Труды по дискретной математике
Том 8, с. 34–51
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИКИ СТЕПЕНИ РАССЕИВАНИЯ С РАСТУЩИМ ЧИСЛОМ ИСХОДОВ В КРИТЕРИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

А. П. БАРАНОВ, Ю. А. БАРАНОВ

В работе рассматривается предельное поведение распределения статистики $I(\lambda)$ степени рассеивания, применяемой в критерии принадлежности наблюдаемого вектора частот исходов полиномиальной схемы заданному распределению при росте числа исходов и числа испытаний. Получены явные выражения параметров центрировки и нормировки, обеспечивающие сходимость к предельному нормальному закону как при основной гипотезе, так и при альтернативе.

В классической литературе по математической статистике, например [2], рассматривается критерий выявления соответствия распределения вектора частот исходов $\bar{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ полиномиальной схемы $M(n, \bar{q})$ распределению $\bar{p} = (p_1, \dots, p_N)$. Если вектор $\bar{q} = (q_1, \dots, q_N) = \bar{p}$, то говорят о принадлежности распределения вероятностей исходов заданному вектору $\bar{p}$ (гипотеза H_0). Гипотеза H_1 заключается в отличии $\bar{q}$ от $\bar{p}$. Известно несколько критериев принадлежности, основанных на различных статистиках, построенных с использованием вектора частот исходов $\nu_1, \dots, \nu_N$. Многие из них являются, как отмечается в [1], частными случаями так называемой статистики степени рассеивания, имеющей вид

$$I(\lambda) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{j=1}^{N} \nu_j \left(\left(\frac{\nu_j}{np_j} \right)^{\lambda} - 1 \right). \tag{1}$$

В [1] также показано, что при гипотезе H_0 предельным при $n \to \infty$ распределением статистики $I(\lambda)$ является χ-квадрат с $N-1$ степенью свободы при фиксированном векторе p и числе исходов N.

Статистика $I(\lambda)$ также является разделимой статистикой, и для исследования предельного поведения ее распределения при $N \to \infty$, $n \to \infty$ могут быть применены результаты различных работ, обзор которых можно найти в [3].

В [1] получены параметры предельных нормальных законов при гипотезе H_0, $n, N \to \infty$ и $\dfrac{n}{N} \to \gamma$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$, выражающиеся через моменты типа $\mathbf{E}v^{\lambda+1}$ для $\lambda > -1$, где v — случайная величина (с. в.), распределенная по закону Пуассона ($v \sim \Pi(\alpha)$) со средним $\alpha > 0$. Мы получим явные выражения параметров центрировки и нормировки статистики $I(\lambda)$, обеспечивающие сходимость соответствующих распределений при гипотезах H_0 и H_1, в том числе, сближающихся H_0 и H_1 в определенном смысле при $\dfrac{n}{N} \to \infty$ (λ — любое целое число, не равное 0, -1) к нормальному закону. Главная проблема, которая будет решаться в предлагаемой работе, заключается в получении аппроксимации моментов $\mathbf{E}(v^{\lambda+1} - av)^k$, $k = 1, \dots, 4$, при некоторой неслучайной величине a в явном виде как зависимости от λ и α при $\alpha \to \infty$ и любом фиксированном целом λ, $\lambda \neq 0, -1$.

Поставленная задача решается с использованием результатов работы авторов [4] (см. также работу [9]) по аппроксимации целых отрицательных и положительных моментов с. в.

Для того чтобы корректно использовать определенную равенством (1) статистику $I(\lambda)$ при $\lambda < -1$, необходимо доопределить значение 0^λ. Мы положим $0^\lambda = 0$ при любом целом λ. В нашем понимании это будет соответствовать пропуску непоявившегося исхода при подсчете статистики $I(\lambda)$ по формуле (1). Аналогичное определение использовано и в [4].

Воспользуемся результатом работы [5] как наиболее общей нормальной предельной теоремой о сходимости распределений разделимых статистик к нормальному закону.

Пусть $\{f_{1N}(x), \dots, f_{NN}(x)\}$ — серии функций от целочисленного аргумента, и обозначим через $v_1, \dots, v_N$ независимые с. в. $v_j \sim \Pi(nq_i)$, $j = 1, \dots, N$. Индекс серии N в обозначениях функции $f_{jN}(x)$ для краткости далее будем опускать. Введем также дополнительные обозначения:

$$Q_j = \mathrm{cov}(v_j, f_j(v_j)), \qquad Q(N) = \sum_{j=1}^{N} Q_j,$$

$$\bar{u}_j = f_j(v_j) - v_j n^{-1} Q(N), \tag{2}$$

$$u_j = \bar{u}_j - \mathbf{E}\,\bar{u}_j, \qquad \sigma^2(N) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}\,u_j^2$$

в предположении, что $\mathbf{E}\,u^2$ существует.

Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{N} \operatorname{cov}(v_j, u_j) = 0$ и

$$\sigma^2(N) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{D} f_j(v_j) - n^{-1} Q^2(N). \tag{3}$$

Частным случаем основной теоремы работы [5] является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $N \to \infty$, $n(N) \to \infty$ *и выполнены условия*:

У1) *существует такое* q, *что* $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} g_j \leqslant q < 1$;

У2) $\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{E} u_j^4 \sigma^{-4}(N) \to 0$ *при* $N \to \infty$.

Тогда распределение с. в.

$$\sigma^{-1}(N) \sum_{j=1}^{N} f_j(\nu_j) - \mathbf{E} f_j(v_j)$$

сходится к нормальному $\mathcal{N}(0,1)$ *закону со средним* 0 *и дисперсией* 1.

Приведенная теорема является мощным аппаратом для исследования статистик вида $\sum\limits_{j=1}^{N} f_j(\nu_j)$. Однако ее непосредственное применение предполагает явное и весьма точное вычисление ковариации $Q(N)$. Применительно к статистике $I(\lambda)$ это удается сделать для случаев $\lambda \geqslant 1$. Например, для $\lambda = 1$, что соответствует статистике χ^2, $Q(N) = n + N$ при гипотезе H_0. Однако уже при гипотезе H_1, даже в случае $\lambda = 1$, как мы увидим далее,

$$Q(N) = n\left(-1 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j^2}{p_j}\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{p_j}.$$

При $\lambda < 0$ удается получить лишь аппроксимацию суммарной ковариации $Q(N)$. Дальнейшее применение аппроксимации при оценке $\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{E} u_j^4$ и даже при вычислении $\sigma^2(N)$ технически весьма сложно.

