Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\frac{4}{x-3} \ge \frac{3}{x-1}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) + \log_{\frac{1}{2}}(5x-6) = -3.$$

4. Решить уравнение

$$3\cos 2x + 11\sin x - 6 = 0.$$

5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Точка O – центр вписанной в треугольник окружности, делит высоту BD в отношении $BO : OD = 3 : 1$. Найти BD, если $AC = 4\sqrt{2}$.

6. Решить неравенство

$$\log_{5x+3} 2x^2 \le 1.$$

7. Найти целые корни уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi(x+2)}{x^2 - 2x + 2}\right) = 0.$$

8. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3. Боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{7}$. Точка M – середина AB, N – середина BC. Найти радиус сферы, проходящей через S, A, M, N.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_x\left(ax + \frac{1}{3}\right) = -2$$

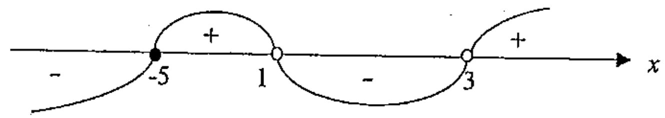
имеет единственное решение.

Решение варианта 1

Задача 1.

$$\frac{4}{x-3} \ge \frac{3}{x-1} \iff \frac{4(x-1) - 3(x-3)}{(x-3)(x-1)} \ge 0 \iff \frac{x+5}{(x-3)(x-1)} \ge 0 \iff$$

$$x \in [-5, 1) \cup (3; +\infty)$$



Ответ: $x \in [-5, 1) \cup (3; +\infty)$.

Задача 2.

Для решения системы воспользуемся формулой суммы кубов двух чисел.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 72 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 - xy + y^2 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 - x(6-x) + (6-x)^2 = 12 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 + 6x + 8 = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 2 \end{cases}$.

Задача 3.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)+\log_{\frac{1}{2}}(5x-6)=-3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x-4>0 \\ 5x-6>0 \\ (3x-4)(5x-6)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{4}{3} \\ 15x^2-38x+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>\dfrac{4}{3} \\ x_{1,2}=\dfrac{19\pm\sqrt{361-240}}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{8}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: $x=2$.

Задача 4.

$$3\cos 2x+11\sin x-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(1-2\sin^2 x\right)+11\sin x-6=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\sin^2 x-11\sin x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1}{3} \\ \sin x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \sin x=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Задача 5.

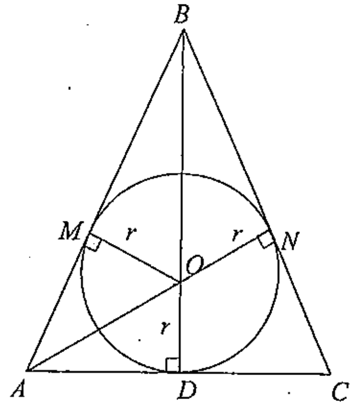


Рис. 1.

Способ 1. Так как O – центр вписанной окружности, то AO – биссектриса угла BAC. По свойству биссектрисы $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BO}{OD}=3$.

Значит $AB=3AD=3\cdot\dfrac{AC}{2}=6\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=8.$$

Способ 2. Обозначим $OD=OM=ON=r$ – радиус вписанной в треугольник окружности (рис. 1). Тогда, по условию задачи, $BO=3OD=3r$ и $BD=4r$.

По теореме Пифагора

$$AB=BC=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+(4r)^2}=\sqrt{8+16r^2}.$$

Из подобия треугольников BOM и ABD следует, что

$$\frac{AB}{BO}=\frac{AD}{MO} \Rightarrow \frac{\sqrt{8+16r^2}}{3r}=\frac{2\sqrt{2}}{r} \Rightarrow \sqrt{8+16r^2}=6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad 8+16r^2=72 \;\Rightarrow\; r^2=4 \;\Rightarrow\; r=2.$$

Следовательно, $BD=4r=8$.

Ответ: $BD=8$.

Задача 6.

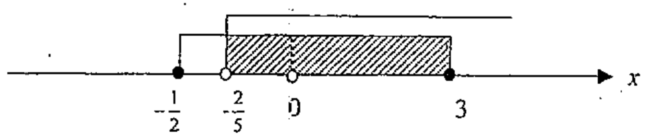
$$\log_{5x+3} 2x^2 \le 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{5x+3} 2x^2 \le \log_{5x+3}(5x+3)$$

Решение распадается на два случая.

Случай 1.

$$\begin{cases} 5x+3>1 \\ 2x^2 \le 5x+3 \\ 2x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x>-2 \\ 2x^2-5x-3\le 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{5} \\ 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-3)\le 0 \\ x\ne 0 \end{cases}$$

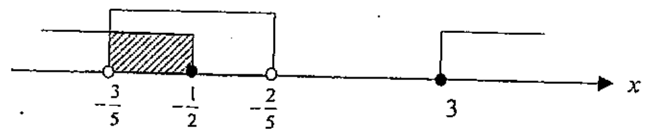
$$\Leftrightarrow \quad x\in\left(-\frac{2}{5};0\right)\cup(0;3]$$



Случай 2.

$$\begin{cases} 0<5x+3<1 \\ 2x^2\ge 5x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<5x<-2 \\ 2x^2-5x-3\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{5}<x<-\dfrac{2}{5} \\ 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-3)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{2}\right].$$



Ответ: $x\in\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(-\dfrac{2}{5};0\right)\cup(0;3]$.

