ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 60 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
2015

© 2015 г. КАШТАНОВ В. А.*

О СТРУКТУРЕ ФУНКЦИОНАЛА НАКОПЛЕНИЯ, ПОСТРОЕННОГО НА ТРАЕКТОРИЯХ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ[1)]

В работе исследуется структура функционала накопления, построенного полумарковского процесса с конечным множеством состояний. При $t \to \infty$ этот функционал линейно растет и коэффициент есть дробно-линейный функционал относительно вероятностных мер, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию управления.

Ключевые слова и фразы: управляемый полумарковский процесс, стратегия управления, рандомизация, детерминированная стратегия, дробно-линейный функционал.

В настоящей работе объектом исследования является однородный управляемый полумарковский процесс $X(t)$, для построения которого вводится процесс марковского восстановления [4], [8], [9], [15]

$$\begin{gathered}(\xi_n, \theta_n, u_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \xi_n \in E = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \theta_n \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty), \quad u_n \in U_n,\end{gathered} \tag{1}$$

где $E = \{0, 1, \dots, N, \dots\}$ — конечное ($N < \infty$) или счетное множество состояний первой (ведущей) компоненты, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ — множество неотрицательных действительных чисел (время), U_i, $i \in E$, — пространства управлений с σ-алгебрами $\mathscr{B}_i$ подмножеств множеств U_i.

Процесс марковского восстановления (1) задается переходными вероятностями, зависящими только от первой (ведущей) компоненты:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j,\ \theta_{n+1} < t,\ u_{n+1} \in B \,|\, \xi_n = i,\ \theta_n = \tau,\ u_n = u\} \\ &\quad = \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j,\ \theta_{n+1} < t,\ u_{n+1} \in B \,|\, \xi_n = i\} = \widetilde{Q}_{ij}(t, B), \qquad i \in E,\end{aligned} \tag{2}$$

Семейство функций (2) порождает на измеримых пространствах $(U_i, B\mathscr{B}_i)$ семейства вероятностных мер

$$\vec{G} = (G_0, G_1, \dots, G_N, \dots), \tag{3}$$

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; e-mail: vakashtanov@hse.ru

1)

где

$$G_i(B) = \mathbf{P}\{u_{n+1} \in B \,|\, \xi_n = i\} = \sum_{j\in E} \widetilde{Q}_{ij}(\infty, B), \qquad B \in \mathscr{B}_i, \quad i \in E.$$

Так как справедливо неравенство $G_i(B) \geqslant \widetilde{Q}_{ij}(t, B)$, то на основании теоремы Радона–Никодима получаем, что существует полумарковское ядро управляемого процесса (матрица функций)

$$Q_{ij}(t, u) = \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j,\ \theta_{n+1} < t \,|\, \xi_n = i,\ u_{n+1} = u\} \tag{4}$$

с элементами, удовлетворяющими равенству

$$\tilde{Q}_{ij}(t, B) = \int_B Q_{ij}(t, u)\, G_i(du). \tag{5}$$

Из равенства (5) получаем классическое полумарковское ядро (см. [8])

$$Q_{ij}(t) = \widetilde{Q}(t, U_i) = \int_{U_i} Q_{ij}(\infty, u)\, G_i(du) = \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j,\ \theta_{n+1} < t \,|\, \xi_n = i\} \tag{6}$$

и переходные вероятности вложенной цепи Маркова

$$p_{ij} = p_{ij}(G_i) = Q_{ij}(\infty) = \int_{U_i} Q_{ij}(\infty, u)\, G_i(du) = \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\}. \tag{7}$$

Управляемый полумарковский процесс, определяемый равенствами

$$\begin{gathered} X(t) = (\xi(t), u(t)), \qquad \xi(t) \in E, \quad u(t) \in U_i, \quad i \in E, \\ \xi(t) = \xi_{\nu(t)}, \quad u(t) = u_{\nu(t)+1}, \\ \nu(t) = \sup\Big\{n\colon \tau_n = \sum_{k\leqslant n} \theta_k \leqslant t\Big\}, \qquad \theta_0 = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

задается полумарковским ядром (4), набором вероятностных мер (3) и начальным распределением вероятностей состояний ведущей компоненты $p_i = \mathbf{P}\{\xi(0) = i\}$. Вероятностные меры $\vec{G}$ определяют марковскую однородную рандомизированную стратегию управления.

Далее сформулируем задачу управления. Объектом управления является процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$, стратегия управления задается мерами (3). Обозначим через Ω множество допустимых стратегий управления. Остается на ступенчатых траекториях объекта управления задать целевой функционал.

Определим функционал накопления [2], [3], [7], [11]. Вероятностные характеристики процесса $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$ не зависят от номера интервала, на котором полумарковский процесс принимает постоянное значение. Поэтому при построении функционала накопления определим его приращение на каждом интервале непрерывности, когда компоненты $\xi(t)$ и $u(t)$ не меняют своих значений, а затем при нескольких переходах значения функционала на каждом интервале просуммируем и получим суммарный эффект.

Функционал накопления $S_i(t)$ определим как условное математическое ожидание накопленного эффекта за период $[0,t)$ при условии, что процесс стартует из состояния i, $\xi(0)=i\in E$.

Пусть $\xi(0)=i$, $u(0)=u$, $\theta=t$ (θ — время непрерывного пребывания процесса в состоянии i: $\xi(x)=i$, $0\leqslant x<\theta=t$) и $\xi(t)=j$ — следующее значение первой компоненты. Зададим функции $R_{ij}(y,t,u)$ — математическое ожидание накопленного эффекта за время y при условии, что $\xi(0)=i$, $u(0)=u$, $\theta=t$, $\xi(t)=j$. Функции $R_{ij}(y,t,u)$ определены в области $0\leqslant y\leqslant t<\infty$, $i,j\in E$, $u\in U_i$. Заметим, что в модели функции $R_{ij}(y,t,u)$ определяются как условные математические ожидания накопленного эффекта, поскольку в конкретных задачах исследуемый управляемый полумарковский процесс часто рассматривается как процесс, вложенный в более тонкий случайный процесс, который меняет свои состояния между марковскими моментами.

