Алгебра и анализ
Том 22 (2010), №4

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЫ СДВИГОВ НА ПОЛУПРЯМОЙ

© Г. Г. АМОСОВ, А. Д. БАРАНОВ, В. В. КАПУСТИН

Изучаются возмущения $(\tilde\tau_t)_{t\geqslant 0}$ полугруппы сдвигов $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ на $L^2(\mathbb{R}_+)$ со свойством, что разность $\tilde\tau_t - \tau_t$ принадлежит некоторому идеалу Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $p \geqslant 1$. Доказано, что для унитарной компоненты в разложении Вольда–Колмогорова когенератора полугруппы $(\tilde\tau_t)_{t\geqslant 0}$ *любой сингулярный* спектральный тип может быть получен с помощью $\mathfrak{S}_1$-возмущений. Предлагается явная конструкция возмущения с заданным спектральным типом, построенная на основе теории модельных подпространств класса Харди H^2. Также показано, что при $p > 1$ возмущением класса $\mathfrak{S}_p$ можно получить *любой* предписанный спектральный тип унитарной компоненты возмущенной полугруппы.

§1. Введение

Рассмотрим изометрическую полугруппу сдвигов $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$(\tau_t f)(x) = \begin{cases} f(x-t), & x \geqslant t, \\ 0, & x < t, \end{cases} \qquad f \in L^2(\mathbb{R}_+).$$

В настоящей статье рассматриваются возмущения $(\tilde\tau_t)$ полугруппы (τ_t), обладающие следующими свойствами:

$(\tilde\tau_t)_{t\geqslant 0}$ — сильно непрерывная полугруппа изометрических операторов на $L^2(\mathbb{R}_+)$;

разность $\tilde\tau_t - \tau_t$ принадлежит некоторому идеалу Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ при всех $t > 0$.

Основная задача настоящей статьи — описать все возможные спектральные типы возмущенных изометрических полугрупп. Спектральный

Ключевые слова: полугруппа сдвигов, ядерное возмущение, идеал Шаттена–фон Неймана, класс Харди, внутренняя функция.

Работа выполнена при частичной поддержке АВЦП ,,Развитие научного потенциала высшей школы“, проект 2.1.1/1662, РФФИ, грант 08-01-00723, и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2409.2008.1.

тип полугруппы однозначно определяет полугруппу с точностью до унитарной эквивалентности; он определяется спектральным типом когенератора полугруппы (см. определение в §2). При $p = 1$ из устойчивости абсолютно непрерывного спектра унитарной дилатации следует, что абсолютно непрерывные части когенераторов унитарных дилатаций полугрупп (τ_t) и $(\tilde{\tau}_t)$ унитарно эквивалентны (подробности см. в §2). Когенератор полугруппы (τ_t) унитарно эквивалентен оператору одностороннего сдвига в пространстве Харди H^2. Таким образом, при $p = 1$ наша задача сводится к описанию всех возможных сингулярных частей, и будет показано, что *любой сингулярный* тип может быть реализован некоторой полугруппой $(\tilde{\tau}_t)_{t\geqslant 0}$. Для $p = 2$ в статьях [1, 2] было показано, что у унитарной компоненты возможен *любой* спектральный тип; для случая сингулярной спектральной меры была также построена модель таких возмущений. Здесь мы покажем, что подобные результаты справедливы и при всех $p > 1$.

Одна из возможных мотиваций данного исследования связана с марковскими возмущениями унитарной группы сдвигов. Полугруппа $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ представляет собой сужение на $L^2(\mathbb{R}_+)$ унитарной группы сдвигов $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, $(\gamma_t f)(x) = f(x-t)$, действующей в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ на всей прямой (при отождествлении пространств $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $L^2(\mathbb{R}_-)$ с подпространствами функций из $L^2(\mathbb{R})$, тождественно равных нулю на полуосях $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно). Рассмотрим возмущенную унитарную группу $(\tilde{\gamma}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ и предположим, что она обладает так называемым марковским свойством, которое означает, что возмущенные операторы совпадают с невозмущенными на левой полуоси $\mathbb{R}_-$ при $t < 0$, т.е.

$$\tilde{\gamma}_t f = \gamma_t f, \quad \text{если} \quad f = 0 \text{ на } \mathbb{R}_+, \quad t < 0. \tag{1}$$

Как обычно, марковское свойство может быть интерпретировано в том смысле, что „прошлое не зависит от будущего“. Марковские возмущения с дополнительным свойством $\tilde{\gamma}_t - \gamma_t \in \mathfrak{S}_2$, $t \in \mathbb{R}$, были исследованы первым автором (см., например, [15]) в связи с изучением коциклических возмущений потока сдвигов Пауэрса [17].

Здесь иногда будет удобно работать на модели в классе Харди H^2 на единичной окружности $\mathbb{T}$, унитарно эквивалентной исходной (см. §4). Полугруппа $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ унитарно эквивалентна действующей в пространстве H^2 полугруппе операторов умножения на функции φ_t, $t \geqslant 0$, где

$$\varphi_t(z) = \exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right). \tag{2}$$

В этом случае когенератором невозмущенной группы будет оператор одностороннего сдвига S, т.е. оператор умножения на независимую переменную z в H^2. Обозначим через $\tilde{S}$ когенератор возмущенной полугруппы; тогда ее элементы имеют вид $\varphi_t(\tilde{S})$.

Теперь введем новый параметр для нашей модели возмущений, а именно внутреннюю функцию θ в единичном круге (функцию $\theta \in H^2$ называют внутренней, если $|\theta| = 1$ почти везде на $\mathbb{T}$). Рассмотрим S-коинвариантное подпространство

$$K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2.$$

Теории инвариантных подпространств оператора обратного сдвига, называемых также модельными подпространствами, посвящены монографии [6, 21].

В дальнейшем нас интересуют возмущения $\tilde{S}$ оператора сдвига S со следующими свойствами:

(i) $\tilde{S}$ — оператор на H^2, диагональный относительно разложения $H^2 = K_\theta \oplus \theta H^2$;

(ii) $\tilde{S}$ действует на θH^2 как умножение на z;

(iii) сужение оператора $\tilde{S}$ на K_θ — унитарный оператор, и 1 не является его собственным числом.

Условия (i)–(iii) означают, что $\tilde{S}$ — изометрия, унитарная и вполне неунитарная части которой действуют на K_θ и θH^2 соответственно. Число 1 не принадлежит точечному спектру оператора $\tilde{S}$, и поэтому изометрическая полугруппа с когенератором $\tilde{S}$ определена корректно.

