Дискретная математика

том 23 выпуск 3 * 2011

УДК 519.24

Некоторые неравновероятные модели случайных подстановок

© 2011 г. Г. И. Ивченко, М. В. Соболева

Рассматривается двухпараметрическая модель случайных n-подстановок, обобщающая классическую модель A-подстановок, для которой изучается совместное распределение числа A-циклов и $\bar{A}$-циклов при различных конкретизациях подмножества $A \subset X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

1. Введение

В [1, 2] была введена общая параметрическая модель случайных подстановок, согласно которой произвольная подстановка s из симметрической группы S_n подстановок n-й степени наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\prod_i \theta_i^{c_i}$, где c_i — число циклов длины i подстановки s, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_i ic_i = n$ и $\theta = (\theta_1 \ldots, \theta_n)$, θ — параметр меры $\mathbf{P}_\theta$:

$$\mathbf{P}_\theta(s) = I\left(\sum_{i=1}^{n} ic_i = n\right)\frac{1}{H_n(\theta)}\prod_{i=1}^{n}\theta_i^{c_i}. \tag{1}$$

Здесь $I(\cdot)$ — индикатор и $H_n(\theta)$ — необходимый нормирующий множитель, имеющий вид

$$H_n(\theta) = n!\,[z^n]\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{z^i\theta_i}{i}\right\}, \tag{2}$$

здесь и далее $[z^n]f(z) = \mathrm{coef}_{z^n} f(z)$ — коэффициент при z^n в $f(z)$.

Пусть $\bar{c}(n) = (c_1, \ldots, c_n)$ есть цикловая структура случайной подстановки в модели (1) и

$$F_{n,\theta}(t) = \mathbf{E}_\theta\prod_{i=1}^{n} t_i^{c_i}$$

— ее производящая функция. Тогда [1, 2]

$$F_{n,\theta}(t) = \frac{H_n(t\times\theta)}{H_n(\theta)}, \tag{3}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_n)$ и $t\times\theta = (t_1\theta_1, \ldots, t_n\theta_n)$.

Как отмечается в [2], соотношение (3) может быть основой для изучения различных структурных свойств подстановок в рамках общей модели (1). В [2] также приводится ряд конкретных примеров применения такого общего подхода к изучению случайных подстановок, но при этом отмечается, что более детальное исследование случайных подстановок в общей модели (1) ждет своего решения.

В свете изложенного в [2], представляется естественным для продвижения в этой тематике рассмотреть различные конкретизации общей модели P_θ (скажем, ограничившись лишь двухпараметрическими моделями) и при этом акцентировать внимание на изучении лишь важнейших структурных характеристик подстановки (типа общего числа циклов конкретного типа). Такой характер и имеет настоящая работа. Мы рассматриваем некоторые естественные двухпараметрические модели, обобщающие классические (то есть равновероятные) модели A-подстановок, и в рамках этих моделей изучаем совместное распределение чисел A-циклов и $\bar{A}$-циклов случайной подстановки при различных конкретизациях множества $A \subseteq X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Постановка задачи и предварительные соотношения

Рассматривается множество $S_n = \{s\}$ подстановок степени n (n-подстановок), то есть множество из $n!$ взаимно однозначных отображений множества $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Каждая подстановка, как известно, может быть разложена в произведение независимых циклов. Говорят, что n-подстановка s принадлежит цикловому классу $\{1^{c_1}, 2^{c_2}, \ldots, n^{c_n}\}$, если она имеет c_i циклов длины i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Набор $\tilde{c}(n) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называется цикловой структурой подстановки s (ясно, что всегда $\sum_{i=1}^{n} i c_i = n$).