Далее обозначим $R_{ij}(t,u)=R_{ij}(t,t,u)$. Кроме этого, будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \mathbf{P}\{\theta<t\,|\,\xi(0)=i\}=\sum_{j\in E}Q_{ij}(t),\\ F_{ij}(t) &= \mathbf{P}\{\theta<t\,|\,\xi(0)=i,\ \xi(\theta)=j\}=\frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}},\qquad p_{ij}\neq 0 \end{aligned}\tag{9}$$

(при $p_{ij}=0$ функцию $F_{ij}(t)$ можно доопределить произвольным образом),

$$\begin{aligned} r_{ij}(x) &= \int_0^x\int_{U_i}R_{ij}(z,u)\,dF_{ij}(z,u)\,G_i(du)\\ &\quad+\int_x^\infty\int_{U_i}R_{ij}(x,z,u)\,dF_{ij}(z,u)\,G_i(du), \end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \sum_{j\in E}p_{ij}r_{ij}(x)=\sum_{j\in E}\Big\{\int_0^x\int_{U_i}R_{ij}(z,u)\,dQ_{ij}(z,u)\,G_i(du)\\ &\quad+\int_x^\infty\int_{U_i}R_{ij}(x,z,u)\,dQ_{ij}(z)\,G_i(du)\Big\}, \end{aligned}\tag{11}$$

$$s_i=\lim_{x\to\infty}s_i(x)=\sum_{j\in E}\int_0^\infty\int_{U_i}R_{ij}(z,u)\,dQ_{ij}(z,u)\,G_i(du);\tag{12}$$

$$m_i=\sum_{j\in E}\int_0^\infty\int_{U_i}z\,dQ_{ij}(z,u)\,G_i(du)=\sum_{j\in E}\int_0^\infty z\,dQ_{ij}(z)$$

$$= \sum_{j\in E} m_{ij} = \int_0^\infty z\,dF_i(z) = \int_0^\infty \Big\{1 - \sum_{j\in E} Q_{ij}(z)\Big\}\,dz, \qquad (13)$$

$$m_{ij} = \int_0^\infty z\,dQ_{ij}(z).$$

В дальнейшем будем предполагать, что введенные выше функции и пределы существуют при заданных исходных характеристиках.

Сначала докажем ряд вспомогательных утверждений о свойствах функции восстановления вложенных в процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$ процессов восстановления.

Обозначим $\tau^{(j)}$, $j \in E$, момент первого попадания процесса $\xi(t)$ в состояние j и введем величины

$$G_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\tau^{(j)} < t \,|\, \xi(0) = i\}, \qquad i, j \in E,$$
$$\overline{G}_{ij}(t) = 1 - G_{ij}(t), \qquad i, j \in E.$$

Если $i = j$, то последовательность интервалов между соседними моментами попадания процесса $\xi(t)$ в состояние $j \in E$ при условии $\xi(0) = i$, $i \in E$, определяет простой процесс восстановления (по терминологии [12] процесс восстановления — это моменты попадания процесса $\xi(t)$ в состояние j); если $i \neq j$, то последовательность этих интервалов определяет процесс восстановления с запаздыванием. Для этих процессов восстановления обозначим через $H_{ij}(t)$, $i, j \in E$, функции восстановления.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если пространство E счетно, а процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$ регулярен (см. [11]) при любой допустимой стратегии $\vec{G} \in \Omega$, то при $t > 0$ справедливо равенство*

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j\in E} \int_0^t s_j(t-x)\,dH_{ij}(x), \qquad i \in E.$$

Доказательство. По формуле полного математического ожидания выпишем систему интегральных уравнений для функций $S_i(t)$, $i \in E$ (см. [9]):

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j\in E} \int_0^t S_j(t-x)\,dQ_{ij}(x). \qquad (14)$$

Введем следующие обозначения: $\vec{S}(t)$ — вектор-столбец с компонентами $S_i(t)$, $i \in E$; $\vec{s}(t)$ — вектор-столбец с компонентами $s_i(t)$, $i \in E$; $Q(t)$ — полумарковская матрица (ядро) с элементами $Q_{ij}(t)$, $i, j \in E$. Кроме этого, в дальнейшем для полумарковского ядра символом * будет обозначаться его преобразование Лапласа–Стилтьеса с действительным аргументом p:

$$Q^*_{ij}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\, dQ_{ij}(x), \quad i,j \in E, \quad p>0, \qquad 1 \geqslant Q^*_{ij}(p) \geqslant 0;$$

то же смысл этот символ будет иметь и для других функций, матриц и векторов.

Заметим, что если множество E счетно, то мы имеем дело с векторами и матрицами, имеющими счетное множество компонент. Поэтому корректно должна быть определена операция умножения. В рассматриваемом случае компоненты векторов и матриц неотрицательны, операция умножения определена корректно и обладает свойством ассоциативности [6].

Из системы интегральных уравнений (14) получаем для преобразований Лапласа–Стилтьеса следующую систему алгебраических уравнений:

$$S^*_i(p) = s^*_i(p) + \sum_{j\in E} S^*_j(p) Q^*_{ij}(p), \qquad i \in E \tag{14}$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$\vec{S}^*(p) = \vec{s}^*(p) + Q^*(p)\vec{S}^*(p).$$

Обозначив через I единичную матрицу, равенство (15) можно переписать следующим образом:

$$(I - Q^*(p))\vec{S}^*(p) = \vec{s}^*(p).(16)$$

Далее выпишем зависимости характеристик вложенных процессов восстановления от исходных характеристик управляемого полумарковского процесса.

