение на терминальный объем продаж наложено в виде равенства: $x_T = s_T$. В зависимости от соотношения s_T и $[x_{T,\min}, x_{T,\max}]$ возможны следующие ситуации:

1) при $s_T < x_{T,\min}$ или $s_T > x_{T,\max}$ оптимального решения не существует, так как ни при каком допустимом управлении расходами на рекламу не удастся достичь объема продаж s_T;

2) при $s_T = x_{T,\min}$ рекламные расходы должны оставаться на минимально возможном уровне $u^*_t = 0$, $x^*_t = (1-\delta)^t s_0 + b\sum_{j=0}^{t-1}(1-\delta)^j$;

3) при $s_T = x_{T,\max}$ рекламные расходы должны оставаться на максимально возможном уровне $u^*_t = U$, $u^*_T = 0$, $x^*_t = (1-\delta)^t s_0 + (b+\alpha U)\sum_{j=0}^{t-1}(1-\delta)^j$;

4) при $s_T \in (x_{T\min}, x_{T\max})$ существует момент переключения управления θ. Рассмотрим этот случай подробнее.

Наша задача состоит в том, чтобы как можно дольше оставаться на траектории, являющейся оптимальной в задаче без ограничения, а затем, в конце горизонта планирования, сойти с оптимальной траектории в целях достижения заданного конечного объема продаж s_T.

Пусть $\dfrac{\alpha p((1+r)^{T-t} - (1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)} - (1+r)^{T-t} > 0$ для $\forall t = \overline{0,\theta}$. Тогда оптимальным управлением рекламными расходами на шагах $t = \overline{0,\theta - 1}$ будет поддержание их на максимально возможном уровне $u^*_t = U$, на шагах $t = \overline{\theta + 1, T}$ - поддержание рекламных расходов на минимально возможном уровне $u^*_t = 0$. Момент переключения управления θ определяет из равенства

$$s_0(1-\delta)^t + (b+\alpha U)\sum_{j=0}^{t-1}(1-\delta)^j = \frac{s_T}{(1-\delta)^{T-t}} - b\sum_{i=t}^{T-1}\frac{1}{(1-\delta)^{T-i}} \qquad (14)$$

или при $\delta \neq 0$

$$s_0(1-\delta)^t + \frac{(b+\alpha U)(1-(1-\delta)^t)}{\delta} = \frac{s_T}{(1-\delta)^{T-t}} - \frac{b(1-(1-\delta)^{T-t})}{\delta(1-\delta)^{T-t}},$$

что достигается при $t = T - \dfrac{\ln(s_T\delta + (b+\alpha U)(1-\delta)^T - s_0\delta(1-\delta)^T - b) - \ln(\alpha U)}{\ln(1-\delta)}$.

Так как номер шага θ, на котором происходит переключение управления, может принимать только целые значения, то

$$\theta = \left\lfloor T - \frac{\ln(s_T\delta + (b+\alpha U)(1-\delta)^T - s_0\delta(1-\delta)^T - b) - \ln(\alpha U)}{\ln(1-\delta)} \right\rfloor. \qquad (15)$$

Поскольку траектория объема продаж при изменении управления должна оставаться непрерывной, необходимо найти такое управление на шаге θ, чтобы достигалось равенство объемов продаж на шаге $\theta + 1$:

$$(1-\delta)\left(s_0(1-\delta)^{\theta}+\frac{(b+\alpha U)(1-(1-\delta)^{\theta})}{\delta}\right)+b+\alpha u_{\theta}=\frac{s_T}{(1-\delta)^{T-(\theta+1)}}-\frac{b(1-(1-\delta)^{T-(\theta+1)})}{\delta(1-\delta)^{T-(\theta+1)}},$$

где слева – объем продаж, рассчитанный из начального состояния s_0, справа – объем продаж, рассчитанный из конечного состояния s_T. Отсюда оптимальный объем рекламных расходов на шаге θ

$$u^*_{\theta}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{s_T}{(1-\delta)^{T-(\theta+1)}}-\frac{b(1-(1-\delta)^{T-(\theta+1)})}{\delta(1-\delta)^{T-(\theta+1)}}-\right.$$

$$\left.-\left((1-\delta)\left(s_0(1-\delta)^{\theta}+\frac{(b+\alpha U)(1-(1-\delta)^{\theta})}{\delta}\right)+b\right)\right). \qquad (16)$$

Отметим, что $u^*_{\theta}\in[0;U]$.