Фактически для произвольной гипотезы H_1 это проделано при $\lambda = 1$ в весьма технически сложной работе [6]. Поэтому мы докажем и далее будем пользоваться некоторым следствием приведенной выше теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $N \to \infty$, $n = n(N) \to \infty$ *и выполнено условие* У1, *а также условия*:

У2′) $\mu = \sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{E}(f_j(v_j) - \mathbf{E} f_j(v_j))^4 \sigma_N^{-4} \to 0$ *при* $N \to \infty$, *где* $\sigma_N^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{D} f_j(v_j)$,

У3) $(1-\rho_N^2)^{-2}\rho_N^4\left(3n^{-1}+\sum\limits_{j=1}^{N} q_j^2\right)\to 0$ *при* $N\to\infty$, *где* $\rho_N = Q(N)\times$ $\times\,\sigma_N^{-1}n^{-1/2}$.

Тогда распределение с. в.

$$\sigma_N^{-1}(1-\rho_N^2)^{-1/2}\sum_{j=1}^{N} f_j(\nu_j)-\mathbf{E}\,f_j(v_j)$$

сходится к $\mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство заключается в использовании очевидного (из (3)) равенства $\sigma^2(N)=\sigma_N^2(1-\rho_N^2)$ для проверки выполнения У2. Представим u_j в следующем виде:

$$u_j = f_j(v_j)-\mathbf{E}\,f_j(v_j)-(v_j-\alpha_j)\,\sigma_N\rho_N n^{-1/2}.$$

Так как $(a+b)^4\leqslant 4(a^4+b^4)$ для любых a, b, то

$$\mathbf{E}\,u_j^4\leqslant 4\left(\mathbf{E}\,(f_j(v_j)-\mathbf{E}\,f_j(v_j))^4+\sigma_N^4 n^{-2}\rho_N^4\sum_{j=1}^{N}(\alpha_j^2+3\alpha_j)\right),$$

где $\alpha_j=\mathbf{E}\,v_j=nq_j$.

Последнее неравенство вместе с У2′ и У3 приводит к выполнению У2, что и заканчивает доказательство.

Замечание 1. У3 имеет место, если $\rho_N\to 0$ при $N\to\infty$.

Замечание 2. Если существует такая постоянная $c<1$, что для любых N коэффициент корреляции $\rho_N^2<c<1$, то при существовании предела

$$\lim_{N\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant N} q_i = 0$$

условие У3 выполняется.

Приведенные замечания показывают, что чем меньше ρ_N, тем проще проверять условия теоремы 1. Поэтому возникает идея так называемой «перекачки» зависимости с. в. $f_j(v_j)$ от с. в. v_j в собственно функцию $f_j(v_j)$. Фактически полную «перекачку» осуществляет образование с. в. $\bar{u}_j$ вместо $f_j(v_j)$. Случайная величина $\bar{u}_j$ в смысле $\operatorname{cov}\left(\sum\limits_{j=1}^{N} u_j,\ \sum\limits_{j=1}^{N} v_j\right)=0$ декоррелирована по отношению к $\sum\limits_{j=1}^{N} v_j$. Мы будем говорить, что с. в. $\sum\limits_{j=1}^{N} f_j(v_j)$ частично декоррелирована, если $\rho_N^2<c<1$. Ниже мы увидим, что $\sum\limits_{j=1}^{N} f_j(v_j)$ при

$$f_j(x)=\frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left(\frac{x^{\lambda+1}}{\beta_j^{\lambda}}-x\right),\qquad I(\lambda)=\sum_{j=1}^{N} f_j(v_j),\tag{4}$$

где $\beta_j = np_j$, так сказать, полностью коррелирована с $\sum\limits_{j=1}^{N} v_j$, в смысле $\rho_N \to 1$, причем $\rho_N \to 1$ как при гипотезе H_0, так и при гипотезе H_1. Поэтому мы видоизменим функции $f_j(x)$, получив сначала представления для $Q(N)$. Мы получим разложения величин $\mathbf{E} f_j(v_j)(v_j - \alpha_j)$ по степеням α_j единым для всех $j = 1, \dots, N$ способом в предположении о существовании постоянных c_1, c_2, при которых

$$0 < c_1 < z_j < c_2 < \infty, \tag{5}$$

где $z_j = \dfrac{q_j}{p_j} = \dfrac{\alpha_j}{\beta_j}$, $j = 1, \dots, N$, и $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \alpha_j \to \infty$ при $N \to \infty$. Индекс j, обозначающий номер исхода, для упрощения записи там, где не будет появляться необходимости использования всех номеров исходов, будем опускать.

Основным инструментом исследования является доказанное в [4] разложение для моментов, которое базируется на продолжении чисел Стирлинга 2-го рода $\left\{ {m \atop k} \right\}$ на область отрицательных значений m и k. В работе [7] впервые предложено числа $\left\{ {m \atop k} \right\}$, ранее определенные только для положительных m и k, рассматривать и для отрицательных m и k, исходя из основного рекуррентного соотношения

$$\left\{ {m \atop k} \right\} = \left\{ {m-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {m-1 \atop k} \right\}, \tag{6}$$

полагая $\left\{ {m \atop k} \right\} = 0$ при $k > m$. В работе [4] приведены явные выражения для чисел $\left\{ {m \atop m-k} \right\}$ при $k = 0, \dots, 3$, справедливые для любых целых m, которые могут быть также продолжены для следующих после 3 значений k:

$$\begin{gathered} \left\{ {m \atop m} \right\} = 1, \qquad \left\{ {m \atop m-1} \right\} = \binom{m}{2}, \qquad \left\{ {m \atop m-2} \right\} = \binom{m}{3} \frac{3m-5}{4}, \\ \left\{ {m \atop m-3} \right\} = \binom{m}{4} \frac{(m-2)(m-3)}{2}. \end{gathered} \tag{7}$$