Теперь сформулируем основные результаты статьи. Первый из них состоит в том, что любое сингулярное слагаемое V может быть получено с помощью ядерного возмущения полугруппы сдвигов в терминах модели на окружности.

Теорема 1.1. *Пусть V — сингулярный унитарный оператор спектральной кратности $n \leqslant \infty$, для которого 1 не является собственным числом, и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся внутренняя функция θ и оператор $\tilde{S}$ со свойствами* (i)–(iii) *такие, что*

a) *сужение оператора $\tilde{S}$ на K_θ унитарно эквивалентно оператору V*;

b) $\operatorname{rank}(\tilde{S} - S) \leqslant n$;

c) $||\tilde{S} - S||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \varepsilon$;

d) $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1$ *при всех* $t > 0$.

Как следствие теоремы 1.1 мы получаем следующий результат для возмущений полугруппы сдвигов на полуоси.

Теорема 1.2. *Пусть $(\tau_t)_{t \geqslant 0}$ — полугруппа сдвигов на $L^2(\mathbb{R}_+)$.*

1) *Если* $(\tilde{\tau}_t)$ — *изометрическая полугруппа такая, что* $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$ *при всех* $t \geqslant 0$, *то когенератор полугруппы* $(\tilde{\tau}_t)$ *унитарно эквивалентен прямой сумме оператора простого* (*т.е. однократного*) *сдвига и унитарного оператора с сингулярной спектральной мерой.*

2) *Для произвольного сингулярного унитарного оператора* V *с единственным ограничением, что число* 1 *не принадлежит его точечному спектру, существует изометрическая полугруппа* $(\tilde{\tau}_t)$, *когенератор которой унитарно эквивалентен оператору* $S \oplus V$, *и для всех* $t \geqslant 0$ *выполнено соотношение* $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$.

В качестве еще одного следствия теоремы 1.1 получается, что для $p > 1$ аналогичное утверждение верно и без предположения, что унитарный оператор V сингулярен.

Теорема 1.3. *Пусть* V — *унитарный оператор такой, что* 1 *не является его собственным числом. Тогда найдутся внутренняя функция* θ *и оператор* $\tilde{S}$ *со свойствами* (i)–(iii) *такой, что сужение оператора* $\tilde{S}$ *на* K_θ *унитарно эквивалентно оператору* V, *и* $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p$ *при всех* $p > 1$.

В случае $p = 2$ аналоги теорем 1.1 и 1.3 были доказаны в статьях [1, 2]. Здесь будут также отдельно рассмотрены результаты о классе $\mathfrak{S}_2$, так как в терминах нашей модели их доказательства существенно упрощаются, и можно ожидать, что найденные условия точны. Новые результаты настоящей статьи связаны с более узкими классами $\mathfrak{S}_p$ при $p < 2$ и, в особенности, при $p = 1$.

В статьях [16, 1] конструкция оператора $\tilde{S}$ была основана на результатах Ахерна и Кларка о триангуляции [14]. Вместо этого здесь используется конструкция Кларка [18], устанавливающая изометрическое соответствие между пространством K_θ и пространством $L^2(\mu)$ для некоторой сингулярной меры μ на единичной окружности. Этот подход позволяет связать аппроксимационные свойства разности $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ с дифференциальными свойствами меры μ.

Положение существенно меняется, если перейти к „естественной“ унитарной дилатации возмущенного оператора $\tilde{S}$ со свойствами (i)–(iii) (см. §2). Пусть U — оператор двустороннего сдвига в $L^2(\mathbb{T})$ и пусть $\tilde{U}$ — дилатация оператора $\tilde{S}$ с марковским свойством, т.е. такая, что $\tilde{U}^*$ совпадает с U^* на H^2_-. Оказывается, что в этом случае $\varphi_t(\tilde{U}) - \varphi_t(U)$ никогда не будет принадлежать идеалу $\mathfrak{S}_1$. Однако для любого унитарного оператора V найдутся оператор $\tilde{S}$ со свойствами (i)–(iii) и марковская унитарная дилатация $\tilde{U}$ оператора $\tilde{S}$ такие, что сужение оператора $\tilde{S}$ на K_θ унитарно эквивалентно оператору V, а $\varphi_t(\tilde{U}) - \varphi_t(U) \in \mathfrak{S}_p$ при всех $p > 1$.

Унитарные дилатации будут подробно рассмотрены в нашей следующей статье.

Изложение организовано следующим образом. В §2 показано, что условия, накладываемые на оператор V в основных результатах статьи, являются необходимыми. Далее в первую очередь будет рассмотрен случай, когда V — сингулярный унитарный оператор спектральной кратности 1, и для него строится конструкция Кларка. Модель определяется внутренней функцией θ, или сингулярной мерой μ на окружности, связанной с мерой μ соотношением (4) ниже, или соответствующей сингулярной мерой ν на вещественной прямой. При этом $\operatorname{rank}(\tilde{S}-S)=1$. Будут найдены условия на меры μ, ν, при которых операторы $\varphi_t(\tilde{S})-\varphi_t(S)$ принадлежат $\mathfrak{S}_2$ или $\mathfrak{S}_1$ при всех $t>0$. С использованием свойств мер μ, ν из нашей конструкции сначала будет доказана теорема 1.1 в частном случае кратности 1, из которого затем будет выведен результат в общем случае. Теоремы 1.2 и 1.3 будут получены как следствия теоремы 1.1.

Авторы глубоко признательны Р. В. Романову за полезные обсуждения и помощь в доказательстве теоремы 2.1, а также А. Б. Александрову за многочисленные полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

§2. Унитарные группы, изометрические полугруппы и их когенераторы

В этом параграфе мы напомним основные свойства генераторов и когенераторов сильно непрерывных унитарных групп и их аналоги для изометрических полугрупп. Подробное изложение этих вопросов можно найти в [4, 10, 11].