Пусть A есть заданное подмножество множества X_n и $\bar{A} = X_n \setminus A$. Циклы подстановки s, длины которых являются элементами подмножества A (соответственно, подмножества $\bar{A}$) будем называть A-циклами (соответственно, $\bar{A}$-циклами). Обозначим $c_A(n)$ $(c_{\bar{A}}(n))$ общее число A-циклов ($\bar{A}$-циклов) подстановки s:

$$c_A(n) = \sum_{i \in A} c_i, \qquad c_{\bar{A}}(n) = \sum_{i \in \bar{A}} c_i, \tag{4}$$

и введем на множестве S_n вероятностную меру, приписывающую каждой подстановке $s \in S_n$ вес, пропорциональный $\theta_1^{c_A(n)} \theta_2^{c_{\bar{A}}(n)}$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1, \theta_2 \geqslant 0$, — параметры меры. Эта мера представляет собой специальный случай общей меры (1) и имеет вид

$$\mathbf{P}_\theta(s) = I\left(\sum_{i=1}^{n} i c_i = n\right) \frac{\theta_1^{c_a(n)} \theta_2^{c_{\bar{A}}(n)}}{H_{nA}(\theta)}, \tag{5}$$

где

$$H_{nA}(\theta) = n!\, [z^n] \exp\left\{\theta_1 \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} + \theta_2 \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i}\right\}.$$

Здесь выражение в показателе экспоненты может быть заменено на

$$(\theta_1 - \theta_2) \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} + \theta_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} = -\theta_2 \ln(1 - z) + (\theta_1 - \theta_2) \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i},$$

либо на

$$\theta_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} (\theta_2 - \theta_1) \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} = -\theta_1 \ln(1 - z) + (\theta_2 - \theta_1) \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i},$$

следовательно,

$$H_{nA}(\theta) = n!\,[z^n](1-z)^{-\theta_2}\exp\left\{(\theta_1-\theta_2)\sum_{i\in A}\frac{z^i}{i}\right\}$$
$$= n!\,[z^n](1-z)^{-\theta_1}\exp\left\{(\theta_2-\theta_1)\sum_{i\in \bar{A}}\frac{z^i}{i}\right\}. \tag{6}$$

Далее, для производящей функции пары $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$ из представления (3) следует равенство

$$\Phi_{n\theta}(t_1,t_2;A) = \mathbf{E}_\theta t_1^{c_A(n)} t_2^{c_{\bar{A}}(n)} = \frac{H_{nA}(t_1\theta_1, t_2\theta_2)}{H_{nA}(\theta)}. \tag{7}$$

Нашей задачей является исследование распределения двумерной характеристики $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$ случайной подстановки в рассматриваемой (двухпараметрической) модели для различных вариантов заданий подмножества $A \subseteq X_n$.

Но прежде мы выделим некоторые, представляющее и самостоятельный интерес, следствия соотношений (6) и (7).

1. Положив $t_1 = t_2 = t$ в (7), получаем производящую функцию важнейшей характеристики случайной подстановки — общего числа ее циклов

$$c(n) = c_A(n) + c_{\bar{A}}(n) = \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

именно,

$$\mathbf{E}_\theta t^{c(n)} = \frac{H_{nA}(t\theta_1, t\theta_2)}{H_{nA}(\theta)}.$$

Если, кроме того, $\theta_1 = \theta_2 = \theta > 0$, то мы приходим к известной однопараметрической модели Эвенса [4], когда каждая подстановка $s \in S_n$ наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\theta^{c(n)}$. Для этого случая представление (6) принимает вид

$$H_{nA}(\theta) = n!\,[z^n](1-z)^{-\theta} = (-1)^n n!\binom{-\theta}{n}$$
$$= \theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1) = [\theta]_n$$

(эту комбинаторную формулу в дальнейшем мы будем неоднократно использовать), и мы приходим к известному результату [3]:

$$\mathbf{E}_\theta t^{c(n)} = \frac{[t\theta]_n}{[\theta]_n}.$$

Этот случай (распределение числа циклов $c(n)$ в модели Эвенса) детально исследован в литературе (см. [3]), в то же время представление (7) для двумерной случайной величины $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$, принимающее в данном случае вид

$$\Phi_{n,\theta}(t_1,t_2;A) = \frac{1}{[\theta]_n} n!\,[z^n](1-z)^{-\theta t_2}\exp\left\{\theta(t_1-t_2)\sum_{i\in A}\frac{z^i}{i}\right\}, \tag{8}$$

является новым результатом и для модели Эвенса.