Теперь положим, что $\frac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}\le 0$ для $\forall t=\overline{0,\theta}$.

Тогда оптимальным управлением рекламными расходами на шагах $t=\overline{0,\theta-1}$ будет поддержание их на минимально возможном уровне $u^*_t=0$, на шагах $t=\overline{\theta+1,T-1}$ - поддержание рекламных расходов на максимально возможном уровне $u^*_t=U$, на последнем шаге $u^*_T=0$. Момент переключения управления θ определяет из равенства

$$s_0(1-\delta)^t+b\sum_{j=0}^{t-1}(1-\delta)^j=\frac{s_T}{(1-\delta)^{T-t}}-(b+\alpha U)\sum_{i=t}^{T-1}\frac{1}{(1-\delta)^{T-i}} \qquad (17)$$

или при $\delta\neq 0$

$$s_0(1-\delta)^t+\frac{b(1-(1-\delta)^t)}{\delta}=\frac{s_T}{(1-\delta)^{T-t}}-\frac{(b+\alpha U)(1-(1-\delta)^{T-t})}{\delta(1-\delta)^{T-t}},$$

что достигается при $t=T-\frac{\ln(s_0\delta(1-\delta)^T-s_T\delta+(b+\alpha U)-b(1-\delta)^T)-\ln(\alpha U)}{\ln(1-\delta)}$.

Тогда номер шага, на котором происходит переключение управления, равен

$$\theta=\left\lfloor T-\frac{\ln(s_0\delta(1-\delta)^T-s_T\delta+(b+\alpha U)-b(1-\delta)^T)-\ln(\alpha U)}{\ln(1-\delta)}\right\rfloor. \qquad (18)$$

Оптимальный объем рекламных расходов на шаге θ можно найти из равенства

$$(1-\delta)\left(s_0(1-\delta)^{\theta}+\frac{b(1-(1-\delta)^{\theta})}{\delta}\right)+b+\alpha u_{\theta}=\frac{s_T}{(1-\delta)^{T-(\theta+1)}}-\frac{(b+\alpha U)(1-(1-\delta)^{T-(\theta+1)})}{\delta(1-\delta)^{T-(\theta+1)}},$$

откуда получаем

$$u^*_{\theta}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{s_T}{(1-\delta)^{T-(\theta+1)}}-\frac{(b+\alpha U)(1-(1-\delta)^{T-(\theta+1)})}{\delta(1-\delta)^{T-(\theta+1)}}-\right.$$

$$\left.-\left((1-\delta)\left(s_0(1-\delta)^{\theta}+\frac{b(1-(1-\delta)^{\theta})}{\delta}\right)+b\right)\right). \qquad (19)$$

Снова отметим, что $u^*_{\theta} \in [0;U]$.

Для решения задачи в случае, когда смена знака $\frac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}$ происходит до момента θ, разобьем ее на две подзадачи. Сначала необходимо разрешить задачу до момента смены знака $\lfloor t_0 \rfloor$, определенного в (9), в соответствии с оптимальным управлением рекламой, затем полученный на шаге $\lceil t_0 \rceil$ объем продаж принимаем за начальный и решаем задачу способом, описанным выше.