Генератором A сильно непрерывной унитарной группы $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ называют оператор, определенный как $Ax=\lim_{t\to 0}\frac{U_t-I}{t}x$ на множестве тех векторов x, для которых предел существует. Тогда оператор iA самосопряжен и $U_t=\exp(tA)$. *Когенератором* группы $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ называют унитарный оператор $B=(A+I)(A-I)^{-1}$. Для того чтобы унитарный оператор был когенератором некоторой унитарной группы, необходимо и достаточно, чтобы его точечный спектр не содержал точку 1. Элементы группы выражаются через ее когенератор B по формуле

$$U_t=\varphi_t(B), \tag{3}$$

где функции φ_t определены формулой (2). Более того, поскольку

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi_t(z)\,dt=\frac{1-z}{2},$$

получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} U_t \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \varphi_t(B) \, dt = \frac{I-B}{2},$$

следовательно, когенератор может быть выражен через элементы группы при $t \geqslant 0$ как

$$B = I - 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} U_t \, dt.$$

Предположим теперь, что дана сильно непрерывная полугруппа изометрических операторов $(V_t)_{t \geqslant 0}$ в гильбертовом пространстве H_0. Тогда можно рассмотреть ее унитарную дилатацию, т.е. унитарную группу $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$, действующую на большем пространстве H так, что подпространство H_0 инвариантно для U_t при $t > 0$, и $V_t = U_t|_{H_0}$, $t > 0$ (см. [10]). Если $t \geqslant 0$, то $\varphi_t \in H^\infty$. Поэтому подпространство H_0 инвариантно также и относительно когенератора B группы (U_t), и естественно определить когенератор изометрической полугруппы (V_t) как сужение оператора B на H_0. Формула (3) остается справедливой, если вместо операторов B и U_t, $t > 0$, применить ее к их сужениям на H_0.

Для рассматриваемых классов операторов спектральный тип оператора определяется как класс операторов, унитарно эквивалентных исходному. Поскольку унитарные группы и изометрические полугруппы однозначно определяются своими когенераторами, и наоборот, спектральный тип группы (полугруппы) естественно определить через спектральный тип ее когенератора. Для класса унитарных операторов спектральный тип определяется скалярной мерой на единичной окружности $\mathbb{T}$, относительно которой спектральная мера унитарного оператора абсолютно непрерывна, и целочисленной функцией на $\mathbb{T}$, подсчитывающей локальную кратность в почти каждой точке относительно заданной меры. Согласно разложению Вольда–Колмогорова для когенератора, каждая сильно непрерывная изометрическая полугруппа разлагается в прямую сумму унитарной и вполне неунитарной частей. Первая из них есть полугруппа унитарных операторов с индексами из $\mathbb{R}_+$, и она может быть естественным образом продолжена до унитарной группы с индексами из $\mathbb{R}$. Последняя есть полугруппа вполне неунитарных операторов, т.е. операторов, унитарно эквивалентных оператору одностороннего сдвига. Таким образом, спектральный тип изометрической полугруппы определяется спектральным типом когенератора ее унитарной части и кратностью одностороннего сдвига.

Следующее (возможно, известное) утверждение показывает, что кратность одностороннего сдвига сохраняется при компактных возмущениях полугруппы, а ядерные возмущения сохраняют абсолютно непрерывную часть когенератора. Для полноты изложения мы дадим краткое доказательство. Приведенное ниже рассуждение авторам сообщил Р. В. Романов.

Теорема 2.1. *Пусть* $(V_t)_{t\geqslant 0}$, $(\tilde{V}_t)_{t\geqslant 0}$ *— сильно непрерывные полугруппы изометрических операторов в гильбертовом пространстве* H.

1) *Если оператор* $\tilde{V}_t - V_t$ *компактен для всех* $t \geqslant 0$, *то вполне неунитарные части полугрупп* $(V_t)_{t\geqslant 0}$ *и* $(\tilde{V}_t)_{t\geqslant 0}$ *унитарно эквивалентны, т.е. кратности сдвигов совпадают.*

2) *Если* $\tilde{V}_t - V_t \in \mathfrak{S}_1$ *для всех* $t \geqslant 0$, *то абсолютно непрерывные унитарные части полугрупп* $(V_t)_{t\geqslant 0}$ *и* $(\tilde{V}_t)_{t\geqslant 0}$ *унитарно эквивалентны.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть* $T(t)$, $t \geqslant 0$, *– сильно непрерывное семейство компактных операторов такое, что* $\sup_{t\geqslant 0}\|T(t)\| < \infty$. *Тогда оператор* $\int_0^\infty e^{-t}T(t)dt$ *компактен.*

Доказательство. Для каждого t рассмотрим разложение Шмидта $T(t)=\sum_{j=1}^\infty s_{tj}(\cdot, x_{tj})y_{tj}$, где $x(_{tj})$, (y_{tj}) — ортонормированные семейства, $s_{tj}\searrow 0$. Отметим, что функции $t\mapsto s_{tj}$ непрерывны снизу для всех j и поэтому измеримы. Также измеримы функции $t\mapsto x_{tj}$ и $t\mapsto y_{tj}$. Норма оператора $\sum_{j\geqslant n} s_{tj}(\cdot, x_{tj})y_{tj}$ равна s_{tn}, и, следовательно,

$$\left\| \int_0^\infty e^{-t}\sum_{j\geqslant n} s_{tj}(\cdot, x_{tj})y_{tj}\,dt\right\| \leqslant \int_0^\infty e^{-t}s_{tn}\,dt.$$

По условию $\sup_{t\geqslant 0} s_{tn} \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\|T(t)\| < \infty$. Для всякого t имеем $s_{tn}\to 0$, $n\to\infty$, откуда по теореме Лебега получаем $\int_0^\infty e^{-t}s_{tn}dt \to 0$, и, значит, $\|\int_0^\infty e^{-t}\sum_{j\geqslant n} s_{tj}(\cdot, x_{tj})y_{tj}\,dt\| \to 0$ при $n\to\infty$.

Осталось показать, что оператор $\int_0^\infty e^{-t}\sum_{j<n} s_{tj}(\cdot, x_{tj})y_{tj}\,dt$ компактен для всех n. Для этого заметим, что нормы операторов $(\cdot, x_{tj})y_{tj}$ в любом классе $\mathfrak{S}_p$ равны 1, откуда $\mathfrak{S}_p$-нормы оператора $\int_0^\infty e^{-t}\sum_{j=1}^{n-1} s_{tj}(\cdot, x_{tj})y_{tj}\,dt$ не превосходят

$$\int_0^\infty e^{-t}\sum_{j=1}^{n-1} s_{tj}\,dt \leqslant (n-1)\cdot\sup_{t\geqslant 0}\|T(t)\|\int_0^\infty e^{-t}dt = (n-1)\cdot\sup_{t\geqslant 0}\|T(t)\|. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2.1. Докажем утверждение 1 теоремы. Применяя лемму 2.2 к $T(t) = \tilde{V}_t - V_t$, получаем, что оператор $\int_0^\infty e^{-t}(\tilde{V}_t - V_t)dt$ компактен. Это означает, что разность когенераторов полугрупп (V_t) и $(\tilde{V}_t)$ компактна. Следовательно, у когенераторов совпадают индексы Фредгольма, которые в точности равны кратностям сдвига.