2. Если в модели (5) положить $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \theta > 0$, то получим меру, сосредоточенную на подмножестве подстановок, имеющих лишь A-циклы, такие подстановки называются A-подстановками [5] и их изучению в рамках классической (равновероятной) модели посвящена обширная литература (см. [6, 7] и библиографию в них). Предложенная здесь модель позволяет, таким образом, изучать и неравновероятные A-подстановки.

Пусть $S_n(A)$ обозначает подмножество A-подстановок в S_n. Если на этом подмножестве задана параметрическая мера

$$\mathbf{P}_\theta(s) = \frac{1}{H_{nA}(\theta)} I\left(\sum_{i\in A} i a_i = n\right)\theta^{c_A(n)}, \qquad s \in S_n(A), \tag{9}$$

где теперь

$$H_{nA}(\theta) = n!\,[z^n]\exp\left\{\theta\sum_{i\in A}\frac{z^i}{i}\right\}, \tag{10}$$

то производящая функция общего числа циклов $c_A(n)$ такой случайной A-подстановки имеет вид

$$\Phi_{n\theta}(t; A) = \mathbf{E}_\theta t^{c_A(n)} = \frac{H_{nA}(t\theta)}{H_{nA}(\theta)}, \tag{11}$$

где $H_{nA}(\theta)$ дано в (10).

Если здесь положить $\theta = 1$, то мы получаем равновероятную на $S_n(A)$ модель: каждая подстановка $s \in S_n(A)$ наблюдается с вероятностью $H_{nA}^{-1}(1)$.

Замечание 1. Случай $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta > 0$ соответствует симметричному варианту — $\bar{A}$-подстановкам.

Далее мы разберем ряд наиболее популярных в литературе классов A-подстановок в контексте изложенного подхода.

3. Отметим, что из представления (7) следует общая формула для смешанных факториальных моментов случайных величин $c_A(n)$ и $c_{\bar{A}}(n)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\theta(c_A(n))_{r_1}(c_{\bar{A}}(n))_{r_2} &= \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}}\Phi_{n,\theta}(t_1, t_2; A)|_{t_1=t_2=1}\\ &= \theta_1^{r_1}\theta_2^{r_2}\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial\theta_1^{r_1}\partial\theta_2^{r_3}}H_{nA}(\theta_1\theta_2)/H_{nA}(\theta),\end{aligned}$$

здесь и далее

$$(a)_r = a(a-1)\cdots(a-r+1), \quad r \geqslant 1, \quad (a)_0 = 1.$$

Введя для краткости обозначение

$$f_\theta(z) = \exp\left\{\theta_1\sum_{i\in A}\frac{z^i}{i} + \theta_2\sum_{i\in\bar{A}}\frac{z^i}{i}\right\},$$

отсюда, в частности, получаем следующие представления для первых двух моментов:

$$\mathbf{E}_\theta c_A(n) = \theta_1 [z^n] \left(\sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right) f_\theta(z) / [z^n] f_\theta(z),$$

$$\mathbf{E}_\theta c_{\bar{A}}(n) = \theta_2 [z^n] \left(\sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right) f_\theta(z) / [z^n] f_\theta(z),$$

$$\mathbf{E}_\theta c_A^2(n) = \theta_1^2 [z^n] \left(\sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right)^2 f_\theta(z) / [z^n] f_\theta(z) + \mathbf{E}_\theta c_A(n),$$

$$\mathbf{E}_\theta c_{\bar{A}}^2(n) = \theta_2^2 [z^n] \left(\sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right)^2 f_\theta(z) / [z^n] f_\theta(z) + \mathbf{E}_\theta c_{\bar{A}}(n),$$

$$\mathbf{E}_\theta c_A(n) c_{\bar{A}}(n) = \theta_1 \theta_2 [z^n] \left(\sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right) \left(\sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right) f_\theta(z) / [z^n] f_\theta(z), \tag{12}$$

Эти общие представления могут быть основой для вычисления моментов рассматриваемых характеристик случайной подстановки при различных конкретизациях подмножества A.