По формуле полной вероятности получаем систему интегральных уравнений для функций распределения $G_{ij}(t)$, $i,j \in E$:

$$\begin{aligned} G_{ij}(t) \;&=\; Q_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} \int_0^t G_{kj}(t-x)\, dQ_{ik}(x), \qquad t>0, \quad i,j\in E,\\ \overline{G}_{ij}(t) \;&=\; 1 - \sum_{j\in E} Q_{ij}(t) + \sum_{k\neq j}\int_0^t \overline{G}_{kj}(t-x)\, dQ_{ik}(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Переходя к преобразованиям Лапласа–Стилтьеса, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} G^*_{ij}(p) \;&=\; Q^*_{ij}(p) + \sum_{k\neq j} Q^*_{ik}(p) G^*_{kj}(p)\\ &=\; Q^*_{ij}(p)[1 - G^*_{jj}(p)] + \sum_{k\in E} Q^*_{ik}(p) G^*_{kj}(p), \qquad i,j\in E. \end{aligned} \tag{16}$$

Для регулярного процесса имеем $G^*_{jj}(p) < 1$, $j \in E$. Поэтому, если использовать соотношение [7], [12]

$$H^*_{ij}(p) = \frac{G^*_{ij}(p)}{1 - G^*_{jj}(p)},$$

то нетрудно заметить, что последняя система (18) равносильна следующей системе алгебраических уравнений для преобразований Лапласа–Стилтьеса функций восстановления $H^*_{ij}(p)$ введенных выше процессов восстановления:

$$H^*_{ij}(p) = Q^*_{ij}(p) + \sum_{k\in E} Q^*_{ik}(p)H^*_{kj}(p), \qquad i,j \in E.$$

В матричном виде получаем соотношение $(I - Q^*(p))H^*(p) = Q^*(p)$ или

$$(I - Q^*(p))(I + H^*(p)) = I, \ (19)$$

где $H^*(p)$ обозначает матрицу с элементами $H^*_{ij}(p)$, $i,j \in E$.

Для регулярного процесса обратная матрица $(I - Q_{ij}(p))^{-1}$ существует [11] и справедливо равенство $(I - Q_{ij}(p))^{-1} = I + H^*(p)$.

Из равенств (16) и (19) следует

$$S^*(p) = s^*(p) + s^*(p)H^*(p), \quad S^*_i(p) = s^*_i(p) + \sum_{j\in E} s^*_j(p)H^*_{ij}(p),$$

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j\in E}\int_0^t s_j(t-x)\,dH_{ij}(x). \tag{17}$$

Так как для регулярного процесса процессы восстановления определены для любого $t > 0$ и при любых $i,j \in E$, то равенство (20) доказывает утверждение леммы.

Полученные соотношения обобщают результат, приведенный в [12] для решения интегрального уравнения восстановления.

Далее ограничимся рассмотрением регулярного полумарковского процесса с конечным множеством состояний E. Введем следующие обозначения:

– E_0 — подмножество несущественных состояний;

– E_k, $k = 1,2,\ldots,K$, $K < \infty$, — непересекающиеся замкнутые подмножества положительных возвратных сообщающихся состояний.

Лемма 2. *Если полумарковский процесс регулярен и множество состояний E конечно, то справедливы равенства*:

1) *при* $i \in E_k$, $k = 1,2,\ldots,K$,

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j\in E_k}\int_0^t s_j(t-x)\,dH_{ij}(x); \tag{18}$$

2) *при* $i \in E_0$

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in E_k} \int_0^t s_j(t-x)\, dH_{ij}(x) + \sum_{j \in E_0} \int_0^t s_j(t-x)\, dH_{ij}(x). \quad (19)$$

При этом

$$\lim_{t\to\infty} H_{ij}(t) < \infty, \quad \text{если } i,j \in E_0,$$
$$\lim_{t\to\infty} H_{ij}(t) = \infty, \quad \text{если } i,j \in E_k,\ k = 1,2,\ldots,K,$$

а если $i \in E_0$, $j \in E_k$, $k = 1,2,\ldots,K$, *то предел* $\lim_{t\to\infty} H_{ij}(t)$ *равен либо нулю, либо бесконечности.*

Доказательство. Известно [13], что матрица переходных вероятностей (7) имеет клеточную (блочную) структуру. Тогда из (6) и (7) следует, что аналогичную структуру имеет полумарковское ядро $Q_{ij}(t)$, т.е.

$$Q_{ij}(t) \geqslant 0, \quad i,j \in E_k,$$
$$Q_{ij}(t) = 0, \quad i \in E_k, \quad j \notin E_k, \qquad k = 1,2,\ldots,K,$$
$$Q_{ij} \geqslant 0, \quad i \in E_0, \quad j \in E.$$

Из (17) следует, что

$$G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{s\neq j, s\in E_k} \int_0^t G_{sj}(t-x)\, dQ_{is}(x), \qquad t > 0, \quad i,j \in E_k, \quad (23a)$$

$$\overline{G}_{ij}(t) = 1 - \sum_{s\in E_k} Q_{is}(t) + \sum_{s\neq j, s\in E_k} \int_0^t \overline{G}_{kj}(t-x)\, dQ_{ik}(x), \qquad t > 0, \quad i,j \in E_k, \quad (23b)$$

так как $G_{ij}(t) = 0$, $t > 0$, $i \in E_k$, $j \notin E_k$, $k = 1,2,\ldots,K$.

Для функций восстановления получаем равенства

$$H_{ij}(t) = 0, \qquad t > 0, \quad i \in E_k, \quad j \notin E_k, \quad k = 1,2,\ldots,K. \quad (24)$$

Из (20) и (24) получаем (21). Равенство (22) есть равенство (20), записанное в новых обозначениях для конечного множества состояний E.

Исследуем поведение функций восстановления $H_{ij}(t)$ при $i,j \in E$.

Если $i,j \in E_k$, $k = 1,2,\ldots,K$, то из системы (23a) для преобразований Лапласа–Стилтьеса получаем

$$G^*_{ij}(p) = Q^*_{ij}(p) + \sum_{s\neq j,\ s\in E_k} Q^*_{is}(p) G^*_{sj}(p), \qquad i,j \in E_k.$$

Следовательно, переходя к пределу при $p \to 0$, получаем алгебраическую систему уравнений

$$G^*_{ij}(0) = Q^*_{ij}(0) + \sum_{s \neq j, s \in E_k} Q^*_{is}(0) G^*_{sj}(0), \qquad i, j \in E_k. \tag{25}$$

Так как $\sum_{s \in E_k} p_{is} = \sum_{s \in E_k} Q^*_{is}(0) = 1$, то единственное решение системы 25) определяется равенством

$$G^*_{ij}(0) = G_{ij}(\infty) = 1, \qquad i, j \in E_k.$$

Единственность решения доказывается стандартным образом. Если существует другое решение $\widetilde{G}^*_{ij}(0)$ системы (25), то разность $\alpha_{ij} = \widetilde{G}^*_{ij}(0) - G^*_{ij}(0)$ удовлетворяет однородной системе линейных уравнений

$$\alpha_{ij} = \sum_{s \neq j, s \in E_k} p_{is} \alpha_{sj}, \qquad i, j \in E_k.$$

Определитель этой системы отличен от нуля [5], поэтому для решения справедливо равенство $\alpha_{ij} = 0$.