Задача 7.

$$\sin\left(\frac{\pi(x+2)}{x^2-2x+2}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi(x+2)}{x^2-2x+2}=\pi n, n\in Z \;\Leftrightarrow\; \frac{x+2}{x^2-2x+2}=n$$

$$\Leftrightarrow \; x+2=nx^2-2nx+2n \;\Leftrightarrow\; nx^2-(2n+1)x+2n-2=0 \qquad (1)$$

Если $n=0$, то уравнение (1) будет линейным и его корнем будет $x=-2\in Z$.

Если $n\ne 0$, то квадратное уравнение (1) будет иметь корни только когда дискриминант этого уравнения неотрицателен

$$D=(2n-1)^2-4n(2n-2)=-4n^2+12n+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \; 4n^2-12n-1\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3-\sqrt{10}}{2}\le n\le\frac{3+\sqrt{10}}{2} \qquad (2)$$

Так как $3<\sqrt{10}<4$, то $-1<\dfrac{3-\sqrt{10}}{2}<0$ и $3<\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}<4$. Поскольку n – целое число, то из неравенства (2) следует, что $n\in\{1;2;3\}$.

Рассмотрим каждую из этих возможностей.

1. $n=1$. Подставим это значение в уравнение (1):

$$x^2-3x=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{aligned} &x=0\in Z \\ &x=3\in Z \end{aligned}\right.;$$

2. $n=2$. Подставим это значение в уравнение (1):

$$2x^2-5x+2=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{aligned} &x=\frac{1}{2}\notin Z \\ &x=2\notin Z \end{aligned}\right.;$$

3. $n=3$. Подставим это значение в уравнение (1):

$$3x^2-7x+4=0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=1\in Z \\ x=\dfrac{4}{3}\notin Z \end{array}\right. .$$

Ответ: $x\in\{-2;0;1;2;3\}$.

Задача 8.

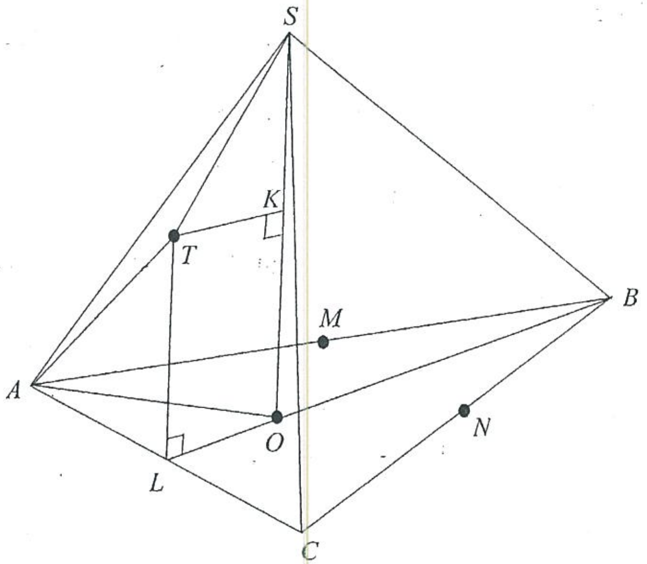


Рис. 2.

Пусть T – центр сферы. Опустим перпендикуляр из T на плоскость ABC. Основанием этого перпендикуляра будет центр окружности, проходящей через точки M, N, A.

Этим центром является точка L – середины стороны AC (рис. 3), поскольку $AL=ML=NL=LC=\dfrac{3}{2}$.

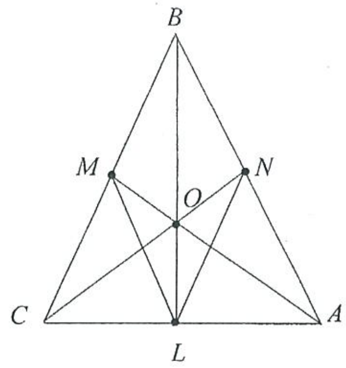


Рис. 3.

Обозначим $x=TL$ (рис. 2). Тогда $KO=TL=x\ (KT\perp SO)$. Найдем высоту пирамиды SO:

$$AO=\frac{2}{3}AN=\frac{2}{3}\cdot AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3};\quad SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{7-3}=2.$$

Тогда $SK=SO-KO=2-x;\quad TK=OL=\dfrac{BO}{2}=\dfrac{AO}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Если R – радиус сферы, то по теореме Пифагора

$$R^2=TS^2=TK^2+SK^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2-x)^2$$

$$R^2=TA^2=TL^2+AL^2=x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Приравняв выражения, стоящие в правых частях этих равенств, получим

$$\frac{3}{4}+4-4x+x^2=x^2+\frac{9}{4}\ \Rightarrow\ 4x=4-\frac{6}{4}=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{5}{8}.$$

Значит $\quad R^2=x^2+\dfrac{9}{4}=\dfrac{25}{64}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{169}{64}\ \Rightarrow\ R=\dfrac{13}{8}$

Ответ: $\dfrac{13}{8}$.