3. d-инволюции

В теории подстановок важное значение имеют решения уравнения

$$s^d = e, \qquad s \in S_n, \tag{13}$$

где d — натуральное число, а e — единичная подстановка, эти решения мы будем называть d-инволюциями. Известно, что такие подстановки состоят из циклов, длины которых являются делителями числа d. Таким образом, решения уравнения (13) образуют подмножество A-подстановок $S_n(A)$ при $A = \{i : i \mid d\}$, $d \geqslant 2$, $i \mid d$ означает, что i делит d.

Если $d = 2$, то решение уравнения (13) называется просто инволюцией. Инволюция содержит только циклы длин 1 и 2 и, следовательно, является A-подстановкой при $A = \{1, 2\}$.

Будем считать, что d — простое число, тогда функция $H_{nA}(\theta$ (см. (6)) для этого случая имеет вид

$$H_{nA}(\theta) = n!\,[z^n](1-z)^{-\theta} \exp\{\theta_1 - \theta_2)(z + z^d/d)\}. \tag{14}$$

Разложим здесь экспоненту в ряд по степеням z и получим

$$\exp\{\theta_1 - \theta_2)(z + z^d/d)\} = \left(\sum_{r \geqslant 0} \frac{(\theta_1 - \theta_2)^r}{r!} z^r \right) \left(\sum_{j \geqslant 0} \frac{(\theta_1 - \theta_2)^j}{d^j\, j!} z^{dj} \right)$$
$$= \sum_{m \geqslant 0} a_{m,d}(\theta_1 - \theta_2) z^m, \tag{15}$$

где

$$a_{m,d}(u) = \sum_{j \leqslant m/d} \frac{u^{m-(d-1)j}}{d^j j!\,(m-dj)!},$$

и запишем явное представление для $H_{nA}(\theta)$ в виде комбинаторной суммы

$$H_{nA}(\theta) = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{a_{m,d}(\theta_1 - \theta_2)}{(n-m)!} [\theta_2]_{n-m}. \tag{16}$$

Производящая функция (11) числа циклов в такой случайной A-подстановке имеет, следовательно, вид

$$\Phi_{n\theta}(t; A) = \frac{a_{n,d}(t\theta)}{a_{n,d}(\theta)} \frac{\displaystyle\sum_{j \leqslant n/d} \frac{(t\theta)^{n-(d-1)j}}{d^j j!\,(n-jd)!}}{\displaystyle\sum_{j \leqslant n/d} \frac{\theta^{n-(d-1)j}}{d^j j!\,(n-jd)!}}. \tag{17}$$

4. d-конгруэнтность

Будем говорить, что подстановка $s \in S_n$ обладает свойством d-конгруэнтности, если длины всех циклов кратны числу $d \geqslant 2$, то есть эта подстановка есть A-подстановка при $A = \{kd, k = 1, 2, \dots\}$.

При таком задании множества A формула (6) принимает вид

$$\begin{aligned} H_{nA}(\theta) &= n!\,[z^n](1-z)^{-\theta_2} \exp\left\{(\theta_1 - \theta_2)\frac{1}{d} \sum_{k \geqslant 1} \frac{z^{kd}}{k}\right\} \\ &= n!\,[z^n](1-z)^{-\theta_2} \exp\left\{-\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{d} \ln(1 - z^d)\right\} \\ &= n!\,[z^n](1-z)^{-\theta_2}(1 - z^d)^{-(\theta_1 - \theta_2)/d}, \end{aligned} \tag{18}$$

что можно записать в виде следующей комбинаторной суммы:

$$H_{nA}(\theta) = \sum_{k \leqslant n/d} \frac{[(\theta_1 - \theta_2)/d]_k [\theta_2]_{n-kd}}{k!\,(n-kd)!}. \tag{19}$$