В работе [4] получена аппроксимационная формула моментов с. в. $v \sim \Pi(\alpha)$

$$\mathbf{E} v^m = \sum_{k=0}^{s} \left\{ {m \atop m-k} \right\} \alpha^{m-k} + O(\alpha^{m-s-1}), \tag{8}$$

где $s \geqslant 0$, m — любое целое число и $\alpha \to \infty$. Представления (7) и (8) позволяют получить явные разложения по степеням α выражения $\mathbf{E} f(v)$:

$$\mathbf{E}\,f(v) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\,(\beta^{-\lambda}\mathbf{E}\,v^{\lambda+1} - \alpha) =$$

$$= -\frac{2\alpha}{\lambda(\lambda+1)} + \frac{2z^{\lambda}}{\lambda(\lambda+1)}\sum_{k=0}^{s}\left\{\begin{matrix}\lambda+1\\ \lambda+1-k\end{matrix}\right\}\alpha^{1-k} + O(\alpha^{-s}). \quad (9)$$

Из [4], используя (8), аналогично (9) получим равенства

$$Q = \mathbf{E}\,f(v)(v-\alpha) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\,[\beta^{-\lambda}(\mathbf{E}\,v^{\lambda+2} - \alpha\mathbf{E}\,v^{\lambda+1}) - \alpha] =$$

$$= \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left[-\alpha + \beta^{-\lambda}\sum_{k=0}^{s}\left(\left\{\begin{matrix}\lambda+2\\ \lambda+2-k\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\lambda+1\\ \lambda+1-k\end{matrix}\right\}\right)\alpha^{\lambda+2-k}\right] +$$

$$+ O\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda}\alpha^{1-s}\right). \quad (10)$$

Преобразуем (10), учитывая (6):

$$Q = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left[-\alpha + \beta^{-\lambda}\sum_{k=0}^{s}(\lambda+2-k)\left\{\begin{matrix}\lambda+1\\ \lambda+2-k\end{matrix}\right\}\alpha^{\lambda+2-k}\right] + O(\alpha^{1-s}). \quad (11)$$

При $s = 4$ последнее равенство вместе с (9) приобретает вид

$$Q = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left[-\alpha + (\lambda+1)\,z^{\lambda}\alpha + \lambda\binom{\lambda+1}{2}z^{\lambda} +\right.$$

$$\left. + (\lambda-1)^2\binom{\lambda+1}{2}\frac{3\lambda-2}{12}z^{\lambda}\alpha^{-1} + \binom{\lambda+1}{2}\frac{(\lambda-2)^3(\lambda-1)^2}{24}z^{\lambda}\alpha^{-2}\right] + O(\alpha^{-3}) =$$

$$= 2\,\frac{(\lambda+1)\,z^{\lambda}-1}{\lambda(\lambda+1)}\,\alpha +$$

$$+ z^{\lambda}\left[\lambda + (\lambda-1)^2\,\frac{3\lambda-2}{12}\,\alpha^{-1} + \frac{(\lambda-2)^3(\lambda-1)^2}{24}\,\alpha^{-2}\right] + O(\alpha^{-3}). \quad (12)$$

Гипотеза H_0 эквивалентна в (12) выполнению равенства $z = 1$. Поэтому из (12) вытекает

$$Q\big|_{H_0} = \frac{2}{\lambda+1}\,\alpha + \lambda + (\lambda-1)^2\,\frac{3\lambda-2}{12}\,\alpha^{-1} + \frac{(\lambda-2)^3(\lambda-1)^2}{24}\,\alpha^{-2} + O(\alpha^{-3}).$$

В случае рассмотрения χ^2-критерия $\lambda = 1$

$$Q\big|_{H_0} = \alpha + 1. \tag{13}$$

Равенство (12) приводит к выражению

$$Q(N) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left[n\sum_{j=1}^{N}((\lambda+1)\,z_j^{\lambda}-1)\,q_j + z_j^{\lambda}\left((\lambda+1)\,\alpha_j + \binom{\lambda+1}{2}\lambda + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \binom{\lambda+1}{2}\frac{(\lambda-1)^2(3\lambda-2)}{6}\,\alpha_j^{-1} + O\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\right)\right)\right], \tag{14}$$

$\pi = \pi(N) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant N} q_j$. Применяя (8), аналогично (9) получаем:

$$\mathbf{D}f(v) = \mathbf{E}f^2(v) - \mathbf{E}^2 f(v) = \frac{4}{\lambda^2(\lambda+1)^2}\times$$

$$\times\left(\beta^{-2\lambda}\mathbf{E}v^{2\lambda+2} - 2\beta^{-\lambda}\mathbf{E}v^{\lambda+2} + \alpha - \beta^{-2\lambda}\mathbf{E}^2 v^{\lambda+1} + 2\beta^{-\lambda}\alpha\mathbf{E}v^{\lambda+1}\right) =$$

$$= \binom{\lambda+1}{2}^2\left(\beta^{-2\lambda}(\mathbf{E}v^{2\lambda+2} - \mathbf{E}^2 v^{\lambda+1}) + \alpha - 2\beta^{-\lambda}(\mathbf{E}v^{\lambda+2} - \alpha\mathbf{E}v^{\lambda+1})\right) =$$

$$= \binom{\lambda+1}{2}^{-2}\left[z^{2\lambda}\left(\sum_{k=0}^{3}\left\{{2\lambda+2 \atop 2\lambda+2-k}\right\}\alpha^{2-k} - \left(\sum_{k=0}^{3}\left\{{\lambda+1 \atop \lambda+1-k}\right\}\alpha^{1-k}\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + \alpha - 2z^{\lambda}\sum_{k=0}^{3}\left(\left\{{\lambda+2 \atop \lambda+2-k}\right\} - \left\{{\lambda+1 \atop \lambda+1-k}\right\}\right)\alpha^{2-k}\right] + O(\alpha^{-3}).$$

Подставляя в последнее равенство числа Стирлинга 2-го рода (7), приведем подобные члены:

$$\mathbf{D}\,f(v) = \binom{\lambda+1}{2}^{-2}\left[z^{2\lambda}\left(\left[\binom{2\lambda+2}{2} - 2\binom{\lambda+1}{2}\right]\alpha + \right.\right.$$

$$\left. + \binom{2\lambda+2}{3}\frac{6\lambda+1}{4} - 2\binom{\lambda+1}{3}\frac{3\lambda-2}{4} - \binom{\lambda+1}{2}^2\right) +$$

$$\left. + \alpha - 2z^{\lambda}\sum_{k=0}^{3}(\lambda+2-k)\left\{{\lambda+1 \atop \lambda+2-k}\right\}\alpha^{2-k}\right] + O(\alpha^{-1}).$$