Задача 9.

Уравнение

$$\log_x\left(ax+\frac{1}{3}\right)=-2. \qquad (3)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} ax+\frac{1}{3}=\frac{1}{x^2} \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}. \qquad (4)$$

Перепишем уравнение (4) в виде:

$$a=f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{3x}=\frac{3-x^2}{3x^3}.$$

Исследуем функцию $y=f(x)$ и построим ее график на области определения $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$. Для этого вычислим производную:

$$f'(x)=-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{3x^2}=\frac{x^2-9}{3x^4}=\frac{(x+3)(x-3)}{3x^4}.$$

Так как $x>0$, то $x+3>0$. Значит:

1) при $x\le 3$ $f'(x)\le 0 \Rightarrow f(x)$ убывает;

2) при $x\ge 3$ $f'(x)\ge 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает.

Точка минимума функции $f(x)$ будет $x_0=3$ и $f(3)=-\frac{2}{27}$.

Поскольку:

$$f(1)=\frac{2}{3};\ \lim_{x\to+0}f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

то график функции $y=f(x)$ схематично можно представить в виде

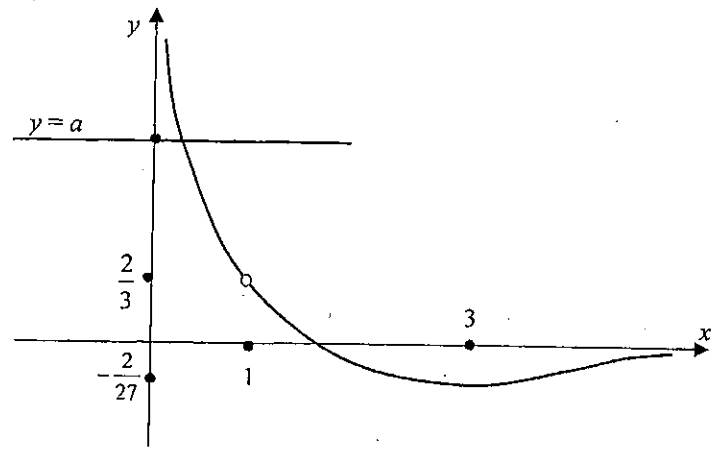


Рис. 4.

Уравнение (3) будет иметь единственное решение при тех значениях a, для которых горизонтальная прямая $y=a$ пересекается с графиком функции $y=f(x)$ лишь в одной точке. Одна из таких прямых изображена на рис. 4. Таким образом,

$$a\in\left\{-\frac{2}{27}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Ответ: $a\in\left\{-\frac{2}{27}\right\}\cup\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-3x-4}=0.$$

2. Решить неравенство

$$3^x\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{2x+3}<9.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=4\\ x-y=6\end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$7\sin 2x+8\cos^2 x=3.$$

5. В прямоугольный треугольник, периметр которого 24, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найти стороны треугольника.

6. Решить уравнение

$$3\sin x\cos x-\sin x=1+\cos x.$$

7. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\log_2 x^2+\log_2(x+15)=4$$

8. В основании треугольной пирамиды *SABC* лежит прямоугольный треугольник *ABC* ($\angle A$ =90°, *AC* =3, *AB* = 4). Высота пирамиды *SA* равна $2\sqrt{3}$. Точка *M* – середина ребра *SB*. Найти угол между прямыми *AB* и *CM*, а также расстояние между этими прямыми.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_3(2\sin x-a)=\log_3\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$

имеет единственное решение, принадлежащее отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

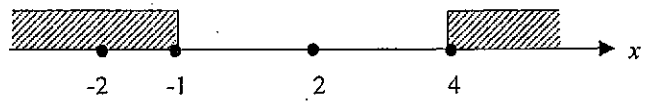
Решение варианта 2

Задача 1.

Произведение двух сомножителей равно нулю только тогда, когда один из них равен нулю. Значит возможен один из двух случаев.

Случай 1.
$$\begin{cases}x^2-4=0\\ x^2-3x-4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right.\\ (x+1)(x-4)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2\end{array}\right.\\ x\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ x=-2$$



Случай 2.
$$x^2-3x-4=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=4\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in\{-2;-1;4\}$.

Задача 2.

$$3^x\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{2x+3}<9\ \Leftrightarrow\ 3^x\cdot\left(3^{-3}\right)^{2x+3}<3^2\ \Leftrightarrow\ 3^{-5x-9}<3^2\ \Leftrightarrow$$

$$-5x-9<2\ \Leftrightarrow\ x>-\frac{11}{5}.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{11}{5};+\infty\right)$.

Задача 3.