Отсюда мы можем получить явные формулы как для совместной производящей функции (7) пары $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$, где в данном случае $c_A(n)$ — число d-конгруэнтных циклов случайной подстановки, а $c_{\bar{A}}(n)$ — число остальных (не конгруэнтных) ее циклов, так и для производящей функции (12) числа циклов случайной A-подстановки. В последнем случае (при $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \theta > 0$) формула (19) принимает вид

$$H_{nA}(\theta) = \frac{n!}{(n/d)!} [\theta/d]_{n/d}, \tag{20}$$

если n кратно d, и $H_{nA}(\theta) = 0$ в противном случае.

Отметим важный частный случай $d = 2$. В этом случае $c_A(n)(c_{\bar{A}}(n))$ — число циклов четной (нечетной) длины в подстановке, и для подстановок четной степени, то есть при $n = 2n_0$, из (12) и (20) следует, что

$$\begin{aligned}\Phi_{2n_0\theta}(t;A) &= \mathbf{E}_\theta t^{c_A(n)} = [t\theta/2]_{n_0}/[\theta/2]_{n_0} \\ &= t\,\frac{(t\theta+2)(t\theta+4)\cdots(t\theta+2(n_0-1))}{(\theta+2)(\theta+4)\cdots(\theta+2(n_0-1))} \\ &= t\prod_{i=1}^{n_0-1}(q_{\theta i}+tp_{\theta i}),\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$p_{\theta i} = 1 - q_{\theta i} = \frac{\theta}{\theta+2i}.$$

Из представления (21) следует, что $\Phi_{2n_0,\theta}(t;A)$ есть производящая функция независимых бернуллиевских случайных величин, таким образом, в данном случае имеет место представление

$$c_A(n) = 1 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n_0-1}, \tag{22}$$

где слагаемые независимы и

$$\mathbf{P}(\xi_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(\xi_i = 0) = p_{\theta i}, \qquad i = 1,\ldots,n_0-1.$$

Отметим, что аналогичное разложение на сумму независимых бернуллиевских слагаемых общего числа циклов случайной подстановки в модели Эвенса было получено в [3], поэтому результаты этой работы могут быть непосредственно переформулированы для рассматриваемого нами случая (это будет сделано позже).

Замечание 2. Для изучения числа $c_{\bar{A}}(n)$ циклов нечетной длины в (18) надо положить $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta > 0$ (напомним, что $d = 2$), что дает следующий результат:

$$H_{nA}(\theta) = n!\,[z^n]\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\theta/2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\theta}{2}\right)_k\left[\frac{\theta}{2}\right]_{n-k}. \tag{23}$$

Отсюда видно, насколько сложнее задача изучения распределения числа циклов случайной $\bar{A}$-подстановки (имеющей лишь циклы нечетной длины).

5. $A(r)$-циклы

Пусть подмножество A имеет вид

$$A(r) = \{I : i \leqslant r\}, \qquad r \geqslant 2$$

(длины циклов ограничены числом r). Для этого случая формула (6) принимает вид

$$\begin{aligned}H_{nA(r)}(\theta) &= n!\,[z^n](1-z)^{-\theta_2}\exp\left\{(\theta_1-\theta_2)\sum_{i=1}^{r}\frac{z^i}{i}\right\} \\ &= n!\,[z^n](1-z)^{-\theta_1}\exp\left\{(\theta_2-\theta_1)\sum_{i>r}\frac{z^i}{i}\right\}.\end{aligned} \tag{24}$$

Отметим, что при $r = 2$ этот результат совпадает с (14) в случае $d = 2$.

Итак, изучение совместного распределения чисел $A(r)$-циклов $c_{A(r)}(n) = \sum_{i \leqslant r} c_i$ и $\bar{A}(r)$-циклов $c_{\bar{A}(r)}(n) = \sum_{i > r} c_i$ случайной n-подстановки в модели (5) может быть основано на исследовании совместной производящей функции (7) этих характеристик с $H_{nA(r)}(\theta)$, указанным в (24).