Теперь докажем утверждение 2. Обозначим через Q подпространство, на котором когенератор полугруппы $(\tilde{V}_t)$ действует как абсолютно непрерывный унитарный оператор. Обозначим через Z естественное вложение подпространства Q в H. Из предположения $\tilde{V}_t - V_t \in \mathfrak{S}_1$ следует, что $Z(\tilde{V}_t|_Q) - \gamma_t Z \in \mathfrak{S}_1$, где $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — унитарная дилатация полугруппы (V_t). Тогда, согласно классической теории рассеяния для пары унитарных операторов, существует сильный предел изометрий $\gamma_t Z(\tilde{V}_t|_Q)^{-1}$ при $t \to +\infty$, определяющий изометрический волновой оператор W (см. [12, теорема 6.5.5]). По построению образ оператора W содержится в H и приводит группу (γ_t). Следовательно, оператор W осуществляет унитарную эквивалентность между сужением полугруппы $(\tilde{V}_t)$ на подпространство Q и некоторой унитарной частью полугруппы (V_t).

Мы показали, что абсолютно непрерывная унитарная часть полугруппы $(\tilde{V}_t)$ унитарно эквивалентна некоторой части полугруппы (V_t). Аналогично абсолютно непрерывная унитарная часть полугруппы (V_t) унитарно эквивалентна некоторой части полугруппы $(\tilde{V}_t)$. Тогда по спектральной теореме абсолютно непрерывные унитарные части полугрупп (V_t) и $(\tilde{V}_t)$ унитарно эквивалентны. □

Отсюда немедленно получается следующее следствие для возмущений полугруппы сдвигов.

Следствие 2.3. *Пусть $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ — полугруппа сдвигов, а $(\tilde{\tau}_t)_{t\geqslant 0}$ — некоторая сильно непрерывная полугруппа изометрических операторов в $L^2(\mathbb{R}_+)$.*

1) *Если оператор $\tilde{\tau}_t - \tau_t$ компактен для всех $t \geqslant 0$, то существует унитарная группа $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}}$ такая, что полугруппа $(\tilde{\tau}_t)$ унитарно эквивалентна прямой сумме $(\tau_t) \oplus (\omega_t)$, $t \geqslant 0$.*

2) *Если к тому же $\tilde{\tau}_t - \tau_t \in \mathfrak{S}_1$ при $t \geqslant 0$, то спектральная мера (каждого элемента или, что равносильно, когенератора) группы (ω_t) сингулярна.*

Для модели на единичной окружности следствие 2.3 означает, что при условии $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1$, $t > 0$, у оператора $\tilde{S}$ кратность сдвига равна 1, и спектральная мера его унитарного слагаемого обязательно сингулярна относительно меры Лебега.

§3. Пространства K_θ и модельная конструкция

В этом параграфе будет предложена специальная модель возмущения, удовлетворяющего условиям (i)–(iii), связанная с сингулярной мерой μ на единичной окружности $\mathbb{T}$ и с внутренней функцией θ, порожденной мерой μ.

Пусть μ — мера на $\mathbb{T}$, сингулярная относительно меры Лебега m, и $\mu(\{1\}) = 0$. Определим функцию θ формулой

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\, d\mu(\xi), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4}$$

Хорошо известно, что θ — внутренняя функция. Мера μ сосредоточена на множестве, на котором функция θ имеет некасательные граничные значения, равные 1. Меру μ называют мерой Кларка функции Θ.

Для $u \in L^2(\mu)$ положим

$$(\Omega u)(z) = (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\xi)d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z}. \tag{5}$$

Как показал Кларк [18], Ω — унитарный оператор, действующий из $L^2(\mu)$ на K_θ. Более того, некасательные граничные значения функции Ωu существуют и совпадают с u μ-почти везде [9]. Аналоги этих результатов для пространств векторнозначных функций можно найти в [20].

В этом параграфе V обозначает оператор умножения на независимую переменную ξ в пространстве $L^2(\mu)$. Отметим, что 1 не будет собственным числом оператора V, так как $\mu(\{1\}) = 0$. Найдем формулу для унитарно эквивалентной пересадки $\Omega V \Omega^*$ оператора V в пространство K_θ. Для $h = \Omega u$, $u \in L^2(\mu)$, имеем

$$\begin{aligned}(\Omega V \Omega^* h)(z) - zh(z) &= (\Omega V u)(z) - z(\Omega u)(z) \\ &= (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{(\xi - z)u(\xi)d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z} \\ &= (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \xi u(\xi) d\mu(\xi).\end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_{\mathbb{T}} \xi u(\xi)d\mu(\xi) = (u, \bar{\xi})_{L^2(\mu)} = (h, \Omega\bar{\xi})_{K_\theta}$, получаем

$$\Omega V \Omega^* h = zh + (h, g)(1-\theta), \quad h \in K_\theta,$$

где $g = \Omega\bar{\xi} \in K_\theta$ (нетрудно проверить, что $g(z) = \frac{\theta(z)-\theta(0)}{z(1-\theta(0))}$, однако в дальнейшем это не будет использоваться).

Напомним, что символ S обозначает оператор сдвига на H^2, и определим оператор $\tilde{S}$ на H^2 как

$$\tilde{S} = S + (\cdot, g)(1-\theta). \tag{6}$$

Доказано, что K_θ — инвариантное подпространство оператора $\tilde{S}$, и сужение $\tilde{S}$ на K_θ унитарно эквивалентно V. Очевидно, операторы $\tilde{S}$ и S совпадают на θH^2. Итак, имеет место следующее предложение.

Предложение 3.1. *Оператор $\tilde{S}$, определенный формулой* (6), *обладает свойствами* (i)–(iii)*; сужение оператора $\tilde{S}$ на K_θ унитарно эквивалентно оператору V умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\mu)$. Таким образом, оператор $\tilde{S}$ унитарно эквивалентен оператору $S \oplus V$.*

Оператор $\tilde{S}$ отличается от умножения на z на оператор ранга 1: $\tilde{S} - S = (\cdot, g)(1-\theta)$, для нормы которого имеем

$$\|\tilde{S} - S\| = \|g\|_{K_\theta} \cdot \|1-\theta\|_{H^2} = \|\bar{\xi}\|_{L^2(\mu)} \cdot \|1-\theta\|_{H^2} < 2\sqrt{\mu(\mathbb{T})}. \qquad (7)$$

Как правило, мы будем работать с мерами μ, удовлетворяющими дополнительному соотношению

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2} < \infty. \qquad (8)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\mu(\{1\}) = 0$. Условие (8) хорошо известно в теории внутренних функций и модельных пространств. Оно равносильно любому из следующих утверждений (см., например, [22, гл. VI]):

(i) функция θ, определенная формулой (4), имеет конечную некасательную производную в точке 1;

(ii) каждая функция из K_θ имеет в точке 1 конечный некасательный предел.