Таким образом, распределения $G_{ij}(t)$, $i, j \in E_k$, являются собственными.

Тогда процессы восстановления с запаздыванием, определяемые функциями распределения $(G_{ij}(t), G_{jj}(t))$, $i, j \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, K$, являются устойчивыми (возвратными) процессами восстановления [12], для которых

$$\lim_{t \to \infty} H_{ij}(t) = \infty.$$

При $i, j \in E_0$ из (17) с учетом блочной структуры полумарковского ядра $Q_{ij}(t)$ получим

$$G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{s \neq j,\ s \in E_0} \int_0^t G_{sj}(t-x)\, dQ_{is}(x), \qquad t > 0, \quad i, j \in E_0, \tag{26}$$

или

$$G^*_{ij}(p) = Q^*_{ij}(p) + \sum_{s \neq j,\ s \in E_0} Q^*_{is}(p) G^*_{sj}(p), \qquad i, j \in E_0.$$

Переходя к пределу при $p \to 0$, получаем алгебраическую систему уравнений

$$G^*_{ij}(0) = Q^*_{ij}(0) + \sum_{s \neq j,\ s \in E_0} Q^*_{is}(0) G^*_{sj}(0), \qquad i, j \in E_0. \tag{27}$$

Определитель системы (27) отличен от нуля [5], поэтому она имеет единственное решение. Так как $\sum_{s \in E_0} p_{is} = \sum_{s \in E_0} Q^*_{is}(0) < 1$, то для этого решения справедливы соотношения

$$G^*_{ij}(0) = G_{ij}(\infty) \neq 1, \qquad i, j \in E_0.$$

Таким образом, распределения $G_{ij}(t),\ i,j \in E_0$, — несобственные.

Тогда процессы восстановления с запаздыванием, определяемые функциями распределения $(G_{ij}(t), G_{jj}(t)),\ i,j \in E_0$, являются обрывающимися процессами восстановления [12], для которых

$$\lim_{t\to\infty} H_{ij}(t) < \infty.$$

Исследуем функции восстановления $H_{ij}(t)$ при $i \in E_0,\ j \in E_k,\ k = 1,2,\ldots,K$. В этом случае для распределений $G_{ij}(t)$ получаем из (17) систему интегральных уравнений

$$G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{s\neq j,\ s\in E_k} \int_0^t G_{sj}(t-x)\, dQ_{is}(x) + \sum_{s\in E_0} \int_0^t G_{sj}(t-x)\, dQ_{is}(x), \tag{28}$$

поскольку остальные элементы матрицы $G_{ij}(t)$ тождественно равны нулю. В самом деле, при $j \in E_k,\ s \in E_m,\ k \neq m,\ k = 1,2,\ldots,K$, имеем систему уравнений

$$G_{sj}(t) = Q_{sj}(t) + \sum_{l\in E_k} \int_0^t G_{lj}(t-x)\, dQ_{sl}(x), \qquad t > 0,$$

в которой все функции $Q_{sj}(t)$ равны нулю. Следовательно, справедливы равенства

$$G_{sj}(t) = 0, \qquad j \in E_k, \quad s \in E_m, \quad k \neq m.$$

Обозначим $\widetilde{H}^*_k(p),\ \widetilde{Q}^*_0(p),\ H^*_k(p),\ Q^*_k(p)$ — матрицы с элементами соответственно

$$\begin{aligned}
H^*_{ij}(p) &= \int_0^\infty e^{-px}\, dH_{ij}(x), && i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,K,\\
Q^*_{ij}(p) &= \int_0^\infty e^{-px}\, dQ_{ij}(x), && i,j \in E_0,\\
H^*_{ij}(p) &= \int_0^\infty e^{-px}\, dH_{ij}(x), && i,j \in E_k, \quad k = 1,2,\ldots,K,\\
Q^*_{ij}(p) &= \int_0^\infty e^{-px}\, dQ_{ij}(x), && i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad k = 1,2,\ldots,K.
\end{aligned}$$

В этих обозначениях из уравнений (28) получаем для преобразований Лапласа–Стилтьеса уравнения

$$\widetilde{H}^*_k(p) = (I - \widetilde{Q}^*_0(p))^{-1} Q^*_k(p) + (I - \widetilde{Q}^*_0(p))^{-1} Q^*_k(p) H^*_k(p). \tag{29}$$

Заметим, что обратная матрица $(I - \widetilde{Q}^*_0(p))^{-1}$ существует, поскольку исследуется регулярный процесс, а обратная матрица есть фундаментальная матрица поглощающей цепи Маркова [5].

Если из множества невозвратных состояний E_0 нельзя перейти в подмножество E_k, т.е. $Q_{ij}(t) \leqslant p_{ij} = 0$, $i \in E_0$, $j \in E_k$, то из (29) следует, что

$$Q_k^*(p) = 0, \qquad \widetilde{H}_k^*(p) = 0, \qquad H_{ij}(t) \equiv 0, \quad i \in E_0, \quad j \in E_k.$$

Если существуют $i \in E_0$, $j \in E_k$, для которых $Q_{ij}(t) > 0$, то из (29) с учетом ранее доказанного утверждения $\lim_{t\to\infty} H_{nm}(t) = \infty$, $n, m \in E_k$, следует равенство

$$\lim_{t\to\infty} H_{ij}(t) = \infty.$$

Этим завершается доказательство леммы 2.

Пусть $M_{ij} = \int_0^\infty x\,dG_{ij}(x) = \int_0^\infty [1 - G_{ij}(x)]\,dx$ — математическое ожидание момента первого достижения ведущей компонентой состояния $j \in E$ при условии, что в нулевой момент времени она принимает значение $i \in E$.