II. Предположим, что на терминальный объем продаж наложено ограничение в виде неравенств: $s_{T,\min} \le x_T \le s_{T,\max}$. Тогда в зависимости от соотношения множества допустимых значений на шаге T $X_T = [x_{T,\min}; x_{T,\max}]$ и множества ограничений на объем продаж на шаге T $S_T = [s_{T,\min}; s_{T,\max}]$ возможны следующие ситуации:

1) множества не имеют пересечений, тогда решения задачи не существует;

2) пересечение множеств содержит только одну из точек $s_{T,\max} = x_{T,\min}$ или $s_{T,\min} = x_{T,\max}$, тогда оптимальный объем рекламных расходов определяется в соответствии с ситуацией 2) или 3) при ограничении в виде равенства $s_T = x_{T,\min}$ или $s_T = x_{T,\max}$ соответственно;

3) пересечение множеств содержит несколько точек. В таком случае также можно привести задачу к ситуации 4 задачи с ограничением в виде равенства.

Если $\frac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}>0$ для $\forall t=\overline{0,\theta}$, то

$$s_T=\begin{cases} x_{T,\max}, если\ x_{T,\max}\le s_{T,\max} \\ s_{T,\max}, если\ x_{T,\max}>s_{T,\max} \end{cases}.$$

Если $\frac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}\le 0$ для $\forall t=\overline{0,\theta}$, то

$$s_T=\begin{cases} x_{T,\min}, если\ x_{T,\min}>s_{T,\min} \\ s_{T,\min}, если\ x_{T,\min}\le s_{T,\min} \end{cases}.$$

Анализ полученного решения

Оптимальное управление рекламными расходами (8) относится к классу «релейного управления» или управления с переключением, что обусловлено линейностью задачи оптимального управления (2), и принимает, в зависимости от некоторого условия, либо максимальную, либо минимальную допустимую величину. Оптимальное управление (8) не зависит от текущего объема продаж, поскольку в авторегрессионной модели распределенных лагов ADL(1,1), описывающей динамику изменения объема продаж, предшествующий объем продаж и рекламные расходы предполагаются как независимые факторы. Таким образом, оптимальный объем рекламных расходов зависит исключительно от момента времени t и параметров модели α,δ,r,p,T.

Для определения их влияния на оптимальный объем рекламных расходов рассмотрим функцию $f(t)=\frac{\alpha p((1+r)^{T-t}-(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)}-(1+r)^{T-t}$, от знака которой зависит рекламный бюджет. Поскольку при $t=T$ $f(T)$ всегда принимает значение -1, то рекламные расходы на последнем шаге всегда должны быть минимально возможными. Выше было отмечено, что если она меняет знак, то не более одного раза.

Поскольку $(1+r)^{T-t} \geq (1-\delta)^{T-t}$, то значения функции $f(t)$ прямо пропорциональны эффективности рекламы α и цене единицы продукции *p*. Чтобы оценить влияние коэффициента снижения продаж δ и ставки дисконтирования *r*, возьмем производные функции $f(t) = \frac{\alpha p((1+r)^{T-t} - (1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)} - (1+r)^{T-t}$ по δ и r при фиксированном *t*.

Производная по δ равна $\frac{\alpha p((1-\delta)^{T-t-1}(1+(T-t)r+(T-t-1)\delta)-(1+r)^{T-t})}{(r+\delta)^2}$, откуда видно, что влияние коэффициента снижения продаж δ на значение функции $f(t)$ зависит от ставки дисконтирования r и шага задачи. Производная по r равна

$$\frac{\alpha p((1+r)^{T-t-1}(T-t)(r+\delta)-(1+r)^{T-t}+(1-\delta)^{T-t})}{(r+\delta)^2} - (T-t)(1+r)^{T-t-1},$$

откуда видно, что влияние ставки дисконтирования r на значение функции $f(t)$ зависит от остальных параметров и шага задачи.

Для наглядности полученных выше результатов построим графики решения задачи (2) при следующих параметрах: $T=12$, $b=100$, $p=30$, $r=0{,}1$, $\alpha=2{,}4$, $\delta=0{,}8$.