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=4\\ x-y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 xy=\log_2 16\\ x>0\\ y>0\\ x=6+y\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}xy=16\\ x>0\\ y>0\\ x=6+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y(6+y)=16\\ y>0\\ x=6+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2+6y-16=0\\ y>0\\ x=6+y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=-8\end{array}\right.\\ y>0\\ x=6+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=8\\ y=2\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases}x=8\\ y=2\end{cases}$

Задача 4.

$7\sin 2x+8\cos^2 x=3 \quad \Leftrightarrow \quad 14\sin x\cos x+8\cos^2 x=3\sin^2 x+3\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 x-14\sin x\cos x-5\cos^2 x=0 \qquad (5)$

1. Если $\cos x=0$, то из уравнения (5) следует, что $\sin x=0$, что противоречит равенству $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.
2. Если $\cos x\neq 0$, то разделив уравнение (5) на $\cos^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\, x$:

$$3\,\mathrm{tg}^2 x-14\,\mathrm{tg}-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x=5\\ \mathrm{tg}x=-\frac{1}{3}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}x=\mathrm{arctg}\ 5+\pi n\\ x=-\mathrm{arctg}\ \frac{1}{3}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in Z.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\mathrm{arctg}5+\pi n\\ x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n\end{array}\right.,\ n\in Z.$

Задача 5.

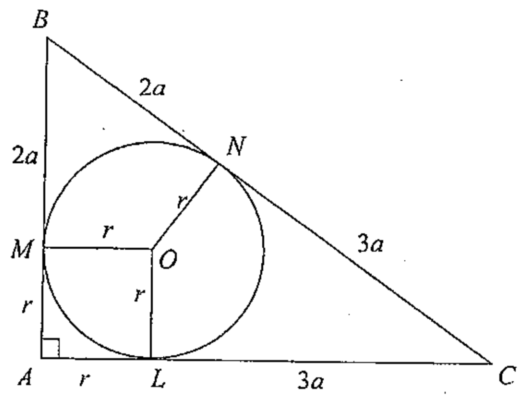


Рис. 5.

Пусть M, N, L – точки касания со сторонами треугольника вписанной окружности с центром в точке O и радиусом r. По условию задачи $\frac{BN}{NC}=\frac{2}{3}$. Обозначим $BN=2a$, тогда $NC=3a$ и $BC=5a$. По свойству касательных, проведенных из одной точки, $BM=BN=2a$; $CL=CN=3a$; $AM=AL=r$. Тогда $AB=2a+r$; $AC=3a+r$.

По условию задачи $AB+AC+BC=24 \Rightarrow 2a+r+3a+r+5a=24$

$\Rightarrow\ 2r+10a=24 \ \Rightarrow\ r+5a=12 \ \Rightarrow\ r=12-5a$

Выразим стороны треугольника через a:

$$\begin{cases}AB=2a+r=2a+12-5a=12-3a\\ FC=3a+r=3a+12-5a=12-2a\\ BC=5a\end{cases}$$

Воспользуемся теоремой Пифагора:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow (5a)^2 = (12-3a)^2 + (12-2a)^2 \Leftrightarrow 12a^2 + 120a - 288 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 10a - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -12 \end{array}\right. \Rightarrow a = 2.$$

Значит $AB = 6$; $AC = 8$; $BC = 10$.

Ответ: 6; 8; 10.

Задача 6.

$$3\sin x\cos x - \sin x = 1 + \cos x \qquad (6)$$

Обозначим $t = \sin x + \cos x$. Тогда

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow$$

$$\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Уравнение (6) переписывается в виде квадратного уравнения относительно t:

$$\frac{3(t^2-1)}{2} = 1 + t \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

1. $t = -1 \Rightarrow \sin x + \cos x = -1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \pi + 2\pi n \end{array}\right., n \in Z.$$

2. $t = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{5}{3} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{3\sqrt{2}} > 1$

$\Rightarrow x \in \varnothing$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \pi + 2\pi n \end{array}\right., n \in Z.$

Задача 7.

$$\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2(x+15) = 4 \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x^2} + \log_2(x+15) = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2|x| + \log_2(x+15) = \log_2 16 \Leftrightarrow \log_2|x|(x+15) = \log_2 16$$

$$\Leftrightarrow |x|(x+15) = 16$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\begin{cases} x \ge 0 \\ x(x+15) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + 15x - 16 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Случай 2. $\begin{cases} x < 0 \\ -x(x+15) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 15x + 16 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-15 + \sqrt{161}}{2} \\ x = \dfrac{-15 - \sqrt{161}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{161}}{2}$$

Ответ: $x \in \left\{1; \frac{-15 \pm \sqrt{161}}{2}\right\}$.

Задача 8.

Проведем $MN \| AB$ (N – середина AS). Тогда $\alpha = \angle NMC$ является искомым углом. Поскольку прямая MN перпендикулярна плоскости SAC, то $\angle MNC = 90°$, т.е. ΔMNC – прямоугольный.