Лемма 3. *Если математические ожидания m_i, $i \in E$, конечны, то конечны и математические ожидания M_{ij}, $i, j \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы справедливо, поскольку M_{ij} удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$M_{ij} = m_i + \sum_{s\neq j, s\in E_k} p_{is} M_{sj}, \tag{30}$$

определитель которой отличен от нуля.

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема. *Если при любой допустимой стратегии $\vec{G} \in \Omega$ процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$, принимающий значения из конечного пространства E, регулярен, выполняются условия*

$$m_i = \int_0^\infty \overline{F}_i(x)\,dx < \infty, \quad int_0^\infty x\overline{F}_i(x)\,dx < \infty,$$
$$\int_0^\infty \int_{U_i} \int_0^z x\,d_x R_{ij}(x, z, u)\,dQ_{ij}(z, u)\,G_i(du) < \infty, \qquad i, j \in E,$$

и для каждого $k = 1, 2, \ldots, K$ существует $i \in E_k$ такое, что $s_i \neq 0$, то справедливо асимптотическое равенство

$$S_i(t) = S_i t + O(1), \qquad t \to \infty, \tag{31}$$

и коэффициент S_i является дробно-линейным функционалом относительно мер, определяющих допустимые стратегии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что при выполнении условий теоремы выполняются условия доказанных выше лемм.

Далее для построения асимптотического разложения (31) воспользуемся равенствами (21), (22) и тауберовой теоремой [12].

Разложим функцию

$$H_{ij}^*(p) = \frac{G_{ij}^*(p)}{1 - G_{jj}^*(p)}, \qquad i, j \in E_k,$$

в ряд по степеням p в окрестности нуля.

Для функции $G_{ij}^*(p)$ имеем разложение при

$$G_{ij}^*(p) = \int_0^\infty e^{-px}\, dG_{ij}(x) = 1 - pM_{ij} + O(p^2), \qquad p \to 0,$$

если существуют математические ожидания M_{ij},$i, j \in E_k$, и вторые моменты

$$\int_0^\infty x^2\, dG_{ij}(x) = \int_0^\infty x\overline{G}_{ij}(x)\, dx < \infty, \qquad i, j \in E_k. \tag{32}$$

Математические ожидания M_{ij} существуют в силу леммы 3 и условий теоремы. Исследуем вторые моменты. Умножив равенства (23b) на независимую переменную t и проинтегрировав в пределах от нуля до бесконечности, получаем при $i, j \in E_k$

$$\int_0^\infty t\overline{G}_{ij}(t)\, dt = \int_0^\infty t\overline{F}_i(t)\, dt + \sum_{s \neq j,\ s \in E_k} m_{is} M_{sj} + \sum_{s \neq j,\ s \in E_k} p_{is} \int_0^\infty t\overline{G}_{sj}(t)\, dt, \tag{33}$$

где использованы ранее принятые обозначения (7), (13) и обозначения

$$M_{ij} = \int_0^\infty x\, dG_{ij}(x) = \int_0^\infty [1 - G_{ij}(x)]\, dx.$$

По условиям теоремы свободные члены системы (33) ограничены, а так как определитель матрицы этой системы отличен от нуля, получаем, что существует ограниченное решение $\int_0^\infty x\overline{G}_{ij}(x)\, dx < \infty$. Таким образом, доказана справедливость разложения (31).

Для преобразования Лапласа–Стилтьеса функции восстановления получаем разложение при $p \to 0$:

$$H_{ij}^*(p) = \frac{G_{ij}^*(p)}{1 - G_{jj}^*(p)} = \frac{1 - pM_{ij} + O(p^2)}{pM_{jj} + O(p^2)} = \frac{1}{pM_{jj}} + O(1), \qquad i, j \in E_k. \tag{34}$$

Для функции $s_i^*(p)$ при выполнении условий теоремы имеем разложение

$$s_i^*(p) = \int_0^\infty e^{-px}\, ds_i(x) = s_i + O(p), \qquad p \to 0.$$

Следовательно, для произведения справедливы разложение

$$H_{ij}^*(p) s_j^*(p) = \frac{s_j}{pM_{jj}} + O(1), \qquad i, j \in E_k,$$

и равенство

$$\lim_{p\to 0}\frac{ps_j^*(p)H_{ij}^*(p)M_{jj}}{s_j}=1.$$

Если воспользоваться тауберовой теоремой [12], то получаем

$$\int_0^t s_j(t-x)\,dH_{ij}(x)=\frac{s_jt}{M_{jj}}+O(1),\qquad t\to\infty. \tag{35}$$

Тогда из равенства (21) при $i\in E_k$ следует, что

$$S_i(t)=\sum_{j\in E_k}\frac{s_jt}{M_{jj}}+O(1),\qquad i\in E_k,\quad k=1,2,\ldots,K. \tag{36}$$

Предположим теперь, что процесс стартует из невозвратного состояния $i\in E_0$. Сначала построим разложение при $i\in E_0$, $j\in E_k$, $k=1,2,\ldots,K$.

Проанализируем двойную сумму в правой части равенства (22). Обратная матрица $(I-\widetilde{Q}_0^*(p))^{-1}$ существует и для нее справедливо следующее представление (см. [5]):

$$(I-\widetilde{Q}_0^*(p))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\widetilde{Q}_0^*(p))^n.$$

Поэтому элемент матрицы $(I-\widetilde{Q}_0^*(p))^{-1}Q_0^*(p)$ с индексами $i\in E_0$, $j\in E_k$, $k=1,2,\ldots,K$, является преобразованием Лапласа–Стилтьеса функции

$$\begin{gathered}\gamma_{ij}(t)=\sum_{s\in E_0}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t Q_{sj}(t-x)\,dQ_{is}^{(n)}(x),\\ i\in E_0,\quad j\in E_k,\quad k=1,2,\ldots,K,\end{gathered} \tag{37}$$

где $Q_{ij}^{(n)}(x)$ обозначает n-кратная свертка матрицы $Q_{ij}(x)$, которая определяется как n-кратная свертка матрицы $Q(t)$, имеющей элементы $Q_{ij}(t)$, $i,j\in E_0$ (см. [9]):

$$\begin{gathered}Q_{ij}^{(0)}(t)=0,\quad t<0,\qquad Q_{ij}^{(0)}(t)=\delta_{ij},\quad t\geqslant 0\\ (\delta_{ij}=0,\quad i\neq j,\quad \delta_{ij}=1,\quad i=j),\\ Q_{ij}^{(1)}(t)=Q_{ij}(t),\qquad Q_{ij}^{(n)}(t)=\sum_{s\in E_0}\int_0^t Q_{sj}(t-x)\,dQ_{is}^{(n-1)}(x),\qquad n>1.\end{gathered}$$

Нетрудно заметить, что функция $\gamma_{ij}(t)$ есть вероятность того, что ведущая компонента $\xi(t)$ управляемого полумарковского процесса перейдет до момента t в состояние $j, j\in E_k$, принимаемая до этого перехода значения только из множества E_0 при условии, что $\xi(0)=i\in E_0$.