На рис. 1 представлены графики оптимального уровня рекламных расходов u^*_t и оптимального уровня продаж в денежном эквиваленте px^*_t, если начальный объем продаж $s_0=0$ единиц продукции. При заданных выше значениях параметров переключение управления происходит на последнем шаге.

Построим график решения задачи с ограничением на терминальный объем продаж. При заданных параметрах модели достижимое множество значений лежит между $x_{T,\min}=125$ и $x_{T,\max}=30125$. Пусть объем продаж на последнем шаге $s_T=5000$. Тогда момент переключения управления $\theta=10$, рекламные расходы $u_\theta=7656{,}25$. Графики оптимального уровня рекламных расходов u^*_t и оптимального уровня продаж в денежном эквиваленте px^*_t при начальном и конечном объемах продаж $s_0 = 0$ и $s_T = 5000$ соответственно, представлены на рис. 2.

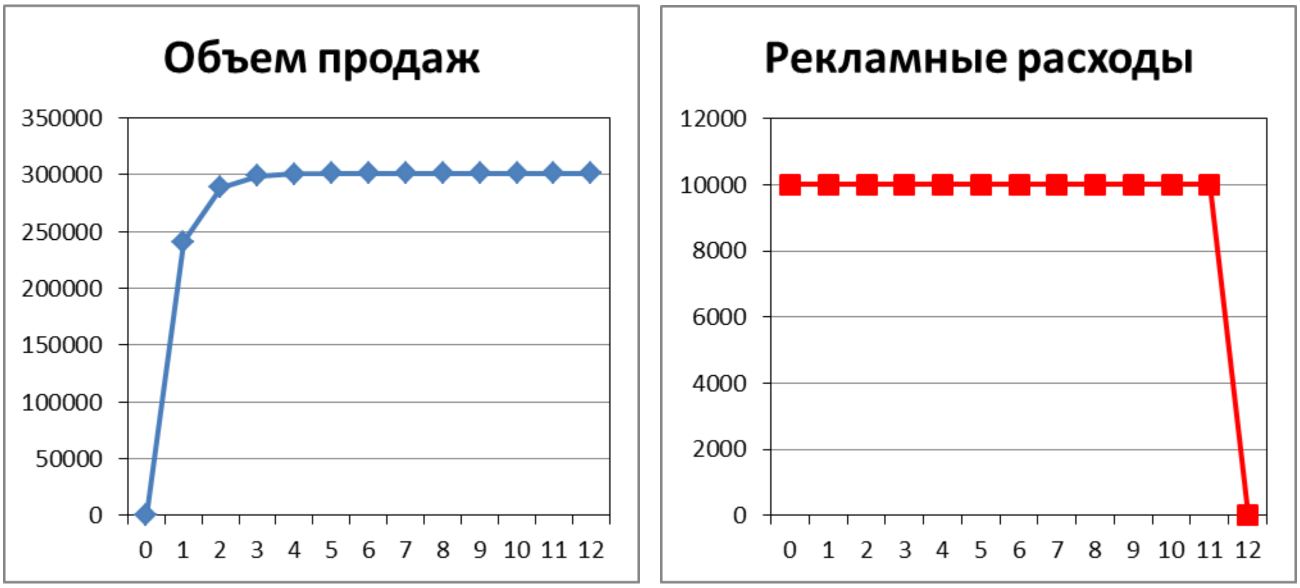

Рис. 1. Графики оптимальных расходов на рекламу и продаж в денежном выражении при $s_0 = 0$ и без ограничения на терминальный объем продаж