В последнем равенстве также использовано вытекающее из (6) соотношение

$$\left\{{\lambda+2 \atop \lambda+2-k}\right\} - \left\{{\lambda+1 \atop \lambda+1-k}\right\} = (\lambda+2-k)\left\{{\lambda+1 \atop \lambda+2-k}\right\},$$

$$\mathbf{D}\,f(v)=\binom{\lambda+1}{2}^{-2}\Bigg[(z^{2\lambda}(\lambda+1)^2-2(\lambda+1)\,z^{\lambda}+1)\,\alpha+$$

$$+6z^{2\lambda}\binom{\lambda+1}{2}^{2}-2z^{\lambda}\lambda\binom{\lambda+1}{2}\Bigg]+O(\alpha^{-1}). \quad (15)$$

Тогда

$$\sigma_N^2=\frac{4n}{\lambda^2(\lambda+1)^2}\left[\sum_{j=1}^{N}(z_j^{\lambda}(\lambda+1)-1)^2\,q_j\right]+O(N).$$

Остается вычислить с помощью последнего равенства и (14) коэффициент суммарной корреляции

$$\rho_N=Q_N\sigma_N^{-1}n^{-1/2}=\left[\sum_{j=1}^{N}(z_j^{\lambda}(\lambda+1)-1)\,q_j+O\left(\frac{N}{n}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{N}(z_j^{\lambda}(\lambda+1)-1)^2\,q_j+O\left(\frac{N}{n}\right)\right]^{-1/2}. \quad (16)$$

Если обозначить через ζ с. в. с распределением $\mathbf{P}\,\{\zeta=z_j^{\lambda}(\lambda+1)-1\}=q_j$, $j=1,\dots,N$, то

$$\rho_N=\left(\mathbf{E}\,\zeta+O\left(\frac{N}{n}\right)\right)\left(\mathbf{E}\,\zeta^2+O\left(\frac{N}{n}\right)\right)^{-1/2}.$$

Например, при гипотезе H_0 $\rho_N=1+O\left(\dfrac{N}{n}\right)$ для любого λ. При гипотезе H_1 можно ожидать произвольного поведения ρ_N. Так, например, если $q_j=p_j(1+\Delta_j)$, $\Delta=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\Delta_j\to 0$ при $N\to\infty$, то

$$z_j^{\lambda}(\lambda+1)-1=(1+\Delta_j)^{\lambda}(\lambda+1)-1=(\lambda+1)\left[1+\lambda\Delta_j+\binom{\lambda}{2}\Delta_j^2+O(\Delta^3)\right]-1=$$

$$=\lambda+\lambda(\lambda+1)\,\Delta_j+(\lambda+1)\binom{\lambda}{2}\Delta_j^2+O(\Delta^3),$$

$$\mathbf{E}\,\zeta=\lambda+\lambda(\lambda+1)\sum_{j=1}^{N}\Delta_j p_j(1+\Delta_j)+(\lambda+1)\binom{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2 p_j^2(\Delta_j+1)+O(\Delta^3)=$$

$$=\lambda+\lambda(\lambda+1)\,\mathbf{E}\,\delta^2+(\lambda+1)\binom{\lambda}{2}\mathbf{E}\,\delta^2+O(\Delta^3)=$$

$$=\lambda+\lambda(\lambda+1)+\left[1+\frac{\lambda-1}{2}\right]\mathbf{E}\,\delta^2+O(\Delta^3)=\lambda+\frac{(\lambda+1)^2\lambda}{2}\,\mathbf{E}\,\delta^2+O(\Delta^3),$$

где δ — с.в. и $\mathbf{P}\,\{\delta=\Delta_j\}=p_j$,

$$\mathbf{E}\zeta^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\lambda^2 + \lambda(\lambda+1)\Delta_j + (\lambda+1)\binom{\lambda}{2}\Delta_j^2 + O(\Delta^3)\right]^2 p_j(1+\Delta_j) = \\ = \lambda^2 + O(\Delta),$$

следовательно, $\rho_N \to 1$.

Возможны и другие случаи. В любом варианте произведем частичную декорреляцию, исходя из вида $\rho_N \to 1$ при гипотезах H_0 и H_1. Тогда, учитывая, что декоррелированная статистика имеет представление в соответствии с (2)

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(\nu_j) - \nu_j n^{-1} Q(N),$$

ограничимся для частичной декорреляции только первыми двумя значимыми членами в разложении $Q(N)$, даваемом (14).

Положим везде далее

$$\varphi_j(x) = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\left(\frac{x^{\lambda+1}}{\beta_j^{\lambda}} - x(\lambda+1)\sum_{j=1}^{N} z_j^{\lambda} q_j\right) = f_j(x) + \binom{\lambda+1}{2}^{-1} x a_N, \quad (17)$$

где

$$a_N = 1 - (\lambda+1)\sum_{j=1}^{N} z_j^{\lambda} q_j.$$

Воспользуемся далее полученными разложениями моментов $f(v)$, и обозначения $Q(N)$, σ_N^2, ρ_N, ранее применявшиеся для функции $f_j(x)$ в (3), будем использовать с заменой $f_j(x)$ на $\varphi_j(x)$ из (17). Очевидно,

$$I(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(\nu_j) - \binom{\lambda+1}{2}^{-1} n a_N.$$

Непосредственно из (7) и (9) следует

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}\varphi_j(v_j) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E} f_j(v_j) + \binom{\lambda+1}{2}^{-1} a_N n = \\ = \frac{2}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{j=1}^{N} z_j^{\lambda}\left(\binom{\lambda+1}{2} - \lambda\alpha_j + \binom{\lambda+1}{3}\frac{3\lambda-2}{4}\alpha_j^{-1} + \right. \\ \left. + \binom{\lambda+1}{4}\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\alpha_j^{-2} + O\left(\frac{N}{n^3\pi^3}\right)\right) = \\ = \sum_{j=1}^{N} z_j^{\lambda}\left(1 - \frac{2}{\lambda+1}\alpha_j + \frac{(\lambda-1)(3\lambda-2)}{12}\alpha_j^{-2} + \frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{24}\alpha_j^{-2}\right) + \\ + O\left(\frac{N}{n^3\pi^3}\right). \quad (18)$$