Вычислим MN и NC:

1) $MN = \frac{AB}{2} = 2$ (как средняя линия ΔASB);

2) $NC = \sqrt{AC^2 + AN^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

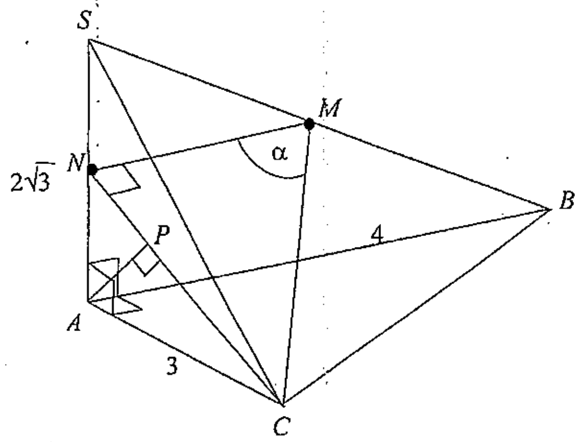


Рис. 6.

Тогда $tg\alpha = \dfrac{NC}{MN} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \alpha = 60°$.

Найдем теперь расстояние между прямыми AB и MC. Для этого спроецируем обе прямые на плоскость SAC. Прямая AB спроецируется в точку A, а прямая MC спроецируется в прямую CN. При этом их общий перпендикуляр параллельно перенесется в отрезок AP ($AP \perp NC$). Тогда искомое расстояние d будет равно длине AP. Значит

$$d = AP = \frac{AN \cdot AC}{NC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2};$$

Ответ: $60°; \dfrac{3}{2}$.

Задача 9.

Уравнение $\log_3(2\sin x - a) = \log_3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin x - a = \sin x + \sqrt{3}\cos x \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \sqrt{3}\cos x = a & (7) \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x > 0 & (8) \end{cases}$$

Преобразуем (7) и (8) к виду

$$\begin{cases} \sin x \cdot \dfrac{1}{2} - \cos x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \sin x \cdot \dfrac{1}{2} + \cos x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{a}{2} \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Сделаем замену $t = x - \dfrac{\pi}{3}$. Поскольку $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $t \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

Система (9) после замены примет вид:

$$\begin{cases} \sin t = \dfrac{a}{2} \\ \sin\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right) > 0 \end{cases}$$

Из условия $\sin\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right) > 0$ (при $t \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{3}\right]$) следует, что $t \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right]$. Итак, нам надо определить, при каких значениях a уравнение $\sin t = \dfrac{a}{2}$ будет иметь единственное решение

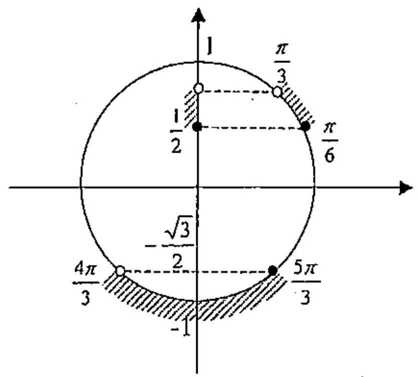


Рис. 7.

$t \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$. Это будет при $\frac{a}{2} \in \{-1\} \cup \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (рис. 7).

Значит $a \in \{-2\} \cup \{-\sqrt{3}\} \cup [1;\sqrt{3})$

Ответ: $a \in \{-2\} \cup \{-\sqrt{3}\} \cup [1;\sqrt{3})$.

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+2\right) \le \log_{\frac{1}{3}}(2x+6).$$

2. Решить уравнение

$$(x+5)(|x|+5)=9.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=5\sin^2 x-3\cos^2 x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{x-y}=0 \\ 2y^2+y=3-2xy \end{cases}$$

5. В равнобедренной трапеции длины оснований равны 6 и 8, а высота равна 7. Найти радиус описанной около трапеции окружности.

6. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\cos 3x}+\sin x=0.$$

7. Решить уравнение

$$2\log_6(x-1)-\log_6(x+4)=1.$$

8. Нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC=10$, $BC=16$). Боковые ребра призмы равны 6. Через сторону BC проведена плоскость, образующая с основанием ABC угол α. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна 75. Найти угол α.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|a|x=\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+6\right),$$

имеет единственное решение.

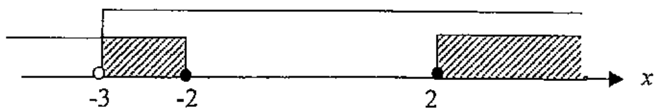
Решение варианта 3

Задача 1.

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+2\right) \le \log_{\frac{1}{3}}(2x+6) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+2x+2 \ge 2x+6 \\ 2x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \ge 0 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-2) \ge 0 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \in (-3;-2] \cup [2;+\infty)$$



Ответ: $x \in (-3;-2] \cup [2;+\infty)$.

Задача 2.

Решение уравнения распадается на два случая.

Случай 1. $\begin{cases} x \ge 0 \\ (x+5)(x+5)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} (x+5)=3 \\ (x+5)=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Случай 2. $\left\{\begin{array}{l} x<0 \\ (x+5)(5-x)=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<0 \\ 25-x^2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<0 \\ x^2=16 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<0 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x=-4$$

Ответ: $x=-4$.