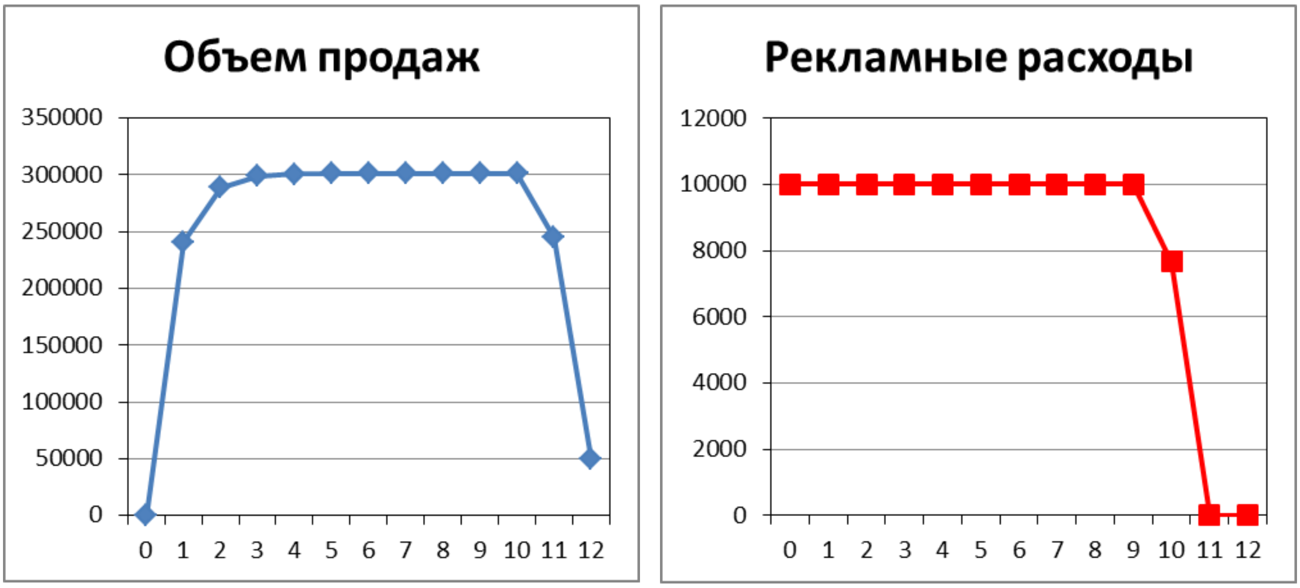

Рис. 2. Графики оптимальных расходов на рекламу и продаж в денежном выражении при $s_0 = 0$ и $s_T = 5000$

Заключение

Рассмотренная в настоящей статье многошаговая оптимизационная линейная модель в дискретном времени (1) позволяет найти оптимальный объем рекламных расходов и продаж компании для монополии с одним товаров.

В целях получения аналитического решения в задаче (2) было сделано предположение о том, что решения по объему рекламных вложений принимаются с равными промежутками времени, а также функциональная зависимость объема продаж от рекламных расходов и функция прибыли на каждом шаге не меняются. Вместе с тем, «более широкая» формулировка задачи (1) допускает различные для каждого шага функции зависимости продаж от рекламы $f_t(x_t, u_t)$ и функции прибыли $F_t(x_t, u_t)$, в том числе и за счет различных параметров модели. Решение задачи (1) может быть получено в результате реализации алгоритма решения, использованного при решении задачи (2), с помощью средств ЭВМ.

Тем не менее, необходимость знать все функции и параметры для каждого шага заранее, которые в быстро изменяющихся условиях рыночной конъюнктуры достаточно сложно оценить и спрогнозировать на один шаг вперед, является основным недостатком динамической модели. В качестве альтернативных моделей, позволяющих определить величину рекламных расходов, можно использовать одношаговые модели с ограничением на терминальный объем продаж. Однако такой подход в свою очередь также обладает рядом недостатков.

Другим существенным недостатком модели является отсутствие обратной связи рекламных расходов и объема продаж. Рассмотрение моделей с обратной связью целесообразно, так как зачастую у начинающих свою деятельность компаний просто нет средств на рекламную кампанию, которая бы позволила им достичь стационарного объема продаж. В то же время в модели делается предположение, что компания – является монополистом, которые, как правило, обладают значительными финансовыми ресурсами. Таким образом, данная проблема характерна в основном для новых отраслей.

Несмотря на указанные недостатки, рассмотренная в статье модель имеет большой потенциал для определения долгосрочной рекламной стратегии компании, выявления параметров, воздействие на которые будет содействовать повышению прибыли от реализации продукции.

Дальнейшее развитие модели возможно осуществить за счет внесения в модель конкурента и приведения ее к игре, что позволит определить оптимальные рекламные расходы в зависимости от действия конкурентов, а также за счет добавления в модель еще одного товара компании, что создаст возможность рассмотрения эффекта влияния продаж одного товара компании на другой товар за счет осуществления компанией рекламы своей торговой марки.

Библиографический список

1. Астафьева Е.В. Математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей однородную продукцию: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Томский государственный университет. – Томск, 2006. 108 с.

2. Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу. Изв. вузов. Физика. - 2001. № 1. с. 25-29.

3. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А. Оптимизация расходов на рекламу при деятельности страховой компании. Изв. вузов. Физика. - 2001. № 6. с. 3-7.

4. Ахмедова Д.Д., Змеев О.А., Терпугов А.Ф. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу. Вестник Томского государственного университета. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. № 275. с. 181-185.

5. Бородина И.П. Разработка и анализ систем управления рекламными коммуникациями фирмы на потребительском рынке: дис. канд. тех. наук: 05.13.10. Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Ростовский-на-Дону государственный педагогический университет. – Таганрог, 2005. 189 с.

6. Грачева С.С., Першин М.А. Определение оптимальной рекламной и ценовой политики компании – монополиста на основе модифицированной модели

Видаля-Вольфа. Инновационная система государства и перспектива ее развития. Сборник научных трудов. – Гомель, Белоруссия: ЦИИР, 2010. с. 114-121.

7. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – Москва: Айрис Пресс, 2002.

8. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. Москва: Издательство «ДЕЛО», 2004.

9. Першин М.А. Определение оптимальной рекламной стратегии компании – монополиста в модели с дискретным временем. Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МИЭМ, посвященная 50-летию МИЭМ. Тезисы докладов. – М.: МИЭМ, 2012, с. 406.

10. Першин М.А. Определение оптимального объема рекламных расходов компании – монополиста с одним товаром в дискретном времени без ограничения на терминальный объем продаж. Управление экономическими системами: электронный научный журнал, № 8 (44), 2012 г. http://uecs.ru/uecs44-442012/item/1499-2012-08-04-07-45-33 (дата обращения 17.10.2012).

11. Bass, F.M., Krishnamoorthy, A., Prasad, A., Sethi, S.P. Advertising competition with market expansion for finite horizon firms. Journal of Industrial and Management Optimization, 1, 1, 2005, pp. 1-19.

12. Chintagunta, P.K., Jain, D. Dynamic duopoly models of advertising competition: estimation and a specification tests. Journal of Economics and Management Strategy, 4, 1, 1995, pp. 109-131.

13. Feichtinger, G., Hartl, R.F., Sethi, S.P. Dynamic optimal control models in advertising: recent developments. Management Science, 40, 2, 1994, pp. 195-226.

14. Sethi, S.P. Optimal control of the Vidale-Wolfe advertising model. Operations research, 21, 1973, pp. 998-1013.

15. Sethi, S.P. Optimal control of a logarithmic advertising model. Operations research, 26, 1975, pp. 317-319.

16. Sethi, S.P., Prasad, A., He, X. Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model. Journal of Optimization Theory and Applications, 139 (2), 2008, pp. 351-360.
17. Sorger, G. Competitive dynamic advertising: a modification of the case game. Journal of Economic Dynamics and Control, 13, 1989, pp. 55-80.
18. Vidale, M.L., and Wolfe, H.B. An Operations Research Study of Sales Response to Advertising. Operations Research, 5, 1957, pp. 370-381.