ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

Кафедра высшей математики

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
сборник заданий для курсовой работы

Москва 2013

Составители: канд. физ.-мат. наук В.Н. Деменко,
д-р физ.-мат. наук Р. С. Исмагилов, канд. физ.-мат. наук А. Г. Федотов

Сборник задач для курсовой работы "Элементарные асимптотические методы"./ Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета "Высшая школа
экономики"; Сост. В.Н. Деменко, Р. С. Исмагилов, А. Г. Федотов, М., 2013.-
15 с.

Сборник заданий для курсовой работы является составной частью учебно-методического комплекса по математическому анализу. Приведены примеры решения предлагаемых задач, а также к части из заданий ("тренировочным") даны ответы.

Предназначен для студентов I курса факультета прикладной математики и кибернетики, 3 модуль.

ISBN 978–5–94506–311–2

В задачах 1.1 – 1.30 написать асимптотические формулы для данной $f(x)$ при $x \to 0$, причем в ответе должно быть не менее двух членов асимптотической формулы, не считая остатка.

1.1 $f(x) = \ln\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x}\right)$.

Решение. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x} = \frac{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)} = \frac{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + O(x^6)}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + O(x^6)} =$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + O(x^6)\right) \times$$

$$\times \left(1 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + O(x^6)\right) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + O(x^6)\right)^2 + O(x^6)\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + O(x^6)\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5} + O(x^6) + \frac{x^4}{9} + O(x^6)\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + O(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{4x^4}{45} + O(x^6)\right) =$$

$$= 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{7x^4}{45} + O(x^6).$$

$$\ln\left(1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{7x^4}{45} + O(x^6)\right) = \left(\frac{2x^2}{3} + \frac{7x^4}{45} + O(x^6)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{7x^4}{45} + O(x^6)\right)^2 + O(x^6) = \frac{2x^2}{3} + \frac{7x^4}{45} + O(x^6) - \frac{2x^4}{9}.$$

Ответ: $f(x) = \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{x^4}{15} + O(x^6), \qquad x \to 0.$

1.2 $f(x) = (1+x)^{1/x}, \quad x \to 0.$

1.3 $f(x) = \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right)^{\operatorname{ctg} x}, \quad x \to 0.$

1.4 $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sin x}{x}} - \ln\dfrac{1+x}{1+2x}, \quad x \to 0;$

1.5 $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x), \quad x \to 0;$

1.6 $f(x) = \left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{1/x}, \quad x \to 0.$

1.7 $f(x) = \Big(\dfrac{e^x - 1}{x}\Big)^{1/x}, \quad x \to 0.$

1.8 $f(x) = \Big(\dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}\Big)^{1/x}, \ x \to 0.$

1.9 $f(x) = \Big(\dfrac{2(x - \ln(1+x))}{x^2}\Big)^{1/x}, \ x \to 0.$

1.10 $f(x) = (1 + \ln\cos x)^{1/x^2}, \ x \to 0.$

1.11 $f(x) = \Big(\dfrac{2^x - 1}{x\ln 2}\Big)^{1/x}, \quad x \to 0.$

1.12 $f(x) = \sqrt{\cos x + \sin x}, \ x \to 0;$

1.13 $f(x) = \Big(\dfrac{2^x + 1}{2}\Big)^{1/\sin x}, \ x \to 0.$

1.14 $f(x) = \ln\dfrac{x}{\sin x}, \ x \to 0;$

1.15 $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x - \sin x}, \ x \to 0;$

1.16 $f(x) = (\cos x)^{1/(x\sin x)}, \ x \to 0.$

1.17 $f(x) = (\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x})^{1/x^2}, \ x \to 0.$

1.18 $f(x) = \Big(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\Big)^{1/x}, \ x \to 0; \ a, b, c > 0.$

1.19 $f(x) = (\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x})^{1/x^2}, \ x \to 0.$

1.20 $f(x) = (\dfrac{\arcsin x}{x})^{\operatorname{ctg} x}, \ x \to 0.$

1.21 $f(x) = \sqrt[3]{\arcsin x}, \ x \to +0;$

1.22 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}}, \ x \to 0;$

1.23 $f(x) = \ln(\sqrt{\cos x} + x^2), \quad x \to 0;$

1.24 $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x), \ x \to 0;$

1.25 $f(x) = (\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x})^{1/x}, \ x \to 0.$

1.26 $f(x) = (\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x})^{1/x}, \ x \to 0.$

1.27 $f(x) = \sqrt{1 + \ln\cos x}; \quad x \to 0$

1.28 $f(x) = (\cos x)^{1/x}, \quad x \to 0.$

1.29 $f(x) = \ln\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$, $x \to 0$;

1.30 $f(x) = (\cos x)^{x^{-3}\sin x}$, $x \to 0$.

В задачах 2.1 – 2.30 написать асимптотические формулы для данной $f(x)$ при $x \to \infty$, причем в ответе должно быть не менее двух членов асимптотической формулы, не считая остатка.

2.1 $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}, \quad x \to \infty.$

Решение.

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)} = \frac{x}{1 + \frac{1}{3x^2} + O(\frac{1}{x^4})} =$$

$$= x\left(1 + \left(-\frac{1}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) + \left(-\frac{1}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)^2 + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) =$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = x - \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \left(x - \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) =$$

$$= -1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} = e^{-1}e^{\frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Ответ: $f(x) = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \quad x \to \infty.$

2.2 $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \ln\cos\frac{1}{x}, \quad x \to \infty;$

2.3 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3+x}{x^3+1}} - e^{x/(x^2+1)}, \quad x \to +\infty$

2.4 $f(x) = \frac{(x+1)^x}{(x+2)^{x+1}}$, $x \to +\infty$.

2.5 $f(x) = \sqrt[4]{x^4+x^3} - \frac{x^3\sin(1/x)}{x+1}$, $x \to \infty$;

2.6 $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x-1}}$, $x \to +\infty$;

2.7 $\sqrt{x^3+2x^2+x} + x\cos\dfrac{1}{x+1}$, $\quad x \to +\infty$;

2.8 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x+1}} - x^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to \infty$

2.9 $f(x) = \sqrt{x^3+x^2} - \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x \to +\infty$;

2.10 $f(x) = \sin\dfrac{x}{x^2+1} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}$, $\quad x \to +\infty$;

2.11 $f(x) = \sqrt{x^4+2x^2-2x} - x^2\cos\dfrac{x}{x^2+1}$, $\quad x \to +\infty$.

2.12 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^4+x^2}{x+1}} + x^2\ln\dfrac{x}{x+1}$, $\quad x \to \infty$

2.13 $f(x) = \sqrt[5]{x^4+2x^2+x} - x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{x^2+1}$, $\quad x \to \infty$.

2.14 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$, $x \to \infty$

2.15 $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+3x^2}$, $x \to \infty$

2.16 $f(x) = \sqrt[5]{x^5+(x+1)^5}$, $x \to +\infty$;

2.17 $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x^2\sin\frac{1}{x}}$, $x \to \infty$.

2.18 $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+7} - x\sin\dfrac{x}{x^2+1}$, $\quad x \to +\infty$

2.19 $f(x) = \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$, $x \to \infty$.

2.20 $f(x) = \sin\left(\pi\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)$, $x \to \infty$;

2.21 $f(x) = \sqrt[3]{x\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{x^2+1}}$, $x \to \infty$;

2.22 $f(x) = \sqrt[5]{\cos\dfrac{x}{x^2+1}}$, $x \to \infty$;

2.23 $f(x) = \sqrt[5]{x^2+2x^2+3} - x\sin\left(\dfrac{1}{x+3}\right)$, $x \to \infty$;

2.24 $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\mathrm{ctg}\,\frac{1}{x}}$, $x \to \infty$.

2.25 $f(x)=\dfrac{(x+\sqrt{x})^x}{(x-\sqrt{x})^{x-1}}$, $x\to\infty$.

2.26 $f(x)=\sqrt[5]{x^2+x+3}-x\arcsin\dfrac{1}{x+1}$, $x\to+\infty$

2.27 $f(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x-2}$, $x\to+\infty$.

2.28 $f(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$, $x\to\infty$.

2.29 $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}}$, $x\to\infty$;

2.30 $f(x)=\sqrt[4]{x^3+2x^2+x}-x\ln\dfrac{x}{x+2}$, $x\to+\infty$

В задачах 3.1 – 3.30 требуется, используя формулу Тейлора, найти асимптотику корней уравнения, причем в ответе должно быть не менее двух членов асимптотики, не считая остатка.

3.1 $\sin x=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Решение. Корни уравнения – абсциссы точек пересечения графиков $y=\sin x$ и $y=1+\dfrac{1}{x+1}$. Очевидно, что они расположены на отрицательной части действительной оси левее точки $x=-2$ и составляют две серии: $x_n^+=-\dfrac{3\pi}{2}+\alpha_n^+-2\pi n$ и $x_n^-=-\dfrac{3\pi}{2}+\alpha_n^--2\pi n$ $(n\to+\infty)$, где α_n^+ и α_n^- соответственно положительная и отрицательная бесконечно малые последовательности. Для того чтобы оценить бесконечно малые $\alpha_n^\pm$, подставим $x_n^\pm$ в уравнение:

$$\sin x_n^\pm=1+\frac{1}{x_n^\pm+1}.$$

Воспользуемся периодичностью функции $y=\sin x$ и формулой синуса суммы:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha_n^\pm-2\pi n\right)=\cos(\alpha_n^\pm)=1-\frac{(\alpha_n^\pm)^2}{2}+o((\alpha_n^\pm)^2).$$

Справа же имеем:

$$1+\frac{1}{-\dfrac{3\pi}{2}+\alpha_n^\pm-2\pi n+1}=1-\frac{1}{2\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Приравняем обе части:

$$1-\frac{(\alpha_n^\pm)^2}{2}+o((\alpha_n^\pm)^2)=1-\frac{1}{2\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

получим $(\alpha_n^\pm)^2\sim\dfrac{1}{\pi n}$, то есть $\alpha_n^\pm=\dfrac{\pm1}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ответ: $x_n^{\pm} = -2\pi n - \dfrac{3\pi}{2} \pm \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad x \to +\infty.$

3.2 $\quad \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{x} = 0, \quad x > 0$

3.3 $\quad \cos x = \dfrac{1}{3x+1}, \quad x > 0$

3.4 $\quad \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{1-2x}, \quad x > 0$

3.5 $\quad \sin x - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0, \quad x > 0$

3.6 $\quad \sin x + \cos x = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

3.7 $\quad \sin x - \cos x = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

3.8 $\quad \operatorname{tg} x + x = 0$

3.9 $\quad \operatorname{ctg} x + x = 0, \quad x > 0$

3.10 $\quad \sin x + \dfrac{1}{x} = 0, \quad x > 0$

3.11 $\quad \cos x + \dfrac{1}{x} = 0, \quad x > 0$

3.12 $\quad \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{x^2} = 0, \quad x > 0$

3.13 $\quad \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$

3.14 $\quad \sin x - \dfrac{1}{x^2} = 0, \quad x > 0$

3.15 $\quad \cos x = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

3.16 $\quad \sin x = \dfrac{1}{x+1}, \quad x > 0$

3.17 $\quad \cos x - \dfrac{1}{x-1} = 0, \quad x > 0$

3.18 $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{x+2}, \quad x > 0$

3.19 $\quad \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x-3} = 0, \quad x > 0$

3.20 $\quad \sin x = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

3.21 $\quad \cos x = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

3.22 $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2x+1}, \quad x > 0$

3.23 $\quad \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x} = 0, \quad x > 0$

3.24 $\quad \sin x = \dfrac{1}{4x+1}, \quad x > 0$

3.25 $\quad \cos x = \dfrac{1}{5x-2}, \quad x > 0$

3.26 $\quad \sin x + \cos x = \sqrt{\dfrac{1}{2x}}, \quad x > 0$

3.27 $\quad \operatorname{tg} 2x + 3x = 0, \quad x > 0$

3.28 $\quad \operatorname{tg}(2x+1) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

3.29 $\quad \sin x = \dfrac{x}{x+1}, \quad x > 0$

В задачах 4.1 – 4.30 требуется написать асимптотическое представление функции, заданной интегралом. Рекомендуется использовать интегрирование по частям. Требуется записать два члена асимптотической формулы.