При $t \to \infty$ получаем условную вероятность того, что, стартуя из состояния $i \in E_0$ (при условии $\xi(0) = i$), цепь Маркова с переходными вероятностями (7) перейдет в состояние j, $j \in E_k$, принимая до этого перехода значения только из множества E_0:

$$\gamma_{ij} = \lim_{t\to\infty} \gamma_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s\in E_0}^{\infty} p_{sj} p_{is}^{(n)},$$

где $p_{is}^{(n)} = \lim_{x\to\infty} Q_{is}^{(n)}(x)$, а $Q_{is}^{(n)}(x)$ есть n-кратная свертка матрицы $Q_{is}(x)$, $i, s \in E_0$.

Далее, из (29) следует, что

$$H_{ij}(t) = \gamma_{ij}(t) + \sum_{s\in E_k} \int_0^t \gamma_{is}(t-x)\, dH_{sj}(x), \qquad i \in E_0, \quad j \in E_k. \tag{38}$$

Из (38) аналогично (35) получаем

$$H_{ij}(t) = \frac{t}{M_{jj}} \sum_{s\in E_k} \gamma_{is} + O(1), \qquad i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad t \to \infty.$$

Сумма $\sum_{s\in E_k} \gamma_{is}$ определяет вероятность перехода вложенной цепи Маркова из состояния $i \in E_0$ в замкнутое множество сообщающихся состояний E_k.

Таким образом, для двойной суммы в правой части равенства (22) получаем разложение при $t \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in E_k} \int_0^t s_j(t-x)\, dH_{ij} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in E_k} \left(\sum_{s\in E_k} \gamma_{is} \right) \frac{s_j t}{M_{jj}} + O(1). \tag{39}$$

Для первого слагаемого в (22) справедливо асимптотическое равенство при $t \to \infty$

$$s_i(t) = O(1), \qquad i \in E_0.$$

Для третьего слагаемого в (22) докажем справедливость асимптотического равенства при $t \to \infty$

$$\sum_{j\in E_0} \int_0^t s_j(t-x)\, dH_{ij}(x) = O(1), \qquad i \in E_0. \tag{40}$$

Исследуем функции восстановления $H_{ij}(t)$ при $i, j \in E_0$. Из уравнений (26) получаем

$$\widetilde{H}_{ij}^*(p) = (I - \widetilde{Q}_0^*(p))^{-1} \widetilde{Q}_0^*(p) = \sum_{n=1}^{\infty} (\widetilde{Q}_0^*(p))^n. \tag{41}$$

Таким образом, для функций восстановления имеем равенства

$$\delta_{ij} + H_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}(t), \qquad i,j \in E_0. \tag{42}$$

Выше было доказано (лемма 2), что $\lim_{t\to\infty} H_{ij}(t) < \infty$ при $i,j \in E_0$. В условиях теоремы при $p \to 0$ имеем

$$Q_{ij}^{*}(p) = p_{ij} + O(p), \quad i,j \in E_0, \qquad \widetilde{Q}^{*}(p) = \widetilde{P} + O(p), \quad p \to 0,$$

где $\widetilde{P}$ — обозначена матрица переходных вероятностей (7) при $i,j \in E_0$. Тогда для разложения степени при $p \to 0$ и $n > 0$ имеем

$$(\widetilde{Q}^{*}(p))^n = \tilde{P}^n + O(p), \quad Q_{ij}^{(n)*}(p) = p_{ij}^{(n)} + O(p),$$
$$Q_{ij}^{(n)}(t) = p_{ij}^{(n)} + o(1), \qquad i,j \in E_0.$$

Наконец, для функций восстановления при $i,j \in E_0$ получаем из (42) равенства

$$\begin{gathered} H_{ij}^{*}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}^{(n)*}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} + O(p), \\ \lim_{t\to\infty} H_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}, \qquad i,j \in E_0. \end{gathered} \tag{43}$$

Следовательно, равенство (40) справедливо.

Объединяя соотношения (39) и (40), получаем асимптотическое разложение функции (22):

$$S_i(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j\in E_k} \Bigl(\sum_{s\in E_k} \gamma_{is}\Bigr) \frac{s_j t}{M_{jj}} + O(1), \qquad t \to \infty. \tag{44}$$

Таким образом, равенства (36) и (44) доказывают утверждение теоремы, причем

$$\begin{aligned} S^{(k)} = S_i &= \sum_{j\in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}}, \qquad i \in E_k, \quad k = 1,2,\ldots,K, \\ S_i &= \sum_{k=1}^{K} \Bigl(\sum_{j\in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}}\Bigr)\Bigl(\sum_{s\in E_k} \gamma_{is}\Bigr), \qquad i \in E_0. \end{aligned} \tag{45}$$

Заметим, что при $i \in E_k$ исследуемый коэффициент не зависит от состояния, а зависит только от номера замкнутого класса.

Далее выясним зависимость коэффициентов (45) от вероятностных мер $\vec{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_N)$, которые определяют марковскую однородную рандомизированную стратегию управления.