При этом функция $\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta}{1-z}$ принадлежит K_θ и является воспроизводящим ядром в точке 1,

$$\left\|\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta}{1-z}\right\|^2_{K_\theta} = \left\|\frac{1-\overline{\theta(1)}}{1-z}\right\|^2_{L^2(\mu)} < 4\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}.$$

§4. Эквивалентные модели

Исходная конструкция представляла собой модель сдвигов в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. Здесь будут рассматриваться также и другие модели, унитарно эквивалентные исходной.

Эквивалентная модельная конструкция на вещественной прямой может быть получена из модели сдвигов в $L^2(\mathbb{R}_+)$ применением преобразования Фурье. Оно переводит пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$ в класс Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости. Изометрическая группа сдвигов $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ переходит в полугруппу операторов умножения на функции $\exp(itz)$.

В случае модели на единичной окружности $\mathbb{T}$ мы также работаем с пространством Харди H^2, рассматриваемом как подпространство в L^2. В обозначениях L^2, H^2 мы опускаем обозначения для меры, подразумевая, что речь идет о нормированной мере Лебега m на $\mathbb{T}$, $m(\mathbb{T}) = 1$. Оператор S умножения на независимую переменную z будет когенератором невозмущенной изометрической полугруппы, которая состоит из операторов вида $\varphi_t(S)$, где функция φ определена формулой (2). Иными словами, невозмущенная полугруппа в H^2 есть полугруппа операторов умножения на внутренние функции φ_t, $t \geqslant 0$.

Теперь приведем ряд формул, устанавливающих унитарную эквивалентность моделей на единичной окружности $\mathbb{T}$ и на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Для переменной $z \in \mathbb{T}$ положим $x = i\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$. С мерой μ на $\mathbb{T}$ свяжем меру ν на $\mathbb{R}$,

$$d\mu(z) = \frac{d\nu(x)}{\pi(1+x^2)}. \tag{9}$$

Условие (8) равносильно тому, что $\nu(\mathbb{R}) < \infty$. Отображение

$$u \mapsto v, \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)} \cdot u\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) \tag{10}$$

является унитарным оператором из $L^2(\mu)$ на $L^2(\nu)$, а также из $L^2 = L^2(\mathbb{T})$ на $L^2(\mathbb{R})$; при этом класс Харди H^2 отображается на $H^2(\mathbb{C}_+)$. Функция $u \in L^2(\mu)$ выражается через $v \in L^2(\nu)$ по формуле

$$u(z) = \frac{2i\sqrt{\pi}}{1-z} \cdot v\Big(i\frac{1+z}{1-z}\Big).$$

§5. Функции от операторов S и $\tilde{S}$

Пусть теперь $\tilde{S}$ — возмущение ранга 1 оператора S, определенное формулой (6). Возьмем функцию $\varphi \in H^\infty$, непрерывную вплоть до $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. Тогда операторы $\varphi(S)$ и $\varphi(\tilde{S})$ корректно определены.

На подпространстве θH^2 оператор $\tilde{S}$ совпадает с S и, следовательно, $\varphi(\tilde{S})$ совпадает с $\varphi(S)$. Таким образом, необходимо исследовать только сужение разности $\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S)$ на подпространство K_θ, что делает естественным рассмотрение оператора

$$X : L^2(\mu) \to H^2, \quad X = (\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S))\Omega, \tag{11}$$

где оператор Ω определен формулой (5). Возьмем $u \in L^2(\mu)$. Тогда

$$\begin{aligned}(Xu)(z) &= (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\xi)u(\xi)}{1-\bar{\xi}z} d\mu(\xi) - \varphi(z)(1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\xi)}{1-\bar{\xi}z} d\mu(\xi) \\ &= (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{\xi - z} \xi u(\xi) d\mu(\xi), \quad u \in L^2(\mu).\end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку Ω — унитарный оператор из $L^2(\mu)$ на K_θ, оператор $\varphi(\tilde{S})-\varphi(S)$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_p$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{S}_p$, при этом их $\mathfrak{S}_p$-нормы совпадают.

Равенство (10) устанавливает унитарную эквивалентность между $L^2(\mu)$ и $L^2(\nu)$, а также между H^2 и $H^2(\mathbb{C}_+)$. Используя это отождествление, определим оператор $Y : L^2(\nu) \to H^2(\mathbb{C}_+)$ как унитарную пересадку оператора X. Имеем

$$\begin{aligned}(Yv)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}(Xu)\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)} \cdot (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{\xi - z}\xi u(\xi)d\mu(\xi) \\ &= (1-\Theta(x)) \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(\zeta)-\psi(x)}{\zeta - x} v(\zeta)d\nu(\zeta), \quad v \in L^2(\nu),\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\psi(x) = \varphi\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big), \quad \Theta(x) = \theta\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big), \quad x \in \mathbb{C}_+.$$

Отметим, что в том случае, когда функция θ определена равенством (4), для функции Θ справедливо соотношение

$$\frac{1+\Theta(x)}{1-\Theta(x)} = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\zeta - x} - \frac{\zeta}{1+\zeta^2}\Big)d\nu(\zeta), \quad x \in \mathbb{C}_+.$$

Следующее предложение напрямую вытекает из определения оператора Y.