4.1 $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{t}}{t^2} dt, \qquad x \to +\infty.$

`Решение`. После замены переменных $t = \tau^2$ наш интеграл примет вид:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{2\cos\tau d\tau}{\tau^3}.$$

Далее воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$F(x) = 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{d(\sin\tau)}{\tau^3} = \frac{2\sin\tau}{\tau^3}\bigg|_{\sqrt{x}}^{+\infty} - 2\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \sin\tau \, d\left(\frac{1}{\tau^3}\right) =$$

$$= -2\,\frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + 6\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^4}d\tau.$$

Проинтегрируем по частям еще раз:

$$6\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^4}d\tau = -6\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{1}{\tau^4}d\left(\cos\tau\right) = -6\left.\frac{\cos\tau}{\tau^4}\right|_{\sqrt{x}}^{+\infty} + 6\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\cos\tau\,d\left(\frac{1}{\tau^4}\right) =$$

$$= 6\frac{\cos\sqrt{x}}{x^2} - 24\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\cos\tau}{\tau^5}\,d\tau.$$

Так как $\dfrac{\cos\tau}{\tau^5} = o\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau^4}\right)$ при $\tau\to+\infty$, то

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\cos\tau}{\tau^5}dt = o\left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^4}d\tau\right)\qquad(x\to+\infty).$$

Поэтому

$$6\frac{\cos\sqrt{x}}{x^2} = 6\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^4}d\tau + o\left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^4}d\tau\right),\quad(x\to+\infty),$$

то есть функции $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{x^2}$ и $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^4}d\tau$ эквивалентны при $x\to+\infty$. Но тогда

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\tau^4}d\tau = \frac{\cos\sqrt{x}}{x^2} + o\left(\frac{\cos\sqrt{x}}{x^2}\right),\quad x\to+\infty.$$

Ответ: $\quad F(x) = -2\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + 6\dfrac{\cos\sqrt{x}}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right),\qquad x\to+\infty.$

4.2 $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt,\quad x\to+\infty;$

4.3 $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^{x}\frac{e^{t}}{t}\,dt,\quad x\to+\infty;$

4.4 $\quad F(x) = \displaystyle\int_2^{x}\frac{dt}{\ln t},\quad x\to+\infty;$

4.5 $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}dt,\quad x\to+\infty;$

4.6 $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{(\ln t)^{10}}{t\sqrt{t}}\,dt,\quad x\to+\infty;$

4.7 $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}t^2e^{-\sqrt{t}}\,dt,\quad x\to+\infty;$

4.8 $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t^3}}\,dt,\quad x\to+\infty;$

4.9 $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t^3}\,dt,\quad x\to\infty;$

4.10 $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t\sqrt{t}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.11 $F(x) = \int_x^{+\infty} \sqrt{t^2+1}\, e^{-t}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.12 $F(x) = \int_x^{+\infty} \sqrt{\frac{\ln t}{t+1}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.13 $F(x) = \int_0^{x} \sqrt[3]{t} e^{t^2}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.14 $F(x) = \int_x^{+\infty} t^{3/2} e^{-t^2} dt, \quad x \to +\infty;$

4.15 $F(x) = \int_2^{x} \sqrt{t \ln t}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.16 $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t+1}} dt, \quad x \to +\infty;$

4.17 $F(x) = \int_1^{x} \frac{e^{2t}}{(t+1)^2}\, dt, \quad x \to \infty;$

4.18 $F(x) = \int_1^{x} \frac{e^{\sqrt{t}}}{t^2}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.19 $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3+2}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.20 $F(x) = \int_5^{x} \frac{dt}{\sqrt{\ln t}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.21 $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^2+1}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.22 $F(x) = \int_2^{x} t \sqrt[3]{\frac{\ln t}{t^5}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.23 $F(x) = \int_x^{+\infty} t^3 e^{-2t}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.24 $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{t+1}}{t\sqrt{t+1}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.25 $F(x) = \int_0^{x} \frac{e^{t}}{\sqrt{t+1}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.26 $F(x) = \int_x^{+\infty} \sqrt{t+2} e^{-2t}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.27 $F(x) = \int_x^{+\infty} t^2 e^{-3t}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.28 $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t^2}{t\sqrt{t}}\, dt, \quad x \to +\infty;$

4.29 $F(x) = \int_1^x \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t^3}}\,dt, \quad x \to +\infty;$

4.30 $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t^2}{\sqrt[3]{t^4}}\,dt, \quad x \to +\infty;$

В задачах 5.1 – 5.30 требуется написать асимптотическое представление функции, заданной интегралом. Асимптотическое представление должно быть доведено до члена, являющегося бесконечно малой функцией при $x \to$. При решении рекомендуется использовать формулу Тейлора. (Подробнее см. в методических указаниях к курсовой работе).

5.1 $F(x) = \int_x^1 \frac{e^{\arcsin t}}{t}dt, \qquad x \to +0.$

`Решение.` Имеем

$\arcsin t = t + O(t^3) \sim t, \quad x \to 0,$

$e^{\arcsin t} = 1 + \frac{t + O(t^3)}{1!} + \frac{(t + O(t^3))^2}{2!} + O(t^3) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3),$

$\frac{e^{\arcsin t}}{t} = \frac{1}{t} + 1 + \frac{t}{2} + O(t^2),$

$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t} + \int_x^1 \left(\frac{e^{\arcsin t}}{t} - \frac{1}{t}\right) dt = \ln t\,|_x^1 + \int_0^1 \left(\frac{e^{\arcsin t}}{t} - \frac{1}{t}\right) dt-$

$- \int_0^x \left(\frac{e^{\arcsin t}}{t} - \frac{1}{t}\right) dt = -\ln x + A - \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} + O(t^2)\right).$

Ответ: $F(x) = -\ln x + A - x - \frac{x^2}{4} + O(x^3), \quad x \to +0.$

5.2 $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t^2+1}\,dt, \quad x \to +\infty.$

5.3 $F(x) = \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt, \quad x \to +0.$

5.4 $F(x) = \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t dt, \quad x \to +\infty.$

5.5 $F(x) = \int_x^1 \frac{e^{\sin t}}{t^2}\,dt, \quad x \to 0+.$

5.6 $F(x) = \int_x^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3}\,dt, \quad x \to 0+.$

5.7 $F(x) = \int_x^1 \frac{\ln(t + \sqrt{1+t^2})}{t^2}\,dt, \quad x \to 0+.$

5.8 $F(x) = \int_x^1 \frac{e^{\operatorname{tg} t}}{t}dt, \quad x \to 0+.$

5.9 $F(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt[4]{16+t}}{t^{3/2}}\, dt, \quad x \to 0.$

5.10 $F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^{3/2}\sqrt{t^2+1}}, \quad x \to +0.$

5.11 $F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^3+t^6}}, \quad x \to +0.$

5.12 $F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{e^t-1}, \quad x \to +0.$

5.13 $F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sin t}, \quad x \to +0.$

5.14 $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t^3+3t^2}\, dt, \quad x \to \infty.$

5.15 $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t^3+3t}\, dt, \quad x \to \infty.$

5.16 $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t+\sqrt{t}}}, \quad x \to \ +\infty.$

5.17 $F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^3} dt, \quad x \to +0.$

5.18 $F(x) = \int_1^x \sqrt{t+1}\, e^{1/t} dt, \quad x \to +\infty.$

5.19 $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t^4+3t^3} \cos\frac{1}{t}\, dt, \quad x \to +\infty.$

5.20 $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t^4+4t^3} \sin\frac{1}{t}\, dt, \quad x \to +\infty.$

5.21 $F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt, \quad x \to +\infty.$

5.22 $F(x) = \int_1^x t e^{1/t}\, dt, \quad x \to +\infty.$

5.23 $F(x) = \int_0^x \sqrt{t^3+t}\, dt, \quad x \to +\infty.$

5.24 $F(x) = \int_0^x \frac{t^{2/5}}{t^3+1}\, dt, \quad x \to +\infty.$

5.25 $F(x) = \int_0^x t \sin\frac{1}{t}\, dt, \quad x \to +\infty$

5.26 $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t+\sqrt[3]{t}}}, \quad x \to \ +\infty.$

5.27 $F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2\sqrt{t}} dt, \quad x \to +0.$

5.28 $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2+1}\, e^{1/t} dt, \quad x \to +\infty.$

5.29 $F(x) = \int_1^x \sqrt[4]{t^3+3t^2}\cos\frac{1}{t}\,dt, \quad x\to+\infty.$

5.30 $F(x) = \int_1^x \sqrt[5]{t^5+4t^3}\sin\frac{1}{t}\,dt, \quad x\to+\infty.$

Ответы

1.2 $f(x) = e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}+O(x^3)\right), \quad x\to 0$

1.3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1-\frac{x}{24}+O(x^2)\right), \quad x\to 0$

1.4 $f(x) = 1+x-\frac{19x^2}{12}+\frac{7x^3}{3}+O(x^4), \quad x\to 0$

1.5 $f(x) = x+\frac{x^3}{6}+O(x^5), \quad x\to 0$

2.2 $f(x) = |x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x\to\infty$

2.3 $f(x) = -\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^2}+\frac{2}{3x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right), \quad x\to+\infty$

2.4 $f(x) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right), \quad x\to+\infty$

2.5 $f(x) = \frac{5}{4}-\frac{89}{96x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x\to+\infty$

$f(x) = -2x+\frac{3}{4}-\frac{71}{96x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x\to-\infty$

3.2 $x_n = \pi n+\frac{1}{\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$

3.3 $x_n = \frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{(-1)^{n+1}}{3\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$

3.4 $x_n = \pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{(-1)^n}{2\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$

3.5 $x_n = \pi n+\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n\to\infty$

4.2 $F(x) = \frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^{-x}}{x^2}+o\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right), \quad x\to+\infty$

4.3 $F(x) = \frac{e^{x}}{x}+\frac{e^{x}}{x^2}+o\left(\frac{e^{x}}{x^2}\right), \quad x\to+\infty$

4.4 $F(x) = \frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right), \quad x\to+\infty$

4.5 $F(x) = \dfrac{2\cos\sqrt{x}}{x} + \dfrac{4\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty$

5.2 $F(x) = \dfrac{3}{5}x^{5/3} + \dfrac{1}{2}x^{2/3} + A + \dfrac{1}{3x^{1/3}} + O\left(\dfrac{1}{x^{4/3}}\right), \quad x \to +\infty,$
где $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{t^2+1} - t^{2/3} - \dfrac{1}{3t^{1/3}}\right) dt.$

5.3 $F(x) = \dfrac{1}{x} + A + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{72} + O\left(x^5\right), \quad x \to 0,$
где $A = \displaystyle\int_0^1 \int \left(\dfrac{\cos t - 1}{t^2}\right) dt.$

5.4 $F(x) = ex - \dfrac{e}{2}\ln x + A - \dfrac{11e}{24x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty,$
где $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t - e\left(1 - \dfrac{1}{2t}\right)\right) dt.$

5.5 $F(x) = -1 + \dfrac{1}{x} - \ln x + A - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{9} + O\left(x^4\right), \quad x \to +0,$
где $A = \displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{e^{\sin t}}{t^2} - \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right) dt.$

Учебное издание

Сборник заданий для курсовой работы

"Элементарные асимптотические методы"

Составители:

ДЕМЕНКО Виктория Николаевна

ИСМАГИЛОВ Раис Сальманович

ФЕДОТОВ Андрей Георгиевич

Редактор С.П. Клышинская

Технический редактор О. Г. Завьялова

Подписано в печать 03.09.13. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать ризография. Усл. печ. л.1,0. Уч.-изд. л.0,8. Тираж 250 экз. Заказ Бесплатно. Изд. №48.

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики".

109028 Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3.

Редакционно-издательский отдел Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики". Участок МИЭМ типографии НИУ ВШЭ.

113054 Москва, ул. М.Пионерская, 12.