По формуле полного математического ожидания получаем для математических ожиданий M_{ij}, $i, j \in E$, систему алгебраических уравнений

$$M_{ij} = m_{ij} + \sum_{s \in E} M_{sj} p_{is}, \tag{46}$$

С учетом структуры матрицы переходных вероятностей вложенной цепи Маркова из уравнений (46) получаем

$$M_{ij} = m_{ij} + \sum_{s \in E_k} M_{sj} p_{is}, \qquad i, j \in E_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, K, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= m_{ij} + \sum_{s \in E_0} M_{sj} p_{is} \\ &\quad + \sum_{s \in E_k} M_{sj} p_{is}, \qquad i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \end{aligned} \tag{48}$$

Для каждого замкнутого класса сообщающихся состояний существует стационарное распределение $\vec{\pi}^{(k)} = (\pi_{ki},\ i \in E_k)$, удовлетворяющее условиям

$$\pi_{ki} = \sum_{j \in E_k} \pi_{kj} p_{ji}, \quad \sum_{j \in E_k} \pi_{kj} = 1, \quad \pi_{kj} > 0, \qquad i \in E_k, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{49}$$

Нормированное решение этой системы алгебраических уравнений представляется в виде отношения двух определителей:

$$\pi_{ki} = \frac{\Delta_i^{(k)}}{\Delta^{(k)}},$$

где $\Delta^{(k)}$ — определитель транспонированной матрицы $P^{(k)}$ с элементами p_{ij}, $i, j \in E_k$, а $\Delta_i^{(k)}$ — определитель транспонированной матрицы $P^{(k)}$, в которой i-столбец заменен единицами.

В силу того, что переходные вероятности $p_{ij} = p_{ij}(G_i)$, определяемые равенствами (7), являются линейными функционалами, по определению детерминанта имеем:

(i) определитель $\Delta^{(k)} = \Delta^{(k)}(G_i,\ i \in E_k)$ есть линейный функционал относительно вероятностных мер G_i, $i \in E_k$;

(ii) определитель $\Delta_i^{(k)} = \Delta_i^{(k)}(G_j,\ j \in E_k \setminus \{i\})$ есть линейный функционал относительно всех вероятностных мер G_j, $j \in E_k$, кроме меры G_i.

Далее, если умножить левую и правую части равенства (47) на π_{ki} и просуммировать, при $j \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, K$, то приходим к равенству

$$M_{jj} = \frac{\sum_{i \in E_k} m_i \pi_{ki}}{\pi_{kj}} = \frac{\sum_{i \in E_k} m_i(G_i) \Delta_i^{(k)}(G_j,\, j \in E_k \setminus \{i\})}{\Delta_j^{(k)}(G_l,\, l \in E_k \setminus \{j\})} \tag{50}$$

Подставляя зависимость (50) в соотношение (45) и учитывая, что функционалы $m_i = m_i(G_i)$ и $s_i = s_i(G_i)$, определяемые равенствами

(13) и (12), являются линейными функционалами, получаем при $i \in E_k$, $k = 1, 2, \ldots, K$, что

$$S^{(k)} = S_i(\vec{G}^{(k)}) = \sum_{j \in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}} = \frac{\sum_{j \in E_k} s_j(G_j)\Delta_j^{(k)}(G_l,\, l \in E_k \setminus \{j\})}{\sum_{j \in E_k} m_j(G_j)\Delta_j^{(k)}(G_l,\, l \in E_k \setminus \{j\})} \qquad (51)$$

есть дробно-линейный функционал относительно распределений $\vec{G}^{(k)} = (G_i,\, i \in E_k)$, определяющих марковскую однородную стратегию управления при старте управляемого полумарковского процесса из произвольного состояния любого замкнутого класса сообщающихся состояний.

По существу, полученный результат повторяет результаты, изложенные в [1], когда исследовался управляемый полумарковский процесс с одним классом сообщающихся состояний вложенной цепи Маркова.

Предположим теперь, что процесс стартует из некоторого невозвратного состояния $i \in E_0$.

При анализе коэффициентов (45) для $i \in E_0$ исследуем сначала вероятность

$$\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} = \sum_{s \in E_k} \sum_{l \in E_0} p_{ls} \sum_{n=0}^{\infty} p_{il}^{(n)}, \qquad i \in E_0.$$

Ранее мы ввели обозначение $\widetilde{P}$ для матрицы переходных вероятностей p_{ij}, $i, j \in E_0$, тогда сумма $\sum_{n=0}^{\infty} p_{il}^{(n)} = \alpha_{il}$, $i, l \in E_0$, есть элемент обратной матрицы $(I - \widetilde{P})^{-1}$.

По определению обратной матрицы каждый ее элемент α_{il} представляется в виде отношения двух определителей:

$$\alpha_{il} = \frac{\Delta_{li}^{(0)}}{\Delta^{(0)}}$$

в знаменателе стоит определитель матрицы $\widetilde{P}$, в числителе — алгебраическое дополнение соответствующего элемента.

Переходные вероятности $p_{ij} = p_{ij}(G_i)$, $i, j \in E_0$, суть линейные функционалы только от одной вероятностной меры G_i, $i \in E_0$, следовательно, определитель матрицы $\widetilde{P}$ является линейным функционалом от распределений $\vec{G}^{(0)} = (G_i,\, i \in E_0)$, $\Delta^{(0)} = \Delta^{(0)}(G_i,\, i \in E_0)$.

Числитель элемента α_{il} обратной матрицы определяется как детерминант матрицы, которая получается из матрицы $\tilde{P}$ вычеркиванием l-й строки и i-го столбца, умноженный на $(-1)^{(i+l)}$. Следовательно, функционал $\Delta_{li}^{(0)}$ зависит от вероятностных мер $(G_n,\, n \in E_0 \setminus \{l\})$, т.е. $\Delta_{li}^{(0)} = \Delta_{li}^{(0)}(G_n,\; n \in E_0 \setminus \{l\})$.

Тогда в принятых обозначениях получаем

$$\gamma_{is} = \sum_{l \in E_0} p_{ls} \sum_{n=0}^{\infty} p_{il}^{(n)} = \sum_{l \in E_0} p_{ls}\alpha_{il} = \frac{\sum_{l \in E_0} \Delta_{li}^{(0)}(G_n,\, n \in E_0 \setminus \{l\}) p_{ls}(G_l)}{\Delta^{(0)}(G_n,\, i \in E_0)},$$

или

$$\gamma_i^{(k)} = \sum_{s\in E_k} \gamma_{is} = \frac{\sum_{s\in E_k}\sum_{l\in E_0} \Delta_{li}^{(0)}(G_n,\, n\in E_0\setminus\{l\})p_{ls}(G_l)}{\Delta^{(0)}(G_n,\, n\in E_0)}, \qquad i\in E_0, \tag{52}$$

т.е. исследуемое выражение есть дробно-линейный функционал относительно распределений $\vec{G}^{(0)} = (G_i,\, i\in E_0)$.