Воспользуемся равенством (12) с учетом новых функций $\varphi_j(x)$, определенных в (17). Получаем:

$$\operatorname{cov}(\varphi(v), v) = \operatorname{cov}(f(v), v) + \binom{\lambda+1}{2}^{-1} a_N \alpha =$$

$$= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} \Bigg[\big((\lambda+1) z^\lambda - 1 + a_N\big) \alpha + z^\lambda \Bigg(\lambda \binom{\lambda+1}{2} +$$

$$+ \binom{\lambda+1}{3} \frac{(\lambda-1)(3\lambda-2)}{4} \alpha^{-1} + \binom{\lambda+1}{4} \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)^2}{2} \alpha^{-2} \Bigg) \Bigg] + O(\alpha^{-3}).$$

Тогда

$$Q(N) = \sum_{j=1}^{N} z_j^\lambda \left(\lambda + \frac{(\lambda-1)^2(3\lambda-2)}{2} \alpha_j^{-1} \right) + O\left(\frac{N}{n^3\pi^3} \right). \tag{19}$$

Аналогично, из (12), (15), с учетом (17) следует, что

$$\mathbf{D}\,\varphi(v) = \mathbf{D}\,f(v) + 2\binom{\lambda+1}{2}^{-1} a_N \operatorname{cov}(f(v), v) + \binom{\lambda+1}{2}^{-2} a_N^2 \alpha =$$

$$= \binom{\lambda+1}{2}^{-2} \Bigg[\alpha \big(z^\lambda(\lambda+1) - 1 + a_N\big)^2 + 6 z^{2\lambda} \binom{\lambda+1}{2}^2 -$$

$$- 2 z^\lambda \lambda \binom{\lambda+1}{2} + 2 \binom{\lambda+1}{2} a_N \lambda z^\lambda \Bigg] + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) =$$

$$= \binom{\lambda+1}{2}^{-2} \Bigg[\alpha (\lambda+1)^2 \left(z^\lambda - \sum_{j=1}^{N} z_j^\lambda q_j \right)^2 + 6 z^{2\lambda} \binom{\lambda+1}{2}^2 -$$

$$- 4 \binom{\lambda+1}{2}^2 z^\lambda \sum_{j=1}^{N} z_j^\lambda q_j \Bigg] + O(\alpha^{-1}) = 2 z^{2\lambda} + \frac{4n}{\lambda^2} q \Delta^2 + 4 z^\lambda \Delta + O(\alpha^{-1}) =$$

$$= z^{2\lambda} + \frac{4n}{\lambda^2} q \Delta^2 + (z^\lambda + 2\Delta)^2 - 4\Delta^2 + O(\alpha^{-1}),$$

где

$$\Delta = z^\lambda - \sum_{j=1}^{N} z_j^\lambda q_j.$$

Условие (5) и требование $n\pi \to \infty$ позволяют получить следующую оценку снизу:

$$\mathbf{D}\,\varphi(v) \geqslant z^{2\lambda} + \left(\frac{4n}{\lambda^2} q - 4 \right) \Delta^2 \geqslant c_1 \geqslant \frac{c_1^\lambda}{2} + \frac{4nq}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n\pi} \right) \Delta^2 \geqslant \frac{c_1^\lambda}{2} + \frac{2nq}{\lambda^2} \Delta^2.$$

Тогда

$$\sigma_N^2 = \sum_{j=1}^{N} 2z_j^{2\lambda} + \frac{4n}{\lambda^2}\, q_j \Delta_j^2 + 4z_j\Delta_j + O\left(\frac{N}{n\pi}\right) \geqslant \frac{Nc_1^\lambda}{2} + \frac{2n}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{N} q_j \Delta_j^2. \qquad (20)$$

Последнее неравенство вместе с (19) приводит к оценке

$$\rho_N = \frac{Q(N)}{n^{1/2}\sigma_N} = O\left(\frac{N}{\sqrt{Nn}}\right) = o(1), \qquad \frac{N}{n} \to 0, \qquad (21)$$

которая позволяет воспользоваться замечанием 1 при рассмотрении как гипотезы H_0, так и H_1.

Приступим к разработке предпосылок для проверки У2′. Вычисление разложения четвертого центрального момента с. в. $\varphi(v)$ — весьма трудоемкая задача, и мы ее проведем, в отличие от получения разложения для $\mathbf{D}\,\varphi(v)$, с помощью ЭВМ. Для этого опишем алгоритм решения, приведем программу пакета прикладных программ MAPLE V6 и результат работы программы. Определим функцию $\psi(x)$ равенством

$$\psi(x) = \frac{x^{\lambda+1}}{\beta^\lambda} - x(\lambda+1)\,b.$$

Очевидно,

$$\mu(4,\,b) = \mathbf{E}\,(\psi(v) - \mathbf{E}\,\psi(v))^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \mathbf{E}\,\psi^k(v)(-1)^{4-k}\,\mathbf{E}^{4-k}\psi(v) \qquad (22)$$

и

$$\mathbf{E}\,(\varphi(v) - \mathbf{E}\,\varphi(v))^4 = \mu\left(4,\, \sum_{j=1}^{N} z_j^\lambda q_j\right).$$

Из формул (7), (8) аналогично (9) легко получить следующее равенство:

$$\mathbf{E}\,\psi(v) = \alpha(z^\lambda - (\lambda+1)\,b) + z^\lambda \sum_{k=0}^{2} \left\{ \begin{matrix} \lambda+1 \\ \lambda-k \end{matrix} \right\} \alpha^{-k} + O(\alpha^{-3}). \qquad (23)$$

Сложнее обстоит дело с получением разложения для $\mathbf{E}\,\psi^k(v)$ по степеням α, $k = 1, \ldots, 4$:

$$\mathbf{E}\,\psi^k(v) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \beta^{-\lambda i}(\lambda+1)^{k-i}(-b)^{k-i}\,\mathbf{E}\,v^{\lambda i+k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \alpha^{k-j} \sum_{i=0}^{k} z^{\lambda i} \binom{k}{i} (-\lambda b - b)^{k-i} \left\{ \begin{matrix} \lambda i + k \\ \lambda i + k - j \end{matrix} \right\} + O(\alpha^{k-4}). \qquad (24)$$