Задача 3.

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, перепишем функцию в виде:

$$y=5\sin^2 x-3(1-\sin^2 x)=8\sin^2 x-3$$

Поскольку $-1\le\sin x\le1 \;\Rightarrow\; 0\le\sin^2 x\le1$. Тогда

$y_{\max}=8\cdot1-3=5$; $\quad y_{\min}=8\cdot0-3=-3$.

Ответ: $y_{\max}=5$; $y_{\min}=-3$.

Задача 4.

Решение распадается на два случая.

Случай 1.

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x-y\ge0 \\ 2y^2+y=3-2xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y\le0 \\ 2y^2+y-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y\le0 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Случай 2. $\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ 2y^2+y=3-2xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ 2x^2+x=3-2x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ 4x^2+x-3=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x_1=-1 \\ y_1=-1 \end{array}\right.;\; \left\{\begin{array}{l} x_2=\dfrac{3}{4} \\ y_2=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.;\; \left\{\begin{array}{l} x_3=0 \\ y_3=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Задача 5.

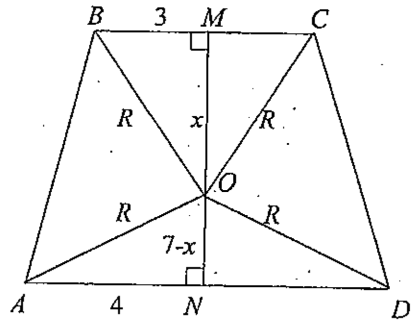


Рис. 8

Дано: $AB=CD$; $BC=6$; $AD=8$; O – центр описанной около трапеции окружности; $OA=OB=OC=OD=R$ – радиус этой окружности. Проведем $OM\perp BC$, $ON\perp AD$. Тогда $BM=MC=3$ (OM – высота и медиана в равнобедренном треугольнике BOC); $AN=ND=4$ (ON – высота и медиана в равнобедренном треугольнике AOD).

По условию задачи $MN=7$. Обозначив: $MO=x$, получим: $ON=7$-x.

Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников BMO и ANO:

$$\begin{cases} x^2+3^2=R^2 \\ (7-x)^2+4^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow\ x^2+9=(7-x)^2+16\ \Rightarrow$$

$$x^2+9=49-14x+x^2+16\quad\Rightarrow\quad 14x=56\quad\Rightarrow\quad x=4$$

Тогда $R^2=4^2+3^2=25\ \Rightarrow\ R=5$.

Ответ: 5.

Задача 6.

$$\sqrt{1+\cos 3x}+\sin x=0\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{1+\cos 3x}=-\sin x\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1+\cos 3x=\sin^2 x \\ -\sin x\ge 0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} \cos^2 x+\cos 3x=0 \\ \sin x\le 0 \end{cases}\qquad (10)$$

Воспользуемся формулой: $\cos 3x=4\cos^3 x-\cos 3x$, которую можно получить так:

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$$

$$(2\cos^2 x-1)\cos x-2\sin x\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2(1-\cos^2 x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos 3x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Система переписывается в виде:

$$\begin{cases} \cos^2 x+4\cos^3 x-3\cos x=0 \\ \sin x\le 0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} \cos x(4\cos^2 x+\cos x-3)=0 \\ \sin x\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \cos x=-1 \\ \cos x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \\ \sin x\le 0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \\ x=\pi+2\pi n \\ x=-\arccos\dfrac{3}{4}+2\pi n \end{cases},\ n\in Z$$

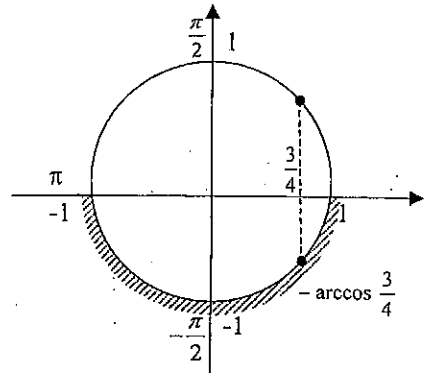


Рис. 9.

Ответ: $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\pi+2\pi n;-\arccos\dfrac{3}{4}+2\pi n\,\middle|\,n\in Z\right\}$.

Задача 7.

$$2\log_6(x-1)+\log_6(x+4)=1\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+4>0 \\ (x-1)^2(x+4)=6 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x>1 \\ x^3+2x^2-7x-2=0 \end{cases}\qquad (11)$$

Попытаемся найти целые корни уравнения (11). Они обязаны делить нацело свободный член. Поэтому целыми корнями уравнения (11) могут быть лишь числа ±1; ±2. Подстановкой убеждаемся, что таковым будет

$x=2$. Поделив многочлен x^3+2x^2-7x-2 на $x-2$, получим, что

$$x^3+2x^2-7x-2=(x-2)(x^2+4x+1).$$

Значит, корнями уравнения (11) будут числа

$$x_1=2;x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}.$$

Из этих корней условию $x>1$ удовлетворяет лишь $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Задача 8.