Предложение 5.1. *Операторы $\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S)$ и Y принадлежат или не принадлежат идеалам $\mathfrak{S}_p$ одновременно, и $||\varphi(\tilde{S}) - \varphi(S)||_{\mathfrak{S}_p} = ||Y||_{\mathfrak{S}_p}$.*

§6. Оценки нормы Гильберта–Шмидта

Определим интегральный оператор $K : L^2(\nu) \to H^2(\mathbb{C}_+)$ как

$$(Kv)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(\zeta)-\psi(x)}{\zeta - x} v(\zeta)d\nu(\zeta), \quad v \in L^2(\nu). \tag{14}$$

Если $K \in \mathfrak{S}_p$, то также и $Y \in \mathfrak{S}_p$, и, очевидно,

$$\|Y\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant 2 \cdot \|K\|_{\mathfrak{S}_p}. \tag{15}$$

Для нормы оператора K в идеале $\mathfrak{S}_2$ получаем

$$\|K\|^2_{\mathfrak{S}_2} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \Big|\frac{\psi(\zeta)-\psi(x)}{\zeta - x}\Big|^2 dx\, d\nu(\zeta). \tag{16}$$

Рассмотрим полугруппы вида $(\varphi_t(S))$, $(\varphi_t(\tilde{S}))$, где $\varphi_t(z) = \exp(t\frac{z+1}{z-1})$, $t > 0$. Соответствующие функции ψ_t имеют вид

$$\psi_t(x) = \varphi_t\Big(\frac{x-i}{x+i}\Big) = e^{itx}.$$

Теперь сформулируем условие на меру ν, обеспечивающее принадлежность оператора K классу Гильберта–Шмидта сразу для всех t. Для этого будет получена точная формула для интеграла (16) с $\psi = \psi_t$; это даст условие, достаточное для включения $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_2$ при всех t. В конце параграфа будет приведен пример конструкции, когда разность $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ не принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$ ни для какого $t \neq 0$.

Предложение 6.1. *Предположим, что выполнено условие* (8). *Тогда для всех $t > 0$ имеем*

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \Big|\frac{\psi_t(\zeta)-\psi_t(x)}{\zeta - x}\Big|^2 dx\, d\nu(\zeta) = 2\pi t\cdot\nu(\mathbb{R}) = 8\pi^2 t\int_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2} < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Используя формулу $\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\alpha s}{s^2}ds = \pi|\alpha|$, для интеграла по мере Лебега в левой части равенства (17) получим

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|e^{it\zeta}-e^{itx}|^2}{(\zeta-x)^2}\,dx = 4\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2\frac{t}{2}(\zeta-x)}{(\zeta-x)^2}\,dx = 2\pi t.$$

Правое равенство в (17) вытекает из соотношения $\nu(\mathbb{R}) = 4\pi\int\frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}$. $\square$

Следствие 6.2. *Если μ удовлетворяет условию* (8), *то $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_2$ при всех $t > 0$;*

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant 2\sqrt{2t}\Big(\int_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}\Big)^{1/2}. \tag{18}$$

Доказательство. Утверждение немедленно вытекает из предложения 5.1 и соотношений (15), (16) и (17). $\square$

В §7 будет найдено некоторое условие „малости“ меры μ в точке 1 (см. (21)), достаточное для принадлежности оператора $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ классу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$.

Из представления (13) оператора Y в виде интегрального оператора следует, что $Y \in \mathfrak{S}_2$ тогда и только тогда, когда

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |1-\Theta(x)|^2\Big|\frac{\psi(\zeta)-\psi(x)}{\zeta-x}\Big|^2 dx d\nu(\zeta) < \infty.$$

Можно ожидать, что условие $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, эквивалентное условию (8), будет также и необходимым для включения $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_2$, т.е. множитель $1 - \Theta(z)$ не влияет существенно на сходимость интеграла в формуле (16).

Теперь приведем пример такой меры ν на прямой, что оператор $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ не принадлежит классу Гильберта–Шмидта при всех $t \neq 0$. Напомним, что $\tilde{S} - S$ — оператор ранга 1, и его норму можно сделать сколь угодно малой.

Пример 6.3. Пусть $\nu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ — сумма точечных масс в целых точках. Таким образом, полная мера ν бесконечна, и, следовательно, соответствующая мера μ на $\mathbb{T}$ не удовлетворяет условию (8). Подставляя $\psi_t(x) = e^{itx}$ в последнюю формулу, получим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} |1 - \Theta(x)|^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}(x-n)}{(x-n)^2} \right) dx.$$

Очевидно, при $t \neq 0$ найдутся положительные константы $\delta(t) < 1/2$ и $C(t)$ такие, что сумма в скобках в вышеприведенной формуле ограничена снизу числом $C(t)$ при $x \in (k + \delta(t), k + 2\delta(t))$, $k \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, очевидная оценка показывает, что для $x \in (k + \delta(t), k + 2\delta(t))$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\left| \frac{1 + \Theta(x)}{1 - \Theta(x)} \right| = \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1 + xn}{(x-n)(n^2+1)} \right| \leqslant C_1(t),$$

и поэтому $|1 - \Theta(x)| \geqslant C_2(t) > 0$. Вместе эти оценки показывают, что интеграл расходится, т.е. Y не принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_2$.

§7. Оценки для ядерной нормы

В этом параграфе вместо класса Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2$ будут рассматриваться идеалы $\mathfrak{S}_p$ при $p < 2$ и, прежде всего, класс ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$. Согласно соотношению (15), чтобы доказать, что $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p$, достаточно показать, что $K \in \mathfrak{S}_p$, где оператор K определен формулой (14) при $\psi = \psi_t$, $\psi_t(x) = e^{itx}$. Мы сведем этот вопрос к задаче о вложениях пространства Пэли–Винера $\mathcal{PW}_t$ целых функций экспоненциального типа не выше t, квадратично-суммируемых на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Операторы вложения пространств аналитических функций и их принадлежность идеалам $\mathfrak{S}_p$ были подробно исследованы О. Г. Парфеновым [7, 8]. В статье [3] получены обобщения некоторых результатов Парфенова для коинвариантных подпространств K_θ.

Рассмотрим оператор, сопряженный к оператору K, заданному формулой (14) при $\psi = \psi_t$, $\psi_t(x) = e^{itx}$:

$$
\begin{aligned}
(K^*f)(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{-it\zeta} - e^{-itx}}{\zeta - x} f(x)dx \\
&= e^{-\frac{it\zeta}{2}} \int e^{-\frac{itx}{2}} f(x)\Big(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}(x-\zeta)}{x-\zeta}\Big)dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Хорошо известно, что функция $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}(x-\zeta)}{x-\zeta}$ является воспроизводящим ядром в точке ζ для пространства $\mathcal{PW}_{t/2}$, что означает, что эта функция принадлежит пространству $\mathcal{PW}_{t/2}$, и скалярное произведение любой функции f из $\mathcal{PW}_{t/2}$ с воспроизводящим ядром равно $f(\zeta)$. Поэтому $K^*f = 0$, если функция $\tilde f$, $\tilde f(x) = e^{-\frac{itx}{2}} f(x)$, ортогональна пространству $\mathcal{PW}_{t/2}$. Если $\tilde f \in \mathcal{PW}_{t/2}$, то

$$
(K^*f)(\zeta) = e^{-\frac{it\zeta}{2}}\cdot \tilde f(\zeta) = e^{-it\zeta} f(\zeta).
$$

Отсюда видно, что оператор K^* принадлежит или не принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_p$ одновременно с оператором $E_{\nu,t/2}$, осуществляющим вложение пространства $\mathcal{PW}_{t/2}$ в $L^2(\nu)$.