На основе разложений (23) и (24) могут быть получены разложения (22) следующего общего вида:

$$\mu(4,b) = c_4(z^\lambda, b)\,\alpha^4 + c_3(z^\lambda, b)\,\alpha^3 + \ldots + c_1(z^\lambda, b)\,\alpha + O(1), \qquad (25)$$

где $c_j(z,b)$ — полиномы по переменным z и b с коэффициентами, зависящими от λ и номера j, $j = 1, \ldots, 4$. Фактически подобную работу мы провели при выводе разложения для $\mathbf{D}\varphi(v)$. Мы конкретизируем представление (25), используя ЭВМ, т. е. в формулу (22) подставим (23) и (24), после чего приведем подобные члены. Программа, реализующая изложенный алгоритм имеет следующий вид:

```
> sigma := proc(m, j) if j = 0 then 1 elif j = 1 then binomial(m, 2) elif j = 2
> then binomial(m, 3) * (3 * m - 5)/4 elif j = 3 then binomial(m, 4) * (m - 2) *
> (m - 3)/2 else 0 fi end;
```

$$\begin{array}{l}
\sigma := \mathbf{proc}(m, j) \\
\quad \mathbf{if}\ j = 0\ \mathbf{then}\ 1 \\
\quad \mathbf{elif}\ j = 1\ \mathbf{then}\ \mathrm{binomial}(m, 2) \\
\quad \mathbf{elif}\ j = 2\ \mathbf{then}\ 1/4 * \mathrm{binomial}(m, 3) * (3 * m - 5) \\
\quad \mathbf{elif}\ j = 3\ \mathbf{then}\ 1/2 * \mathrm{binomial}(m, 4) * (m - 2) * (m - 3) \\
\quad \mathbf{else}\ 0 \\
\quad \mathbf{end\ if} \\
\mathbf{end\ proc}
\end{array}$$

$\mathbf{E}((\psi(v))^k)$

```
> E_psi_v_k := proc(k)
> sum('alpha^(k - j) * sum('z^(lambda * i) * binomial(k, i) * (-lambda * b - b)^
> (k - i) * sigma(lambda * i + k, j)', 'i' = 0..k)', 'j' = 0..3) end;
```

$$\begin{array}{l}
E_psi_v_k := \mathbf{proc}(k) \\
\ \mathrm{sum}('\alpha^{(k-j)} * \\
\ \mathrm{sum}('z^{(\lambda * i)} * \mathrm{binomial}(k, i) * (-\lambda * b - b)^{(k-i)} * \sigma(\lambda * i + k, j)', 'i' = 0..k)', \\
\ 'j' = 0..3) \\
\mathbf{end\ proc}
\end{array}$$

$\mathbf{E}(\psi(v))$

```
> E_psi_v := alpha * (z^lambda - (lambda + 1) * b) + z^lambda * sum('sigma
> (lambda + 1, k + 1) * alpha^(-k)', 'k' = 0..2);
```

$$E\_psi\_v := \alpha(z^\lambda - (\lambda+1)b) + z^\lambda \Bigg(\mathrm{binomial}(\lambda+1, 2) + \frac{\frac{1}{4}\,\mathrm{binomial}(\lambda+1, 3)(3\lambda-2)}{\alpha} + \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{binomial}(\lambda+1, 4)(\lambda-1)(\lambda-2)}{\alpha^2} \Bigg)$$

```
> mu(4, b) := sort(collect(expand(algsubs(alpha^(-1) = 0, sort(collect
> (sum('binomial(4, k)*E_psi_v_k(k)*(-1)^(4-k)*E_psi_v^(4-k)',
> 'k' = 0..4)/alpha, alpha, simplify), alpha))*alpha), alpha, factor), alpha);
```

$$\mu(4,b) := 3\,(\lambda+1)^4\,(b-z^\lambda)^4\,\alpha^2 + (\lambda+1)^4\,(b-z^\lambda)^2 \times$$
$$\times\big(b^2 - 10\,b\,z^\lambda\,\lambda^2 - 8\,b\,z^\lambda\,\lambda - 2\,b\,z^\lambda + (z^\lambda)^2 +$$
$$+\,25\,(z^\lambda)^2\,\lambda^2 + 8\,(z^\lambda)^2\,\lambda\big)\,\alpha + O(1). \quad (26)$$

Мы закончили подготовительные исследования к доказательству основного результата настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть при* $N \to \infty$, $n = n(N) \to \infty$ *вероятности исходов полиномиальной схемы* $M(n, \bar{q})$ *удовлетворяют* У1 *и ограничению*

$$\frac{\sqrt{N}}{n^3 \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} q_j^3} = o(1), \quad (27)$$

и для вероятностей исходов $p_1, \ldots, p_N$, $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1$, *дополнительно имеют место соотношения* (5) *и условие*

$$\frac{n \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} q_j \Delta_j^2}{N + n \sum\limits_{j=1}^{N} q_j \Delta_j^2} = o(1), \quad (28)$$

где

$$\Delta_j = z_j^\lambda - \sum_{j=1}^{N} z_j^\lambda q_j, \qquad z_j = \frac{q_j}{p_j}.$$

Тогда распределение с. в.

$$(I(\lambda) - A_N)\,B_N^{-1},$$

где

$$A_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{2n}{\lambda(\lambda+1)}\,(z_j^\lambda - 1)\,q_j +$$
$$+\,z_j^\lambda\left(1 + \frac{(\lambda-1)(3\lambda-2)}{12}\,(nq_j)^{-1} + \frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{24}\,(nq_i)^{-2}\right)$$

и

$$B_N^2 = \sum_{j=1}^{N} 2z_j^{2\lambda} + \frac{4n}{\lambda^2}\,q_j\Delta_j^2 + 4z_j\Delta_j$$

сходится к $\mathcal{N}(0,1)$.