Подставляя соотношения (51) и (52) в (45), при $i\in E_0$ получаем

$$\begin{aligned} S_i &= S_i(\vec{G}) = S_i(G_1, G_2, \ldots, G_N) = \sum_{k=1}^{K}\Bigg(\sum_{s\in E_k}\gamma_{is}\Bigg)\Bigg(\sum_{j\in E_k}\frac{s_j}{M_{jj}}\Bigg) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \frac{\sum_{s\in E_k}\sum_{l\in E_0} \Delta_{li}^{(0)}(G_n,\, n\in E_0\setminus\{l\})p_{ls}(G_l)}{\Delta^{(0)}(G_n,\, n\in E_0)} \\ &\quad\times \frac{\sum_{j\in E_k} s_j(G_j)\Delta_j^{(k)}(G_l,\, l\in E_k\setminus\{j\})}{\sum_{j\in E_k} m_j(G_j)\Delta_j^{(k)}(G_l,\, l\in E_k\setminus\{j\})}. \end{aligned} \tag{53}$$

Проанализируем структуру дробей в правой части (53). При фиксированном k каждый знаменатель является линейным функционалом относительно вероятностных мер $\vec{G}^{(k)} = (G_l,\, l\in E_k)$. Так как множества сообщающихся состояний не пересекаются: $E_kE_s = \varnothing$, $k\neq s$, то общий знаменатель этих дробей

$$\Delta^{(0)}(G_l,\, l\in E_0)\prod_{k=1}^{K}\Bigg(\sum_{i\in E_k} m_i(G_i)\Delta_i^{(k)}(G_l,\, l\in E_k\setminus\{i\})\Bigg)$$

есть линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = (G_l,\, l\in E)$.

Таким образом, доказано, что знаменатель функционала (53) есть линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = (G_l,\, l\in E)$.

При фиксированном k каждый числитель является линейным функционалом относительно вероятностных мер $\vec{G}^{(k)}\cup\vec{G}^{(0)}$. Дополнительный множитель этой дроби

$$\prod_{s=1, s\neq k}^{K}\Bigg(\sum_{i\in E_s} m_i(G_i)\Delta_i^{(s)}(G_l,\, l\in E_s\setminus\{i\})\Bigg)$$

есть линейный функционал относительно вероятностных мер $\bigcup_{s=1, s\neq k}^{K}\vec{G}^{(s)}$. Следовательно, доказано, что числитель функционала (53) также есть линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = (G_l,\, l\in E)$. Тем самым завершается доказательство теоремы.

В задачах управления марковскими цепями, марковскими и полумарковскими процессами дробно-линейная структура целевого функционала, определяющего качество управления, позволяет поставить вопрос о структуре оптимальной стратегии управления (т.е. структуре вероятностных мер $\vec{G} = (G_l,\, l \in E)$), которая обеспечивает оптимальное значение целевого функционала. Эти вопросы исследовались в ряде работ см. [1], [2], [19], [14].

В заключение сформулируем алгоритм поиска оптимальной стратегии. Если использовать обозначения (51) и (52), то равенство (53) можно переписать в виде

$$S_i = S_i(\vec{G}) = \sum_{k=1}^{K} \Big(\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} \Big) \Big(\sum_{j \in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}} \Big) = \sum_{k=1}^{K} \gamma_i^{(k)} S^{(k)}.$$

В этом соотношении дробно-линейные функционалы $S^{(k)}$ зависят от распределений $\vec{G}^{(k)} = (G_l,\, l \in E_k)$, $k = 1, 2, \ldots, K$. Так как коэффициенты $\gamma_i^{(k)}$ неотрицательные, то сначала надо найти распределения $\vec{G}^{(*)} = (G_l^{(*)},\, l \in E_k)$, $k = 1, 2, \ldots, K$, на которых достигаются экстремумы функционалов $S^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, K$, а затем определять оптимальные распределения $\vec{G}^{(*)} = (G_l^{(*)},\, l \in E_0)$, на которых достигается экстремум функционала

$$\sum_{k=1}^{K} \gamma_i^{(k)} (G_l,\, l \in E_0) S^{(k)} (G_s^{(*)},\, s \in E_k).$$

Таким образом, определяем оптимальную стратегию управления $\vec{G}^{(*)}$, на которой достигается экстремум функционала (53).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барзилович Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., Соловьев А. Д., Ушаков И. А.* Вопросы математической теории надежности. М.: Радио и связь, 1983, 376 с.
2. *Джевелл В. С.* Управляемые полумарковские процессы. — Киберн. сб., 1967, № 4, с. 97–137.
3. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. М.: Наука, 1975, 154 с.
4. *Каштанов В. А., Янишевский И. М.* Совместное распределение момента катастрофы и аддитивного функционала доходов. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 650–655.
5. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970, 271 с.
6. *Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.* Счетные цепи Маркова. М.: Наука, 1987, 413 с.
7. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 300 с.
8. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова думка, 1976, 184 с.
9. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наукова думка, 1982, 236 с.
10. *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. М: Наука, 1977, 175 с.

11. *Сильвестров Д. С.* Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний (основы расчета функциональных и надежностных характеристик стохастических систем). М.: Сов. радио, 1980, 272 с.
12. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1967, 751 с.
13. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Кн. 2. М.: МЦНМО, 2004, 408 с.
14. *Kashtanov V. A.* Discrete distributions in control problems. — Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference (Petrozavodsk, 1996). Utrecht: VSP, 1997, p. 267–274.
15. *Kashtanov V. A.* The controlled semi-Markov processes in problem of maintenance and effectiveness. — MMR' 2000. Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability (Bordeaux, France, 2000), Abstracts' Book, v. 2, p. 587–590.

Поступила в редакцию
23.II.2015