Рассмотренные примеры, на наш взгляд, убедительно демонстрируют как достаточную универсальность предложенной методики, так и присущие ей сложности: за исключением отдельных случаев (типа (21)–(22)), точные решения в обсуждаемой проблематике имеют форму громоздких комбинаторных выражений, из которых проблематично извлечь конкретную информацию (хотя бы, например, вычислить средние и дисперсии величин $c_A(n)$ и $c_{\bar{A}}(n)$).

Поэтому дальнейшее продвижение в этой тематике можно осуществить лишь на пути асимптотического анализа, предполагая что степень подстановки стремится к бесконечности, как это обычно делается в теории случайных подстановок в классической (равновероятной) модели.

Детальный асимптотический анализ предложенной модели будет проведен в следующей работе, а здесь в завершение мы анонсируем один из соответствующих результатов.

Применение метода перевала для случая d-конгруэнтных циклов (см. параграф 4) показывает, что при $n \to \infty$ случайные величины $c_A(n)$ и $c_{\bar{A}}(n)$ асимптотически независимы и асимптотически нормальны с параметрами, соответственно, $(((\theta_1/d)\ln n, (\theta_1/d)\ln n)$, $(((d-1)\theta_2/d)\ln n, (((d-1)\theta_2)/d)\ln n)$. В частности, отсюда следует, что общее число циклов $c(n) = \sum_{j=1}^{n} c_j(n)$ в такой двухпараметрической модели асимптотически нормально со средним и дисперсией, асимптотически эквивалентными $((\theta_1 + (d-1)\theta_2)/d)\ln n$.

Замечание 3. В заключение отметим, что изложенная методика допускает следующее многомерное обобщение. Пусть задано разбиение множества $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$X_n = \bigcup_{j=1}^{N} A_j, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad n \geqslant 2,$$

и $c_{A_j}(n) = \sum_{i \in A_j} c_i$ есть число A_j-циклов для произвольной подстановки $s \in S_n$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Далее, введем на множестве S_n вероятностную меру вида

$$\mathbf{P}_\theta(s) = I\left(\sum_{i=1}^{n} i c_i = n\right) \prod_{j=1}^{N} \theta_j^{c_{A_j}} / H_n(\theta), \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N), \quad \theta \geqslant 0,$$

где теперь

$$H_n(\theta) = n!\,[z^n] \exp\left\{\sum_{j=1}^{N} \theta_j \sum_{i \in A_j} \frac{z^i}{i}\right\}. \tag{25}$$

Тогда для совместной производящей функции вектора $(c_{a_j}(n), j = 1, \ldots, N)$ справедливо представление (аналог (7))

$$\mathbf{E}_\theta \prod_{j=1}^{N} t_i^{c_{A_j}(n)} = H_n(t \times \theta)/H_n(\theta), \qquad t \times \theta = (t_1\theta_1, \ldots, t_N\theta_N). \tag{26}$$

Такая конструкция позволяет, в принципе, изучать и такие ситуации, когда какие-то A-циклы в подстановке запрещены (в (25)–(26) надо соответствующие параметры θ_j положить равными нулю), а нам важна информация не просто о числе остальных циклов, но и об их более детальной структуризации.

Список литературы

1. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Случайные комбинаторные объекты. *Доклады РАН* (2004) **396**, №2, 151–154.
2. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Случайные подстановки: общая параметрическая модель. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 105–112.
3. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., О случайных подстановках. *Труды по дискретной математике* (2002) **5**, 73–92.
4. Ewens W. I., The sampling theory of selectively neutral alleles. *Theor. Popul. Biol.* (1972) **3**, 87–112.
5. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. МЦНМО, Москва, 2004.
6. Якымив А. Л., *Вероятностные приложения тауберовых теорем*. Физматлит, Москва, 2005.
7. Якымив А. Л., Предельная теорема для логарифма порядка случайной A-подстановки. *Дискретная математика* (2010) **22**, №1, 126–149.

Статья поступила 6.04.2011.