Следующий критерий был найден О. Г. Парфеновым [7, 8].

Теорема 7.1. *Пусть* $\Delta_n = [n, n+1)$. *Тогда* $E_{\nu,t} \in \mathfrak{S}_p$, $p > 0$, *тогда и только тогда, когда*

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\nu(\Delta_n)\big)^{p/2} < \infty. \tag{19}
$$

При этом

$$
\|E_{\nu,t}\|^p_{\mathfrak{S}_p} \leqslant C(p)\, t^{p/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\nu(\Delta_n)\big)^{p/2}. \tag{20}
$$

Если вернуться к мере μ на $\mathbb{T}$, то условие (19) переписывается как

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bigg(\int_{\gamma_n} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^2}\bigg)^{p/2} < \infty,
$$

где дуги γ_n определены при $n > 0$ как $\gamma_n = \{e^{i\varphi} : \pi/(n+1) \leqslant \varphi \leqslant \pi/n\}$ и симметричным образом при $n < 0$.

Получим условие, аналогичное по форме условию (8) и достаточное для соотношения (19), а значит, и для включения $\varphi_t(\tilde S) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p$.

Предложение 7.2. *Пусть* $0 < p < 2$. *Если мера* μ *удовлетворяет условию*

$$
\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q} < \infty \tag{21}
$$

для некоторого $q > 1+2/p$, то $K \in \mathfrak{S}_p$ и, следовательно, $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_p$.

В частности, из условия (21) при $q > 3$ следует, что $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1$, причем

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant M_q \cdot t^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^{\,q}} \right)^{1/2}, \tag{22}$$

где константа M_q зависит только от q.

Доказательство. Перепишем условие (21) в терминах меры ν, определенной формулой (9):

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2+1)^{r/2} d\nu(x) = 2^q \pi \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q} < \infty, \tag{23}$$

где $r = q-2 > (2-p)/p$. Тогда по неравенству Гёльдера с показателями $2/p$ и $2/(2-p)$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\nu(\Delta_n)\big)^{p/2} \right)^{2/p} &\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^{-pr/(2-p)} \right)^{(2-p)/p} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^r \, \nu(\Delta_n) \\ &= \mathrm{const} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^r \, \nu(\Delta_n) \leqslant \mathrm{const} \cdot \int_{\mathbb{R}} (|t|+1)^r d\nu(t). \end{aligned}$$

Теперь утверждение следует из теоремы Парфенова и неравенства (20). □

Пример 7.3. Показатель 3 точен, и для $q=3$ второе утверждение предложения перестает быть верным. В самом деле, выберем ν так, чтобы $\nu(\Delta_n) = \big((|n|+1)\log(|n|+2)\big)^{-2}$. Тогда условие (23) выполнено, но (19) не выполнено, и потому оператор K не принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$.

§8. Операторы кратности > 1

Теперь применим приведенную выше конструкцию для случая кратности 1 для распространения полученного результата на случай произвольной кратности.

Пусть $\{\mu_n\}$ — семейство сингулярных мер на единичной окружности, где n пробегает либо конечное множество $\{1, 2, \dots, N\}$ для некоторого натурального N, либо весь натуральный ряд $\mathbb{N}$. Будем предполагать, что для некоторого $q > 3$

$$\sum_n \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1-\xi|^q} \right)^{1/2} < \infty. \tag{24}$$

Для каждого n построим, как в §3, функцию θ_n, определенную формулой (4) с μ_n вместо μ. Пусть оператор $\Omega_n : L^2(\mu_n) \to K_{\theta_n}$ действует по формуле (5) с $g_n = \Omega_n\bar{\xi}$, а V_n — оператор умножения на z в пространстве $L^2(\mu_n)$. Положим

$$\hat{\theta}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \theta_k.$$

Оператор $\Omega : \sum \oplus L^2(\mu_n) \to H^2$ зададим как

$$\Omega\Big(\sum \oplus u_n\Big) = \sum \hat{\theta}_n \Omega_n u_n.$$

Поскольку условие (24) выполнено для некоторого $q > 3$, оно справедливо и для $q = 2$. Следовательно,

$$\sum_n \Big\| \frac{1 - \overline{\theta_n(1)}\theta_n}{1-z} \Big\|_{L^2} < 2 \sum_n \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1-\xi|^2} \right)^{1/2} < \infty. \tag{25}$$

Поэтому ряд

$$\sum_n \overline{\hat{\theta}_n(1)} \hat{\theta}_n \frac{(1 - \overline{\theta_n(1)}\theta_n)}{1-z}$$

сходится в пространстве L^2. Его частичные суммы имеют вид $\frac{1 - \overline{\hat{\theta}_n(1)}\hat{\theta}_n}{1-z}$. Таким образом, его сумма может быть записана как $\frac{1-\theta}{1-z}$ для внутренней функции θ, совпадающей с произведением функций θ_n с точностью до умножения на константу, по модулю равную единице. Легко видеть, что оператор Ω изометрично отображает $\sum \oplus L^2(\mu_n)$ на K_θ.

Определим оператор $\tilde{S}$ в пространстве H^2 формулой

$$\tilde{S} = S + \sum_n (\cdot, \hat{\theta}_n g_n)\, \hat{\theta}_n \cdot (1 - \theta_n), \tag{26}$$

обобщающей определение (6). Тогда оператор $\tilde{S}$ диагонален относительно разложения $H^2 = \sum \oplus \hat{\theta}_n K_{\theta_n} \oplus \theta H^2$. В самом деле, операторы $\tilde{S}$ и S совпадают на θH^2, а на каждом из подпространств $\hat{\theta}_n K_{\theta_n}$ оператор $\tilde{S}$ является унитарной пересадкой оператора умножения на z в $L^2(\mu_n)$. Прямым вычислением проверяется, что для $f = \Omega_n u \in K_{\theta_n}$ имеем $\tilde{S}(\hat{\theta}_n f) = \hat{\theta}_n \Omega_n(zu) \in \hat{\theta}_n K_{\theta_n}$.