Доказательство заключается в проверке условий выполнения теоремы 1 применительно к статистике

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(\nu_j)$$

с учетом связи с $I(\lambda)$, даваемой равенством (17). В условиях (5) при $n\pi = n \min\limits_{1\leqslant j\leqslant N} q_j \to \infty$

$$\sigma_N^2 = B_N^2(1+o(1)).$$

Следовательно, из (20) и (27) вытекает оценка

$$\mathbf{E}\sum_{j=1}^{N} f_j(v_j) - A_N = O\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{-3}\right) = o(\sigma_N).$$

Отметим, что из (27) также следует $n\pi \to \infty$. Сходимость $\rho_N \to 0$, обоснованная в (21), позволяет заявить о выполнении У3 теоремы 1, и остается только убедиться в выполнении У2 на основе равенства (26), полагая $b = \sum\limits_{j=1}^{N} z_j^{\lambda} q_j$. Тогда

$$\mu = \sigma_N^{-4} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}\left(\varphi_j(v_j) - \mathbf{E}\varphi_j(v_j)\right)^4 = \sigma_N^{-4}\left(n^2 3(\lambda+1)^4 \sum_{j=1}^{N} q_j^2 \Delta_j^4 + \right.$$

$$\left. + n(\lambda+1)^4 \sum_{j=1}^{N} \Delta_j^2 \left(\Delta_j^2 + 8\lambda z_j^{\lambda} \Delta_j + 5\lambda^2 z_j^{\lambda}(5z_j^{\lambda} - 2b)\right) q_j + O(N)\right).$$

Из (5) вытекают неравенства $|\Delta_j| < 2c_2^{|\lambda|}$, $j = 1, \ldots, N$, $|b| < c_2^{|\lambda|}$ и, вследствие (20),

$$\mu = O\left(\frac{N + \sum\limits_{j=1}^{N} n^2 q_j^2 \Delta_j^4 + n\Delta_j^2 q_j}{\left(N + n\sum\limits_{j=1}^{N} q_j \Delta_j^2\right)^2}\right).$$

Последнее равенство показывает, что $\mu \to 0$ и, следовательно, выполнено У3, если имеет место (28), а также

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} n q_j \Delta_j^2}{N + n\sum\limits_{j=1}^{N} q_j \Delta_j^2} = O(1).$$

Последнее соотношение очевидным образом выполнено всегда, в силу ограниченности при $x > 1$, $y \geqslant 0$ функции $\dfrac{x}{x+y}$.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, и справедливость заключения теоремы 2 доказана.

В условиях теоремы 2 при $\lambda = 1$ асимптотика распределения $I(1)$ совпадает с полученным в [6] результатом.

Замечание 3. Ограничение (27) может быть ослаблено и заменено на требование существования любого s, при котором $n\pi N^{-1/(2s)} \to \to \infty$ при $N \to \infty$. Тогда выражения для приближения $\sum\limits_{j=1}^{N} \mathbf{E} f_j(v_j)$ следует, используя (9), вычислить более точно, получая разложения для $\mathbf{E} f(v)$ до s-го члена включительно. Последнее возможно сделать, если получить явные выражения чисел Стирлинга 2-го рода $\left\{ {m \atop m-s} \right\}$, которые, в свою очередь, продолжая равенства (7), могут быть получены из рекуррентного соотношения (6) как для положительных, так и для отрицательных m при $k > 3$.

Следствие 1. *При выполнении относительно полиномиальной схемы $M(n, \bar{q})$ гипотезы H_0 ($\bar{q} = \bar{p}$, $\Delta_j = 0$, $j = 1, \dots, N$) условий* (27) *и* У1 *достаточно для сходимости распределения с. в.*

$$(2N)^{-1/2}\left[I(\lambda) - N - \sum_{j=1}^{N} \frac{(\lambda-1)(3\lambda-2)}{12np_j} + \frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{24n^2p_j^2}\right]$$

к $\mathcal{N}(0,1)$ *при* $N \to \infty$.

Следствие 2. *Пусть условия* У1 *и* (27) *выполнены с заменой q_i на p_i, $i = 1, \dots, N$, для набора вероятностей исходов $p_1, \dots, p_N$, и пусть альтернативная гипотеза H_1 характеризуется вероятностями исходов $q_1, \dots, q_N$, «близкими» к основной гипотезе H_0 в следующем смысле*:

$$q_j = p_j(1+\delta_j), \qquad \max_{1\leqslant j\leqslant N} \delta_j^2 = o(n^{-1/2}), \qquad j = 1, \dots, N, \tag{29}$$

причем отклонения δ_j в определенном смысле равномерны, т. е. при $N \to \infty$

$$(\mathbf{E}^{-1}\delta^2) \max_{1\leqslant j\leqslant N} \delta_j^2 p_j \to 0, \tag{30}$$

где с. в. δ имеет распределение

$$\mathbf{P}\{\delta = \delta_i\} = p_i, \qquad i = 1, \dots, N.$$

Тогда распределение с. в.

$$(I(\lambda) - A)\, B^{-1}$$

сходится к $\mathcal{N}(0,1)$ *при* $N \to \infty$, *где*

$$A = n\mathbf{E}\,\delta^2 + N + \sum_{j=1}^{N} \lambda\delta_j + \frac{(\lambda-1)(3\lambda-2)}{12np_j} + \frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{24n^2p_j^2},$$

$$B^2 = 2N + 4n\mathbf{E}\,\delta^2.$$

Доказательство заключается в уточнении выражений A_N и B_N, определенных в теореме 2, а также в проверке выполнения (27) и (28) на основе получения разложений величин z_j^λ, Δ_j^λ и т. д. по степеням δ_j. Для «близких» гипотез в смысле выполнения (29) условие (27) выполнено как для $p_1, \dots, p_N$, так и для $q_1, \dots, q_N$. Учитывая (29), нетрудно убедиться, что

$$\sum_{j=1}^{N} z_j^\lambda - N - \sum_{j=1}^{N} \lambda\delta_j + \binom{\lambda}{2}\delta_j^2 = O\left(\sum_{j=1}^{N}\delta_j^3\right) = o\left(\frac{N}{n^{3/4}}\right) = o\left(\sqrt{N}\right),$$

$$n\sum_{j=1}^{N}(z_j^\lambda - 1)\,q_j - n\binom{\lambda+1}{2}\mathbf{E}\,\delta^2 = O\left(n\sum_{j=1}^{N}\delta_j^3 p_j\right) = O\left(n\mathbf{E}\,\delta^2 \max_{1\leqslant j\leqslant N}|\delta_j|\right) =$$

$$= O\left(\left(n\mathbf{E}\,\delta^2\right)^{1/2}\sqrt{n}\max_{1\leqslant j\leqslant N}\delta_j^2\right) = o\left(\left(n\mathbf{E}\,\delta^2\right)^{1/2}\right),$$

$$n\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2 q_j = n\lambda^2\mathbf{E}\,\delta^2(1+o(1)),$$

$$\Delta_j = \lambda\delta_j + \binom{\lambda}{2}\delta_j^2 - \binom{\lambda+1}{2}\mathbf{E}\,\delta^2 + O(\delta_j^3), \qquad j = 1, \dots, N,$$

причем последняя оценка $O(\delta_j^3)$ равномерна по всем $j = 1, \dots, N$. Тогда

$$A_N = A + o\left(N^{-1/2}\right), \qquad B_N^2 = B^2 + o(N)$$

и условие (28) вытекает из сходимости

$$\frac{n\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\delta_j^2 p_j}{N + n\mathbf{E}\,\delta^2} \to 0,$$

которая, в свою очередь, следует из (30). Этим доказательство следствия 2 заканчивается, поскольку все условия теоремы 2 выполнены.

Особый интерес следствие 2 представляет для статистических применений в силу зависимости величины A от λ. Эффективность различения гипотез H_0 и H_1 оказывается зависящей от параметра λ, определяющего вид статистики $I(\lambda)$, как только $\sum\limits_{j=1}^{N}\delta_j$ пропорционально или больше $\sqrt{N}$.

Нетрудно видеть, что если $p_j = \frac{1}{N}$, $j = 1, \dots, N$, то $\sum\limits_{j=1}^{N} \delta_j = 0$, и тогда зависимость эффективности различения H_0 и H_1 от λ асимптотически пропадает. Вместе с тем, можно указать соотношения, при которых зависимость от λ сохраняется, если рассматривается специальный класс гипотез H_0 и альтернатив H_1.

Следствие 3. *Пусть* $n = N^{3/2}$, *выполнено* (29),

$$\sum_{j=1}^{N} \delta_j = \Delta(1)\sqrt{N}, \qquad \mathbf{E}\delta^2 = \Delta(2)\,N^{-1}, \qquad \Delta(1), \Delta(2) = \mathrm{const} > 0$$

и

$$c_1 N^{-1} < p_j < c_2 N^{-1}, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Тогда при $N \to \infty$ *распределение с.в.*

$$\Big(I(\lambda) - N - \Delta(2)\sqrt{N} - \lambda\Delta(1)\sqrt{N}\Big)(2N)^{-1/2}$$

сходится к $\mathcal{N}(0, 1)$.

Доказательство заключается в простом вычислении асимптотического представления A, B в условиях следствия 3.

Возможность существования классов гипотез H_0 и альтернатив H_1, при которых $\Delta(1) > 0$ иллюстрируется следующим примером.

Пример. Пусть $f(x) = x + \frac{1}{2}$, $\delta(x) = (7 - 12x)d$, $d > 0$. Тогда

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1, \qquad \int_0^1 \delta(x)\,dx = d, \qquad \int_0^1 f(x)\delta(x)\,dx = 0$$

и, если положить

$$p_i = \frac{1}{N} f(x_i) + o(N^{-1}), \qquad x_i \in \left(\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right),$$

$$q_i = p_i(1 + \delta_i) + o(N^{-1}), \qquad \delta_i = \frac{1}{\sqrt{N}}\delta(x_i), \qquad i = 1, \dots, N,$$

то $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i = \sum\limits_{i=1}^{N} q_i = 1$, и все условия следствия 3 оказываются выполнены при $N \to \infty$, причем $\Delta(1) = d > 0$.

Приведенный пример показывает, что для существенно неравновероятных наборов вероятностей исходов $p_1, \dots, p_N$ эффективность различения гипотез H_0 и H_1 зависит от выбора параметра λ. Причем, чем больше $|\lambda|$, тем эффективность выше, т. е. статистика χ^2 не является оптимальной, как это имело место в случае равновероятных наборов $p_1, \dots$ $\dots, p_N$ (см. [8]). Вместе с тем, попытка взять сколь угодно большое λ,

моделируемое условием $\lambda \to \pm\infty$, будет необоснованной, поскольку мы доказывали основную теорему 2 при $N \to \infty$ и $\lambda = \mathrm{const}$. Вопрос о поведении распределения статистики $I(\lambda)$ при $N \to \infty$ и $\lambda \to \pm\infty$ остается открытым. Отметим лишь, что при $N = \mathrm{const}$ и $\lambda \to +\infty, -\infty$ статистика $I(\lambda)$ сходится, как указывается в [1], к $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \nu_j$ и $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \nu_j$ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Read T. R. G.*, *Gressie N. A. C.* Goodness of fit statistics for discrete multivariate data. — New York: Springer, 1988.
2. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы их применения. — М.: Наука, 1968.
3. *Иванов В. А.*, *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю.И.* Дискретные задачи в теории вероятностей. — В сб.: Итоги науки и техники. Серия: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Т. 22. — М.: ВИНИТИ, 1984, с. 3–59.
4. *Баранов А. П.*, *Баранов Ю. А.* Аппроксимация произвольных целочисленных моментов обобщенными факториальными степенями. — Дискрет. матем., 2005, т. 17, в. 1.
5. *Быков С. И.*, *Иванов В. А.* Об условиях асимптотической нормальности многомерных рандомизированных разделимых статистик. — Дискрет. матем., 1989, т. 1, в. 2, с. 57–64.
6. *Morris C.* Central limit theorems for multinomial sums. — Ann. Statist., 1975, v. 3, p. 165–188.
7. *Knuth D. E.* Two notes on notation. — Amer. Math. Monthly, 1992, v. 99, p. 403–422.
8. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* Разделимые статистики и проверка гипотез. Случай малых выборок. — Теор. вероятн. примен., 1978, т. 23, № 4, с. 796–806.
9. *Грехем Р.*, *Кнут Д.*, *Поташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.