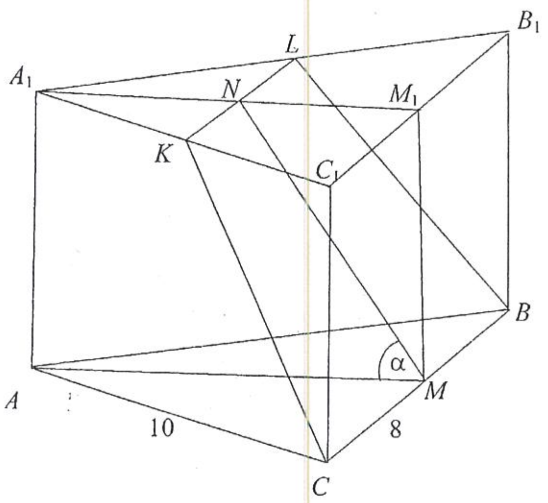


Рис. 10.

Пусть M – середина BC, M_1 – середина B_1C_1. Тогда $AB = AC = 10$; $BC = 16$; $BM = 8$; $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 6$. Значит AA_1M_1M – квадрат со стороной 6. Если $\alpha \le \frac{\pi}{4}$, то площадь сечения

$$S \le \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MA_1 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6\sqrt{2} < 75.$$

Поэтому $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и сечение призмы – трапеция $CKLB$. Выразим площадь этой трапеции как функцию от α:

1) $NM = \frac{M_1M}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin\alpha}$;

2) $NM_1 = 6\operatorname{ctg}\alpha; A_1N = A_1M_1 - NM_1 = 6 - 6\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\Delta A_1KL \sim \Delta A_1C_1B_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{KL}{B_1C_1} = \frac{A_1N}{A_1M_1} \quad \Rightarrow$

$$KL = \frac{16(6 - 6\operatorname{ctg}\alpha)}{6} = 16(1 - \operatorname{ctg}\alpha);$$

4) $S_{BCKL} = \frac{(BC + KL)}{2} \cdot MN = \frac{16 + 16(1 - \operatorname{ctg}\alpha)}{6} \cdot \frac{6}{\sin\alpha}$.

По условию задачи $S_{BCKL} = 75$, значит

$$\frac{16 + 16(1 - \operatorname{ctg}\alpha)}{6} \cdot \frac{6}{\sin\alpha} = 75 \Leftrightarrow 25\sin^2\alpha + 16\cos\alpha - 32\sin\alpha = 0 \qquad (12)$$

Сделаем замену $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, тогда

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

и уравнение (12) примет вид:

$$f(t) = 4t^4 + 16t^3 - 25t^2 + 16t - 4 = 0 \qquad (13)$$

Подстановкой убеждаемся, что $t = \frac{1}{2}$ является корнем уравнения (13). Заметим, что при $t > 0$ производная

$$f'(t) = 16t^3 + 48t^2 - 50t + 16 > 48t^2 - 50t + 16 > 0$$

$$\left(\text{т.к. } \frac{D}{4} = 25^2 - 48 \cdot 16 = -143 < 0\right).$$

Поэтому, при $t > 0$ функция $f(t)$ возрастает и других положительных корней, кроме $t = \frac{1}{2}$, уравнение (13) не имеет. Если $t = \frac{1}{2}$, то $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \alpha > \frac{\pi}{4}$.

Итак $tg\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ (или $\alpha = 2\arcsin\frac{4}{5}$)

Ответ: $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Задача 9.

Поделив обе части уравнения на x^2+1, перепишем его в виде:

$$\frac{|a|}{x+\frac{1}{x}}=(x-1)^2+5, \qquad (14)$$

Ясно, что $x>0$. Из неравенства

$a+b\ge 2\sqrt{ab} \quad (a,b\ge 0)$

следует, что $\quad x+\frac{1}{x}\ge 2 \quad$ (равенство возможно лишь при $x=1$).

Поэтому левая часть равенства (14) всегда не превосходит $\frac{|a|}{2}$. Правая часть равенства (14) всегда не меньше, чем 5 (равенство возможно лишь при $x=1$) Отсюда следует, что уравнение (14) будет иметь единственное решение (которое будет $x=1$) только при $\frac{|a|}{2}=5 \iff |a|=10$.

Замечание: графическая интерпретация приведенных рассуждений отражена на рис. 11.

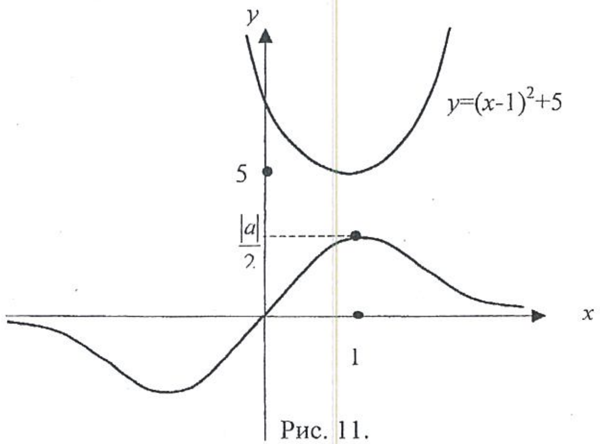


Рис. 11.

Ответ: $a=\pm 10$.

Вариант 4

1. Решить неравенство

$$\frac{2}{x+3}\ge\frac{3}{x-3}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^3-y^3=117\\ x-y=3\end{cases}.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{9}}(2x-5)+\log_{\frac{1}{9}}(x-4)=-\frac{3}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$6\cos 2x-7\cos x-6=0.$$

5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$). Точка O – центр вписанной в треугольник окружности, делит высоту BD в отношении $BO:OD=5:3$. Найти AB, если $BD=8$.

6. Решить неравенство

$$\log_{5x+2}3x^2\le 1.$$

7. Найти целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi(4x+1)}{x^2+x+2}\right)=0.$$

8. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3. Боковые ребра пирамиды

равны 2. Точка M – середина BC. Найти радиус сферы, проходящей через S, B, M, A.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_x(ax+12)=-2$$

имеет единственное решение.

Ответы:

1. $x\in(-\infty;-9]\cup(-1;3)$;
2. $\begin{cases}x_1=-2\\ y_1=-5\end{cases}$; $\begin{cases}x_2=5\\ y_2=2\end{cases}$;
3. $x=7$;
4. $x=\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi n, n\in Z$;
5. $AB=10$;
6. $x\in\left(-\frac{2}{5};-\frac{1}{3}\right]\cup\left(-\frac{1}{5};0\right)\cup(0;2]$;
7. $x\in\{-1;0;7\}$;
8. $\frac{\sqrt{37}}{4}$;
9. $a\in\{-16\}\cup\{-11\}\cup[0;+\infty)$.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$(x^2-9)\sqrt{x^2-5x-6}=0.$$

2. Решить неравенство

$$8^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1}>32.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=3\\ y-2x=3\end{cases}.$$

4. Решить уравнение

$$6\sin^2 x=3+4\sin 2x.$$

5. В прямоугольный треугольник, периметр которого 36, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит один из катетов в отношении 1 : 3, считая от вершины прямого угла. Найти стороны треугольника.

6. Решить уравнение

$$8\sin x\cos x+3\cos x=3\sin x-3.$$

7. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\log_6 x^2+\log_6(x+16)=2.$$

8. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle A=90°$, $AC=4$, $AB=12$). Высота пирамиды SA равна $4\sqrt{5}$. Точка M – середина ребра SB. Найти угол

между прямыми AB и CM, а также расстояние между этими прямыми.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_5(6\sin x - a) = \log_5(3\sin x + 4\cos x)$$

имеет единственное решение, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответы:

1. $x \in \{-3; -1; 6\}$;
2. $x \in (-\infty; -7)$;
3. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$;
4. $\left[\begin{array}{l} x = arctg3 + \pi n \\ x = -arctg\frac{1}{3} + \pi n \end{array}\right., n \in Z$;
5. 9; 12; 15;
6. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \pi + 2\pi n \end{array}\right., n \in Z$;
7. $x \in \{2; -8 \pm \sqrt{28}\}$;
8. $45°$; $\frac{4\sqrt{5}}{3}$;
9. $a \in \{-5\} \cup \left[-\frac{24}{5}; -4\right] \cup \left[3; \frac{24}{5}\right)$.

Вариант 6

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 7) \le \log_{\frac{1}{3}}(4x + 8).$$

2. Решить уравнение

$$(x+2)(|x| + 2) = 1.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 4\cos^2 x - 3\sin^2 x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y\sqrt{x+y} = 0 \\ 3x^2 - x = 4 + 2xy \end{cases}.$$

5. В равнобедренной трапеции длины оснований равны 10 и 24, а высота равна 17. Найти радиус описанной около трапеции окружности.

6. Решить уравнение

$$\sqrt{4 + \sin 3x} + 2\cos x = 0.$$

7. Решить уравнение

$$2\log_4(x-1) + \log_4(x-2) = 1.$$

8. Нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной 3. Боковые ребра призмы равны 3. Через сторону AC проведена плоскость, образующая с основанием ABC угол α. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна $4\sqrt{3}$. Найти угол α.

9. Найти все значения a, при которых уравнение

$$2^a \cdot x = \left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 4x + 8\right),$$

имеет единственное решение.

Ответы:

1. $x \in (-2;-1] \cup [1;+\infty)$;
2. $x = -\sqrt{3}$;
3. $y_{\max} = 4; y_{\min} = -3$;
4. $\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3} \\ y_1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}; \begin{cases} x_3 = -\dfrac{4}{5} \\ y_3 = \dfrac{4}{5} \end{cases}$;
5. 13;
6. $x \in \left\{\pi + 2\pi n; -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in Z\right\}$;
7. $x = 3$;
8. $\alpha = 60°$;
9. $a = 4$.