Таким образом, оператор $\tilde{S}$ удовлетворяет условиям (i)–(iii). Аналогично оценке (7) получаем оценку для ядерной нормы разности $\tilde{S} - S$:

$$\|\tilde{S} - S\|_{\mathfrak{S}_1} < 2 \sum_n \sqrt{\mu_n(\mathbb{T})}. \tag{27}$$

Чтобы оценить ядерную норму разности $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$, воспользуемся неравенством (22), которое дает нам соотношение

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant M_q \cdot t^{1/2} \cdot \sum_n \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1-\xi|^{\,q}} \right)^{1/2}. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 1.1. Возьмем произвольный унитарный оператор V, спектральная мера которого сингулярна относительно меры Лебега и не имеет нагрузки в точке 1. Тогда существуют такие сингулярные унитарные операторы V_n кратности 1, что $V = \oplus \sum V_n$. Рассмотрим меры μ_n такие, что каждый из операторов V_n унитарно эквивалентен умножению на независимую переменную ξ в пространстве $L^2(\mu_n)$. Можно считать, что меры μ_n удовлетворяют условию (24) при $q > 3$, и $\sum_n \sqrt{\mu_n(\mathbb{T})} < \varepsilon/2$; в противном случае эти свойства могут быть выполнены после умножения мер μ_n на подходящие положительные веса. Определим оператор $\tilde{S}$ по формуле (26). Тогда из условия (27) вытекает оценка $\|\tilde{S} - S\|_{\mathfrak{S}_1} < \varepsilon$, и для всех $t > 0$ оператор $\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)$ будет ядерным с оценкой для нормы (28). □

Замечание 8.1. Для нормы Гильберта–Шмидта из неравенства (18) следует оценка

$$\|\varphi_t(\tilde{S}) - \varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant 2\sqrt{2t} \left(\sum_n \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_n(\xi)}{|1-\xi|^2} \right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 1.2. Утверждение 1 получается как частный случай теоремы 2.1. Утверждение 2 немедленно следует из теоремы 1.1 после перехода к модели, связанной с полугруппой сдвигов на прямой. В самом деле, в конструкции из теоремы 1.1 разности элементов полугрупп на пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ принадлежат классу ядерных операторов, что и требуется. □

Доказательство теоремы 1.3. Пусть V — произвольный унитарный оператор такой, что 1 не является его собственным числом. Тогда $V = (A - iI)(A + iI)^{-1}$ для некоторого самосопряженного оператора A, а элементы полугруппы имеют вид $\varphi_t(V) = \exp(itA)$. Применяя вариант теоремы Вейля–фон Неймана, принадлежащий Куроде (см. [5] и [12, теорема 6.2.5]), к какому-либо симметрично-нормированному идеалу, содержащемуся во всех классах $\mathfrak{S}_p$ с $p > 1$, по заданному самосопряженному оператору можно построить такой близкий к нему самосопряженный оператор с чисто точечным спектром, что разность между ним и исходным оператором принадлежит $\mathfrak{S}_p$ для всех $p > 1$, причем нормы могут быть сколь угодно малыми.

Представим оператор A как прямую сумму ограниченных операторов A_n и, применив теорему Куроды, построим операторы A'_n такие, что нормы $\|A_n - A'_n\|_{\mathfrak{S}_p}$ малы. Из результатов Дэвиса [19] вытекает, что $\exp(itA_n) - \exp(itA'_n)$ принадлежит всем классам $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Таким образом, мы можем построить самосопряженный оператор A' такой, что $\exp(itA) - \exp(itA')$ принадлежит всем классам $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Значит, это выполнено и для всех $t > 0$, поскольку из включения $\exp(itA) - \exp(itA') \in \mathfrak{S}_p$ следует включение $\exp(2itA) - \exp(2itA') \in \mathfrak{S}_p$. Теперь утверждение следует из теоремы 1.1, примененной к унитарному оператору $V' = (A' - iI)(A' + iI)^{-1}$. □

Список литературы

[1] Амосов Г. Г., Баранов А. Д., *О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой*, Мат. заметки **79** (2006), №1, 3–18.

[2] Амосов Г. Г., Баранов А. Д., *О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой.* II, Мат. заметки **79** (2006), №5, 779–780.

[3] Баранов А. Д., *Вложения модельных подпространств класса Харди: компактность и идеалы Шаттена–фон Неймана*, Изв. РАН. Сер. мат. **73** (2009), №6, 3–28.

[4] Иосида К., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

[5] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[6] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[7] Парфенов О. Г., *О свойствах операторов вложения некоторых классов аналитических функций*, Алгебра и анализ **3** (1991), №2, 199–222.

[8] Парфенов О. Г., *Весовые оценки преобразования Фурье*, Зап. науч. семин. ПОМИ **222** (1995), 151–162.

[9] Полторацкий А. Г., *Граничное поведение псевдопродолжимых функций*, Алгебра и анализ **5** (1993), №2, 189–210.

[10] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970.

[11] Хилле Э., Филлипс Р., *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

[12] Яфаев Д. Р., *Математическая теория рассеяния*, СПбГУ, СПб., 1994.

[13] Ahern P. R., Clark D. N., *Radial limits and invariant subspaces*, Amer. J. Math. **92** (1970), 332–342.

[14] Ahern P. R., Clark D. N., *On functions orthogonal to invariant subspaces*, Acta Math. **124** (1970), 191–204.

[15] Amosov G. G., *Cocycle perturbation of quasifree algebraic K-flow leads to required asymptotic dynamics of associated completely positive semigroup*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **3** (2000), 237–246.

[16] Amosov G. G., Baranov A. D., *On perturbations of the group of shifts on the line by unitary cocycles*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 11, 3269–3273.

[17] Arveson W., *Continuous analogues of Fock space*, Mem. Amer. Math. Soc. **80** (1989), no. 409, iv+66pp.

[18] Clark D. N., *One-dimensional perturbations of restricted shifts*, J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.

[19] Davies E. B., *Lipschitz continuity of functions of operators in the Schatten classes*, J. London Math. Soc.(2) **37** (1988), no. 1, 148–157.

[20] Kapustin V., Poltoratski A., *Boundary convergence of vector-valued pseudocontinuable functions*, J. Funct. Anal. **238** (2006), no. 1, 313–326.

[21] Nikolski N. K., *Operators, functions, and systems*: *an easy reading.* Vols. 1–2, Math. Surveys Monogr., vols. 92–93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[22] Sarason D., *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disc*, Univ. Arkansas Lecture Notes in Math. Sci., vol. 10, Wiley-Intersci., New York, 1994.

Поступило 20 января 2010 г.

Московский
физико-технический институт
Москва
Россия
E-mail: gramos@mail.ru

С.-Петербургский
государственный университет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: anton.d.baranov@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru