УДК 517.95

А. В. Романов

Эффективная конечная параметризация в фазовых пространствах параболических уравнений

Для эволюционных уравнений параболического типа в гильбертовом фазовом пространстве E рассмотрена проблема эффективной (с липшицевой оценкой) параметризации множеств $\mathcal{K} \subset E$ функционалами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ из E^*, или, в иных терминах, проблема линейного липшицева вложения $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^m$. Если $\mathcal{A}$ – глобальный аттрактор уравнения, то такого рода параметризация оказывается равносильной конечномерности динамики на $\mathcal{A}$. Получен ряд признаков параметризации (в различных метриках) подмножеств E и, в частности, конечномерных многообразий $\mathcal{M} \subset E$ линейными функционалами разных классов. Обозначен круг физически значимых параболических задач с фундаментальной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, допускающих параметризацию элементов $u(x) \in \mathcal{A}$ значениями $u(x_i)$ в некоторой конечной системе точек $x_i \in \Omega$.

Библиография: 20 наименований.

Введение

Известно, что финальные режимы диссипативных полулинейных параболических уравнений

$$\partial_t u = G(u) \tag{0.1}$$

в гильбертовом фазовом пространстве E контролируются при определенных условиях конечным числом параметров. Будем рассматривать уравнения (0.1) с гладким разрешающим полупотоком $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ в E и компактным глобальным аттрактором – множеством $\mathcal{A} \subset E$, состоящим из целых ограниченных траекторий и притягивающим при $t \to +\infty$ шары E. Уже в основополагающей работе [1] для класса подобных задач строились линейные функционалы $\varphi_i \in E^*$, $1 \leqslant i \leqslant m$, восстанавливающие траектории на аттракторе в том смысле, что равенства $\varphi_i(u(t)) = \varphi_i(v(t))$ при $t \in \mathbb{R}$ для решений $u(t)$, $v(t) \in \mathcal{A}$ влекут тождество $u(t) \equiv v(t)$. Позднее Р. Манэ [2] обнаружил возможность конечной параметризации инвариантных компактов $\mathcal{K} \subset E$ функционалами из E^*, т. е. наличие таких $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$, что $\varphi_i(u) = \varphi_i(v)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, для $u, v \in \mathcal{K}$ лишь при $u = v$.

В 1984 г. Ч. Фойяш и Р. Темам [3] высказали предположение, что для системы Навье–Стокса с ограниченной фундаментальной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ элементы $u(x)$ аттрактора $\mathcal{A}$ однозначно определяются значениями $u(x_i)$ в некоторой конечной совокупности точек (узлов) $x_i \in \Omega$. Недавно эта гипотеза была подтверждена [4], [5] в случае, когда вынуждающая сила принадлежит одному из функциональных классов Жевре. Интересно, что для периодической области Ω число определяющих узлов x_i оказалось соизмеримым с фрактальной размерностью аттрактора $\mathcal{A}$. Методы, изложенные в [4], [5], применимы ко многим параболическим уравнениям в частных производных с аналитическим (состоящим из вещественно-аналитических функций) глобальным аттрактором. Данные методы, однако, не приводят к оценкам E-нормы $\|u-v\|$ для элементов $u,v\in\mathcal{A}$ через значения $|u(x_i)-v(x_i)|$. Такого рода липшицевы оценки получены в работе [6] для уравнения Курамото–Сивашинского и ряда других одномерных уравнений параболического типа. В сущности, это позволяет говорить об "отслеживании" установившихся режимов соответствующих физических систем с помощью конечного числа точечных датчиков.

В настоящей статье обсуждается вопрос о том, для каких множеств $\mathcal{K}\subset E$ имеет место соотношение

$$\|u-v\|\leqslant c\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(u-v)|,\qquad c=\mathrm{const},\tag{0.2}$$

на $\mathcal{K}$ с зависящими от $\mathcal{K}$ функционалами $\varphi_i\in E^*$. Коль скоро неравенство (0.2) выполнено, то φ_i можно выбирать из *любого* множества $\mathcal{F}\subset E^*$ с плотной в E^* линейной оболочкой $\operatorname{sp}\mathcal{F}$. Оказывается, при надлежащих ограничениях на нелинейную часть векторного поля G в (0.1) *эффективную конечную параметризацию* (0.2) допускает (см. теорему 4.2) всякое множество вида $\mathcal{K}=\Phi_\tau\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}\subset E$, $\tau>0$ и

$$\|\Phi_\tau u-\Phi_\tau v\|\geqslant\rho\|u-v\|,\qquad \rho>0,\tag{0.3}$$

на $\mathcal{N}$ при $\rho=\rho(\mathcal{N})$. В важном случае $\mathcal{K}=\mathcal{A}$ установлена равносильность соотношения (0.2) и изученного в [7], [8] свойства конечномерности динамики на аттракторе (предельной динамики), подразумевающего описание фазового движения на $\mathcal{A}$ обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) с липшицевым векторным полем в $\mathbb{R}^n$.

Параболический полупоток сглаживает решения, поэтому множество $\mathcal{K}=\Phi_\tau\mathcal{N}$ всегда принадлежит некоторому непрерывно вложенному в E гильбертову пространству E_1 и фактически условие (0.3) обеспечивает *усиленную параметризацию*, т. е. параметризацию типа (0.2) для $\mathcal{K}$ не только в E, но и в E_1. При этом E-норма в (0.2) заменяется на более сильную E_1-норму $\|\cdot\|_1$, а *определяющие функционалы* φ_i выбираются из более широкого, чем E^*, сопряженного пространства E_1^*. Если к тому же, как часто бывает, E_1 состоит из функций класса $C(\Omega)$, непрерывных в замыкании ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, то естественно реализовать φ_i как линейные комбинации мер Дирака на Ω, что влечет (теорема 5.1) оценку

$$\|u-v\|_1\leqslant c\sum_{i=1}^{r}|u(x_i)-v(x_i)|,\qquad c=\mathrm{const},\tag{0.4}$$

на $\mathcal{K}$ при правильном выборе точек $x_i\in\Omega$ и $r\geqslant m$.

Ясно, что соотношение (0.2) равнозначно возможности линейного липшицева вложения $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^m$ и, таким образом, имеет чисто геометрический смысл. Несколько общих признаков параметризации типа (0.2) для подмножеств произвольного банахова пространства $\mathcal{X}$ получено в § 3. В частности, если $\mathcal{X}$ обладает базисом, то (0.2) справедливо для компактных конечномерных

C^1-подмногообразий $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$. С другой стороны, показано (см. § 4, 5), что в случае $E = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, множество $\mathcal{K} \subset C(\Omega)$ допускает усиленные варианты параметризации (0.2) и, главное, узловую параметризацию (0.4) при каждом из двух условий:

а) $\mathcal{K}$ инвариантно и лежит на компактном конечномерном C^1-подмногообразии $\mathcal{M} \subset E$;

б) $\mathcal{K}$ лежит на инвариантном многообразии $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – график функции $\gamma \in \operatorname{Lip}\bigl(PE, (I-P)E\bigr)$, $I = \mathrm{id}$ и P – конечномерный спектральный проектор ведущей линейной компоненты векторного поля G.

Гладкое или липшицево конечномерное инвариантное многообразие $\mathcal{M} \subset E$ называется *инерциальным*, если оно содержит глобальный аттрактор и притягивает экспоненциально по $t \to +\infty$ шары E. Такое многообразие существует, например, для уравнений реакции-диффузии в ряде ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leqslant 3$, а также для уравнений Гинзбурга–Ландау, Кана–Хилларда, Курамото–Сивашинского и Колмогорова–Сивашинского. Подробности можно найти в работах [9]–[14] и в цитированных там источниках.

Как видим, на инерциальном многообразии $\mathcal{M}$ типа графика возможна параметризация (0.2), (0.4). Это усиливает сходные по форме результаты, полученные в [6]. В отличие от работы [6] мы рассматриваем уравнения в частных производных любой размерности и параметризуем элементы многообразия $\mathcal{M}$ функционалами произвольной природы, а не только значениями в точках или интегральными средними. С другой стороны, параметризацию (0.2), (0.4) допускает глобальный аттрактор параболических уравнений, демонстрирующих конечномерную предельную динамику и, тем самым (согласно [8]), аттрактор диссипативного скалярного уравнения вида

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x), \qquad x \in (0,1), \tag{0.5}$$

с гладкой функцией f и подходящим функциональным фазовым пространствам E.

Статья организована следующим образом. В § 1, 2 приведены элементарные сведения об абстрактном параболическом уравнении (0.1) и описаны полезные для дальнейшего изложения свойства множеств в гильбертовой шкале, порожденной главной линейной частью векторного поля G. Вопрос о справедливости соотношения (0.2) в пространствах Банаха рассмотрен с общей точки зрения в § 3. Ключевой § 4 посвящен, большей частью, выводу достаточных признаков конечной параметризации множеств $\mathcal{K} \subset E$ в терминах фазовой динамики (0.1). В § 5 доказана теорема об узловой параметризации (0.4) и очерчен круг ее приложений к задачам математической физики.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим полулинейные параболические уравнения

$$\partial_t u = -Au + F(u) \tag{1.1}$$

в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве X с нормой $|\cdot|$.

Хрестоматийной ссылкой в этой связи является книга [15]. Замкнутый неограниченный линейный оператор A в X с плотной областью определения $D(A)$ называется *секториальным*, если полугруппа $\{e^{-tA}\}_{t\geqslant 0}$ аналитична. Обычным образом определяются степени A^θ и строится соответствующая оператору A шкала гильбертовых пространств X^θ, $\theta \in \mathbb{R}$, с нормой $|\cdot|_\theta$. При этом $X^0 = X$, $X^1 = D(A)$.

Исходим всюду далее из следующих основных предпосылок относительно (1.1):

(H1) линейный оператор A секториален, его резольвента компактна и спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$;

(H2) при некотором $\alpha \in [0,1)$ функция F принадлежит классу $BC^2(X^\alpha, X)$, состоящему из C^2-гладких ограниченных отображений $X^\alpha \to X$, и

$$|F(u) - F(v)| \leqslant M|u - v|_\alpha \tag{1.2}$$

для $u, v \in X^\alpha$, $M = \mathrm{const}$;

(H3) уравнение (1.1) порождает в X^α гладкий диссипативный полупоток $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$.

Можно считать, что $|u|_\theta = |A^\theta u|$ для $u \in X^\theta$ и $A^\theta\colon X^\theta \to X$ – изометрия. При $\beta > \theta$ тождественное вложение $X^\beta \subset X^\theta$ плотно и вполне непрерывно. Диссипативность полупотока $\{\Phi_t\}$ означает наличие такого (втягивающего) шара $\mathcal{B}_0 \subset X^\alpha$, что $\Phi_t\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$ при $t > \tau(\mathcal{B})$ для произвольного шара $\mathcal{B}$ в X^α. Нетрудно показать (см. [15, § 3.3, 3.4]), что условие (H3) следует из (H1), (H2). Эволюционные операторы Φ_t, $t > 0$, компактны и $\Phi_t X^\alpha \subset X^1$. Условие (H1) позволяет определить для $a > 0$ конечномерные спектральные проекторы P_a оператора A в X, отвечающие части спектра $\sigma(A)$ при $\operatorname{Re}\lambda < a$. Проекторы P_a коммутируют с A^θ и непрерывны в X^θ при всех $\theta \geqslant 0$.

Сделаем еще одно предположение:

(H4) $P_a u \to u$ на X^α при $a \to \infty$.

Требованиям (H1), (H4) удовлетворяет всякий самосопряженный положительный дискретный (с компактной резольвентой) оператор в X.

В реальных диссипативных задачах неравенство (1.2) выполняется обычно лишь на шарах $\mathcal{B} \subset X^\alpha$. Стандартная процедура "урезания" [9], [10] позволяет перейти тогда к наследующему финальную динамику (1.1) уравнению $\partial_t u = -Au + F_1(u)$ с равномерно липшицевой функцией $F_1 \in BC^2(X^\alpha, X)$. Считаем, что это проделано заранее.

Множество $\mathcal{N} \subset X^\alpha$ называем *инвариантным*, если $\Phi_t\mathcal{N} = \mathcal{N}$ для $t > 0$. В условиях (H1)–(H3) существует (см., например, [9], [16]) конечномерный компактный глобальный аттрактор – инвариантное множество $\mathcal{A} \subset X^\alpha$, притягивающее при $t \to +\infty$ шары X^α. Каждое ограниченное инвариантное подмножество X^α содержится в $\mathcal{A}$ и, на самом деле, $\mathcal{A} \subset X^1$. Заметим, что $E = X^\alpha$ в контексте введения.

Из справедливости гипотез (H2)–(H4) с выбранным значением параметра $\alpha \in [0,1)$ вытекает их справедливость также и с любым значением $\beta \in (\alpha, 1)$. Действительно, если $F \in BC^2(X^\alpha, X)$, то $F \in BC^2(X^\beta, X)$, как следствие непрерывности вложения $X^\beta \subset X^\alpha$. По той же причине можно заменить норму $|\cdot|_\alpha$ на $|\cdot|_\beta$ в правой части (1.2). Сходимость $P_a u \to u$ в X^β явствует из сходимости в X^α, ибо проекторы P_a коммутируют с $A^{\beta-\alpha}$. Таким образом, наряду с X^α в качестве фазового пространства (1.1) можно рассматривать и X^β с произвольным $\beta \in (\alpha, 1)$.

Напомним понятие конечномерной динамики, введенное в работе [7].

Определение 1.1. Скажем, что фазовая динамика уравнения (1.1) на инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ *конечномерна*, если для некоторого ОДУ $\dot{\xi} = h(\xi)$ с липшицевым векторным полем $h(\xi)$ и разрешающим потоком $\{S_t\}$ в $\mathbb{R}^n$ найдется такое липшицево вложение $g\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^n$, что $g\Phi_t u = S_t g u$ на $\mathcal{K}$ при $t \geqslant 0$. В случае $\mathcal{K} = A$ будем говорить о конечномерной предельной динамике уравнения (1.1).

Как показано в [8], конечномерность предельной динамики вытекает из тождественной вложимости аттрактора в конечномерное (не обязательно инвариантное) C^1-подмногообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$ и, тем более, из наличия гладкого инерциального многообразия $\mathcal{M} \subset X^\alpha$. Существование инерциального многообразия вида

$$\mathcal{M} = \{u \in X^\alpha \colon u = p + \gamma(p),\ p \in P_a X^\alpha\} \tag{1.3}$$

с $a > 0$ и равномерно липшицевой функции $\gamma\colon P_a X^\alpha \to (I - P_a)X^\alpha$, $I = \mathrm{id}$ в X^α, также гарантирует конечномерность динамики на аттракторе для уравнения (1.1).

§ 2. Полезные леммы

Построения из настоящего параграфа представляют интерес как сами по себе, так и с точки зрения дальнейшего изложения. Здесь и ниже будут существенно использоваться результаты, полученные в работах [7], [8].

Начнем с обсуждения общих свойств компактности в шкале пространств $\{X^\theta\}$. Отметим, что множество, компактное в X^θ, компактно также и в X^β, $\beta < \theta$. Обозначим через $G(u)$ векторное поле $F(u) - Au$ уравнения (1.1). Поле G можно считать определенным не только на X^1, но и на X^α, так что $G\colon X^1 \to X$ и $G\colon X^\alpha \to X^{\alpha-1}$.

Лемма 2.1. *Если для относительно компактного множества $\mathcal{H} \subset X^\alpha$ его образ $G(\mathcal{H})$ является ограниченным подмножеством X^1, то $\mathcal{H} \subset X^1$ и $\mathcal{H}$ компактно или не компактно одновременно во всех X^θ-метриках при $\theta \leqslant 1$.*

Доказательство. Включение $\mathcal{H} \subset X^1$ следует непосредственно из равенства $A = F - G$ и включения $G(\mathcal{H}) \subset X^1$.

Пусть множество $\mathcal{H}$ компактно в X^θ при каком-то $\theta \leqslant 1$. Если $\theta \geqslant \alpha$, то $\mathcal{H}$ – компакт в X^α. Если же $\theta < \alpha$, то X^θ-замкнутое множество $\mathcal{H}$ замкнуто и в более сильной метрике X^α, т. е. $\mathcal{H}$ – компакт в X^α. В силу [7, лемма 4.2] функция $G\colon \mathcal{H} \to X^\alpha$ гёльдерова в X^α-метрике, откуда, учитывая (1.2), получаем оценку

$$|u - v|_1 \leqslant c|u - v|_\alpha^\varepsilon$$

на $\mathcal{H}$ при $\varepsilon, c > 0$. Вместе с X^α-компактностью $\mathcal{H}$ это влечет компактность $\mathcal{H}$ в X^1, а стало быть, и в X^θ для всех $\theta \leqslant 1$. Лемма доказана.

Согласно [7, лемма 4.3] множество $G(\mathcal{A})$ ограничено в X^1. Таким образом, получаем

Следствие 2.2. *Всякий инвариантный компакт $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ (и, в частности, аттрактор $\mathcal{A}$) компактен в пространстве X^θ при каждом $\theta \leqslant 1$.*

Для $\mathcal{H} \subset X^\theta$, $\theta < 1$, полагаем

$$\mathcal{H}_\theta = \{w \in X^\theta \colon w = (u-v)/|u-v|_\theta,\ u,v \in \mathcal{H},\ u \neq v\}. \tag{2.1}$$

Важную роль далее будут играть множества $\mathcal{K} \subset X^\alpha$, для которых выполняется

Условие 2.3. *Имеем $\mathcal{K} = \Phi_\tau \mathcal{N}$ для $\mathcal{N} \subset X^\alpha$, $\tau > 0$ и*

$$|\Phi_\tau u - \Phi_\tau v|_\alpha \geqslant \rho |u-v|_\alpha \tag{2.2}$$

на $\mathcal{N}$, где $\rho = \rho(\mathcal{N}) > 0$.

Ясно, что при этом $\mathcal{K} \subset X^1$, а если множество $\mathcal{K}$ инвариантно, то $\mathcal{N} = \mathcal{K}$. Помимо того [15, теорема 3.5.2], $G(\mathcal{K}) \subset X^\theta$ при любом $\theta < 1$. Если множество $\mathcal{K}$ ограничено в X^α, то компактность оператора Φ_τ влечет относительную компактность $\mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$ в X^α.

Лемма 2.4. *Если для множества $\mathcal{K}$ в X^α выполнено условие 2.3, то справедливы следующие утверждения*:

а) *метрики пространств X^θ и X^α на $\mathcal{K}$ эквивалентны при всех $\theta \in (\alpha, 1)$, то же верно и при $\theta = 1$, коль скоро $\mathcal{K}$ ограничено в X^α*;

б) *множество $\mathcal{K}_\theta$ относительно компактно в X^θ при каждом $\theta \in [\alpha, 1)$*;

в) *найдется спектральный проектор P_a оператора A такой, что*

$$|u-v|_\theta \leqslant l |P_a(u-v)|_\theta \tag{2.3}$$

на $\mathcal{K}$ для $\theta \in [\alpha, 1)$, $l = l(\mathcal{K}, \theta)$; если K ограничено в X^α, то же верно и для $\theta = 1$.

Доказательство. Как известно [17, лемма 5.2],

$$|\Phi_\tau u - \Phi_\tau v|_\theta \leqslant c(\tau, \theta) |u-v|_\alpha$$

на $\mathcal{N}$ при $\alpha < \theta < 1$. В сочетании с неравенством (2.2) это дает оценку

$$|u-v|_\theta \leqslant c_1 |u-v|_\alpha$$

для $u, v \in \mathcal{K}$ и $c_1 = \mathrm{const}$. Обратное неравенство (с другой константой) следует из непрерывности вложения $X^\theta \subset X^\alpha$, и эквивалентность метрик пространств X^α и X^θ при $\theta \in (\alpha, 1)$ установлена. Если множество $\mathcal{K}$ ограничено в X^α, то множество $\mathcal{N}$ относительно компактно и

$$|G(\Phi_\tau u) - G(\Phi_\tau v)| \leqslant c_2 |G(\Phi_\tau u) - G(\Phi_\tau v)|_\alpha \leqslant c_3 |u-v|_\alpha \leqslant c_4 |\Phi_\tau u - \Phi_\tau v|_\alpha$$

на $\mathcal{N}$ с положительными постоянными c_2, c_3, c_4. Здесь использованы непрерывность вложения $X^\alpha \subset X$, затем лемма 3.2 из [7] и, наконец, соотношение (2.2). Теперь благодаря равенству $A = F - G$ и липшицевой оценке (1.2) имеем

$$|u - v|_1 \leqslant |F(u) - F(v)| + |G(u) - G(v)| \leqslant (M + c_4)|u - v|_\alpha$$

для $u, v \in \mathcal{K}$, т. е. метрики пространств X^1 и X^α на $\mathcal{K}$ эквивалентны.

Для доказательства утверждения б) возьмем какое-нибудь $\beta \in (\theta, 1)$. Эквивалентность на $\mathcal{K}$ метрик пространств X^β и X^θ обеспечивает ограниченность множества $\mathcal{K}_\theta$ в X^β и, тем самым (с учетом компактности вложения $X^\beta \subset X^\theta$), относительную компактность $\mathcal{K}_\theta$ в X^θ.

Перейдем к доказательству утверждения в). Основная гипотеза (H4) гарантирует сильную сходимость при $a \to +\infty$ проекторов P_a к тождественному оператору I в X^α. По теореме Асколи–Арцела эта сходимость равномерна на относительно компактном множестве $\mathcal{K}_\alpha \subset X^\alpha$. Пусть $w = u - v$ для $u, v \in \mathcal{K}$, $u \neq v$, и $q = 1/2$; тогда найдется такое $a > 0$, что

$$|w - P_a w|_\alpha \leqslant q|w|_\alpha, \qquad |w|_\alpha \leqslant |P_a w|_\alpha + q|w|_\alpha.$$

Отсюда выводим искомую оценку (2.3) при $\theta = \alpha$, $l = 2$. В общем виде неравенство (2.3) следует из эквивалентности метрик пространств X^θ, X^α на $\mathcal{K}$ и на конечномерном пространстве $P_a X^\alpha \subset X^1$. Доказательство завершено.

Утверждение в) леммы 2.4 позволяет слегка усилить один из выводов, сделанных в работе [7, теорема 1.6].

Лемма 2.5. *Для инвариантного компакта $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ оценка (2.2) с фиксированным $\tau > 0$ есть необходимое и достаточное условие конечномерности фазовой динамики на $\mathcal{K}$.*

В определении 1.1 сопрягающее отображение $g\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^n$ билипшицево в X^α-метрике и, практически, речь там идет о конечномерной X^α-динамике на $\mathcal{K}$.

Замечание 2.6. Из следствия 2.2 и леммы 2.4, а) вытекает, что фазовая X^β-динамика на инвариантном компакте $\mathcal{K} \subset X^1$ конечномерна или не конечномерна одновременно при всех $\alpha \leqslant \beta < 1$.

§ 3. Общий подход

Рассмотрим здесь проблему параметризации типа (0.2) в произвольном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ с нормой $\|\cdot\|$. Как принято, символы w и w^* будут идентифицировать слабую и слабую* топологии в сопряженном пространстве $\mathcal{X}^*$.

Как уже отмечалось, $\mathcal{X}$-параметризация (0.2) множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ означает просто наличие линейного липщицева вложения $g\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$. На самом деле, можно сказать несколько больше.

Лемма 3.1. *Для множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ параметризация* (0.2) *равносильна существованию такого конечномерного непрерывного линейного проектора P в $\mathcal{X}$, что*

$$\|u - v\| \leqslant l\|P(u - v)\| \tag{3.1}$$

на $\mathcal{K}$ при $l = \mathrm{const}$.

Доказательство. Записав проектор P в неравенстве (3.1) формулой

$$Pu = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(u)e_i, \tag{3.2}$$

где $\{e_i\}$ – произвольный базис в $P\mathcal{X}$, а $\{\varphi_i\}$ – единственная система функционалов из $\mathcal{X}^*$ со свойствами $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ и $\varphi_i = 0$ на $\ker P$, получаем немедленно неравенство (0.2) для $u, v \in \mathcal{K}$. Обратно, функционалы φ_i в (0.2) можно считать линейно независимыми. Пусть $e_1, \dots, e_m$ – такая система линейно независимых векторов в $\mathcal{X}$, что $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ и P – соответствующий проектор (3.2). Поскольку норма $|\varphi_1(\,\cdot\,)| + \dots + |\varphi_m(\,\cdot\,)|$ в конечномерном пространстве $P\mathcal{X}$ эквивалентна $\mathcal{X}$-норме, то P реализует оценку (3.1) на $\mathcal{K}$. Лемма доказана.

Разумеется, факт линейного липшицева вложения множества $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^m$ влечет конечность фрактальной размерности $\dim_f \mathcal{K}$. Между тем, известен пример [18] компакта $\mathcal{K}$ в гильбертовом пространстве, не допускающего такого рода вложения (даже нелинейного), хотя $\dim_f \mathcal{K} < \infty$.

Параметризация (0.2) подразумевает некоторый произвол при выборе определяющих функционалов.

Лемма 3.2. *Если для множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ имеет место соотношение* (0.2), *то определяющие функционалы в* (0.2) *можно выбирать из любого множества $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}^*$ с сильно плотной в $\mathcal{X}^*$ линейной оболочкой $\operatorname{sp}\mathcal{F}$.*

Доказательство. Согласно сказанному выше исходим из наличия для данного $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ проектора P вида (3.2), удовлетворяющего соотношению (3.1).

Для каждого φ_i в (3.2) найдем последовательность функционалов $\{\chi_{i,k}\}$ из $\operatorname{sp} F$, сильно сходящуюся к φ_i при $k \to \infty$. Если k достаточно велико, то матрица $B_k = \{b_{ij}\} = \{\chi_{j,k}(e_i)\}$ размера $m \times m$ близка к единичной и обратима. Обозначим через T_k линейный оператор в конечномерном подпространстве $P\mathcal{X}$ с матрицей B_k^{-1} в базисе $\{e_i\}$. Нетрудно понять, что $\chi_{i,k}(T_k e_j) = \delta_{ij}$, а потому функционалы $\chi_{1,k}, \dots, \chi_{m,k}$ линейно независимы и операторы

$$Q_k u = \sum_{i=1}^{m} \chi_{i,k}(u) T_k e_i$$

представляют собой линейные непрерывные проекции на $P\mathcal{X}$. Сходимость операторов $T_k \to I$, где $I = \mathrm{id}$ в $P\mathcal{X}$, и $Q_k \to P$ равномерна, следовательно,

$$\|(P - Q_k)(u - v)\| \leqslant q\|u - v\| \tag{3.3}$$

на $\mathcal{K}$ со сколь угодно малым $q > 0$ и $k = k(q)$. С помощью (3.1) выводим теперь оценку

$$\|u - v\| \leqslant l\|Q_k(u - v)\| + lq\|u - v\|$$

и (при $lq < 1$) оценку

$$\|u - v\| \leqslant c_1 \|Q_k(u - v)\| \tag{3.4}$$

для $u, v \in \mathcal{K}$, $c_1 = l/(1 - lq)$. Фиксируя $k = k(q)$ при $q < 1/l$, найдем такие линейно независимые функционалы $\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{F}$, что $\operatorname{sp}(\chi_{i,k}) \subset \operatorname{sp}\{\psi_\nu\}$. Если $\|T_k e_i\| \leqslant c_2$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то

$$\|Q_k(u - v)\| \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{m} |\chi_{i,k}(u - v)| \leqslant c_3 \sum_{\nu=1}^{r} |\psi_\nu(u - v)|$$

на $\mathcal{K}$. В силу оценки (3.4) имеем

$$\|u - v\| \leqslant c \sum_{\nu=1}^{r} |\psi_\nu(u - v)| \tag{3.5}$$

для $u, v \in \mathcal{K}$, $c = \mathrm{const}$. Лемма доказана.

Если пространство $\mathcal{X}$ рефлексивно, то для $\operatorname{sp}\mathcal{F}$ w^*-плотность в $\mathcal{X}^*$ гарантирует также и сильную плотность в $\mathcal{X}^*$. Действительно, в этом случае w^*-топология и w-топология в сопряженном пространстве $\mathcal{X}^*$ идентичны, а w-замыкание выпуклого множества $\operatorname{sp}\mathcal{F}$ совпадает с его сильным замыканием.

С каждым множеством $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ ассоциируем (см. (2.1), а также [8]) подмножество единичной сферы

$$\mathcal{K}^0 = \{w \in \mathcal{X} \colon w = (u - v)/\|u - v\|,\ u, v \in \mathcal{K},\ u \neq v\}.$$

Геометрия подмножества $\mathcal{K}^0$ оказывается тесно связанной с задачей параметризации (0.2) для $\mathcal{K}$, или, что то же, с проблемой конечномерного липшицева декартова строения множества $\mathcal{K}$. Пусть $\omega(\mathcal{K}^0)$ – мера некомпактности Хаусдорфа, т. е. точная нижняя грань таких $\varepsilon > 0$, что $\mathcal{K}^0$ принадлежит ε-окрестности некоторого компакта $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathcal{X}$. Обычно дают несколько другое определение [19, § 32], имея в виду здесь те $\varepsilon > 0$, при которых для $\mathcal{K}^0$ существует конечная ε-сеть. Эквивалентность этих формулировок легко получить с помощью конструкции, известной [19, § 18] как "проектор Шаудера". Если $\mathcal{K}^0$ относительно компактно, то $\omega(\mathcal{K}^0) = 0$, и наоборот. В гильбертовом случае всегда $\omega(\mathcal{K}^0) \leqslant 1$, поскольку для $\varepsilon > 1$ в качестве $\mathcal{N}_\varepsilon$ можно взять замыкание образа $P\mathcal{K}^0$, где P – любой конечномерный ортопроектор.

Лемма 3.3. *В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$ оценка вида (3.1) с конечномерным ортопроектором P для множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ равносильна требованию $\omega(\mathcal{K}^0) < 1$.*

Доказательство. Пусть $\omega(\mathcal{K}^0) < 1$; тогда при некотором $\varepsilon < 1$ множество $\mathcal{K}^0$ лежит в ε-окрестности некоторого компакта $\mathcal{N}_\varepsilon \subset \mathcal{X}$. Возьмем какую-нибудь последовательность ортопроекторов P_n, сильно сходящуюся к тождественному оператору I, и положим $Q_n = I - P_n$. По теореме Асколи–Арцела сходимость $Q_n \to 0$ равномерна на $\mathcal{N}_\varepsilon$, поэтому $\|Q_n w\| \leqslant \delta < 1 - \varepsilon$ на $\mathcal{N}_\varepsilon$ при достаточно большом n. Для любого $w \in \mathcal{K}^0$ найдется такое $w' \subset \mathcal{N}_\varepsilon$, что $\|w - w'\| < \varepsilon$, а значит,

$$\|Q_n w\| \leqslant \|Q_n(w - w')\| + \|Q_n w'\| < \varepsilon + \delta.$$

Поскольку $w = (u-v)/\|u-v\|$, где $u, v \in \mathcal{K}$, то искомая оценка (3.1) при $P = P_n$ и $l = (1-\varepsilon-\delta)^{-1}$ следует теперь из неравенства $\|w\| \leqslant \|Q_n w\| + \|P_n w\|$.

Обратно, условие (3.1) с $l > 1$ дает оценку $\|Pw\| \geqslant 1/l$ на $\mathcal{K}^0$, а поскольку $\|Pw\|^2 + \|Qw\|^2 = 1$ для $Q = I - P$, то $\|Qw\| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon^2 = 1 - 1/l^2$. Замыкание $\mathcal{N}_\varepsilon$ образа $P\mathcal{K}^0$ компактно, и $\|w - Pw\| = \|Qw\| \leqslant \varepsilon$ при $w \in \mathcal{K}^0$, т.е. $\omega(\mathcal{K}^0) \leqslant \varepsilon < 1$. Лемма доказана.

Относительная компактность $\mathcal{K}^0$ приводит к усиленному варианту параметризации (0.2) множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$.

Лемма 3.4. *Если в пространстве $\mathcal{X}$ есть базис, $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ и $\omega(\mathcal{K}^0) = 0$, то для $\mathcal{K}$ справедливы соотношения* (3.1) *и* (0.2). *При этом определяющие функционалы в* (0.2) *можно выбирать из произвольного множества $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}^*$ с w^*-плотной в $\mathcal{X}^*$ линейной оболочкой* $\operatorname{sp} \mathcal{F}$.

Доказательство. Наличие базиса обеспечивает существование ограниченных n-мерных линейных проекторов P_n в $\mathcal{X}$, сильно сходящихся при $n \to \infty$ к $I = \mathrm{id}$. Действуя, как при выводе леммы 2.4, в), получаем для множества $\mathcal{K}$ неравенство (3.1) с конечномерным проектором P вида (3.2). Согласно лемме 3.1 это влечет и свойство (0.2) для $\mathcal{K}$.

Дальнейшие рассуждения связаны с выбором подходящей аппроксимации функционалов $\varphi_i \in \mathcal{X}^*$ в формуле (3.2) элементами $\chi \in \operatorname{sp} \mathcal{F}$ и почти полностью следуют доказательству леммы 3.2. Отличие состоит в том, что вместо сильной сходимости последовательностей функционалов $\chi_{i,k} \to \varphi_i$ для $i = 1, \dots, m$ мы предполагаем w^*-сходимость *обобщенных последовательностей* $\chi_{i,d} \to \varphi_i$, где $\{d\}$ – фундаментальная система w^*-окрестностей нуля в $\mathcal{X}^*$ с отношением частичного порядка по включению (см. [20, гл. 1]). Построим затем (как при доказательстве леммы 3.2) соответствующие операторы T_d в $P\mathcal{X}$ и проекторы Q_d в $\mathcal{X}$. Ясно, что $Q_d u \to Pu$ на $\mathcal{X}$. Эта сходимость равномерна на множестве $\mathcal{K}^0$, так как $\mathcal{K}^0$ относительно компактно и нормы проекторов Q_d ограничены в совокупности. Тем самым, можно получить оценки типа (3.3) и (3.4) для Q_d, после чего вывести искомое соотношение (3.5) с функционалами $\psi_\nu \in \mathcal{F}$.

Пусть, далее, $\mathcal{M}$ – компактное конечномерное C^1-подмногообразие в $\mathcal{X}$; тогда, как видно из доказательства леммы 2.3 работы [7], множество $\mathcal{M}^0$ относительно компактно. Вместе с леммой 3.4 это позволяет сформулировать следующий достаточный признак параметризации (0.2).

Лемма 3.5. *Если в пространстве $\mathcal{X}$ есть базис, то всякое компактное конечномерное C^1-подмногообразие $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ допускает параметризацию* (0.2).

Заметим, что в случае $\mathcal{M} \subset C^2$ данное утверждение (без предположения о базисе) следует из бесконечномерной версии [15, лемма 9.2.1] теоремы вложения Уитни и леммы 3.1.

В заключение параграфа приведем весьма полезное необходимое условие параметризации (0.2).

Лемма 3.6. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_0$ – пространства Банаха с нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_0$, причем имеют место плотные непрерывные вложения $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_0^* \subset \mathcal{X}^*$.*

Тогда $\mathcal{X}$-параметризация (0.2) *множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ влечет эквивалентность на $\mathcal{K}$ метрик пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_0$.*

Доказательство. Как следует из леммы 3.2 и доказательства леммы 3.1, найдется проектор вида (3.2) в $\mathcal{X}$ с функционалами $\varphi_i \in \mathcal{X}_0^*$. Если при этом $\mathcal{X}$-нормы векторов e_i и $\mathcal{X}_0^*$-нормы функционалов φ_i в (3.2) ограничены сверху числом b, то из (3.1) получается оценка $\|u-v\| \leqslant lb^2m\|u-v\|_0$ для $u, v \in \mathcal{K}$. Обратное неравенство (с другой константой) вытекает из непрерывности вложения $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0$. Лемма доказана.

§ 4. Основные результаты

Вновь возвращаемся к параболическому уравнению (1.1) в шкале гильбертовых пространств $\{X^\theta\}$. Полагаем $Y_\theta = (X^\theta)^*$ для $\theta \in \mathbb{R}$. Поскольку при $\beta < \theta$ вложение пространств $X^\theta \subset X^\beta$ непрерывно и плотно, то это же верно для вложения сопряженных пространств $Y_\beta \subset Y_\theta$. Сильная топология в гильбертовой шкале $\{Y_\theta\}$ ослабевает с ростом параметра θ. Множество $\mathcal{F} \subset Y_\theta$ назовем *порождающим*, если линейная оболочка $\operatorname{sp}\mathcal{F}$ сильно плотна в Y_θ. С ослаблением топологии запас плотных множеств увеличивается и, кроме того, в фиксированной топологии отношение плотности множеств транзитивно. Тем самым, при $\beta < \theta$ всякое порождающее множество $\mathcal{F} \subset Y_\beta$ является таковым и в Y_θ.

Нас будет интересовать вопрос о параметризации (0.2) в пространствах X^θ. Данное свойство сохраняется при уменьшении параметра θ, что вытекает из леммы 3.2 и плотности вложения $Y_\beta \subset Y_\theta$ для $\beta < \theta$. По той же лемме определяющие функционалы в X^θ-параметризации (0.2) множества $\mathcal{K} \subset X^\theta$ можно выбирать из произвольного порождающего подмножества $\mathcal{F} \subset Y_\theta$. Как и в § 1, 2 предполагаем справедливость основных гипотез (H1)–(H4) для коэффициентов параболического уравнения (1.1).

Приведем сначала необходимое условие параметризации (0.2) для произвольных множеств в гильбертовой шкале $\{X^\theta\}$.

Теорема 4.1. *Пусть $\theta \in \mathbb{R}$ и множество $\mathcal{K} \subset X^\theta$ допускает X^θ-параметризацию* (0.2). *Тогда при любом $\beta < \theta$ метрики пространств X^β и X^θ на $\mathcal{K}$ эквивалентны.*

Теорема 4.1 является следствием леммы 3.6, а также непрерывности и плотности вложений пространств $X^\theta \subset X^\beta$, $Y_\beta \subset Y_\theta$.

Все достаточные признаки параметризации (0.2) для множеств $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ будут формулироваться в терминах фазовой динамики уравнения (1.1).

Теорема 4.2 (основная). *Пусть множество $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ удовлетворяет условию 2.3. Тогда при любом $\theta \in [\alpha, 1)$ из каждого порождающего множества $\mathcal{F} \subset Y_\theta$ можно выбрать линейно независимые функционалы $\psi_1, \dots, \psi_r$ такие, что*

$$|u-v|_\theta \leqslant c\sum_{i=1}^r |\psi_i(u-v)| \tag{4.1}$$

для $u, v \in \mathcal{K}$, $c = \mathrm{const}$. Если $\mathcal{K}$ ограничено в X^α, то это же верно и при $\theta = 1$.

Доказательство. Условие 2.3 позволяет применить лемму 2.4, в) и получить для множества $\mathcal{K}$ оценку (2.3) при $\theta \in [\alpha, 1)$, а также и при $\theta = 1$, если $\mathcal{K}$ ограничено в X^α. После этого утверждения теоремы следуют из лемм 3.1 и 3.2.

Имеется естественная связь между понятиями эффективной конечной параметризации и конечномерности фазовой динамики в смысле определения 1.1.

Теорема 4.3. *Для всякого инвариантного компакта $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ следующие свойства равносильны*:

а) *динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна*;

б) *$\mathcal{K}$ допускает параметризацию* (0.2) *в* X^α;

в) *$\mathcal{K}$ допускает параметризацию* (0.2) *в* X^1.

Доказательство. Ясно, что свойство в) влечет б), поэтому достаточно установить логическую цепь б) $\to$ а) $\to$ в).

Докажем импликацию б) $\to$ а). Согласно лемме 3.1 найдется непрерывный конечномерный проектор $P\colon X^\alpha \to X^\alpha$, удовлетворяющий на $\mathcal{K}$ соотношению (3.1). Поскольку базовое пространство X рефлексивно, то, пользуясь [7, теорема 1.6], выводим отсюда конечномерность динамики на $\mathcal{K}$.

Докажем импликацию а) $\to$ в). Лемма 2.5 обеспечивает оценку (2.2) на инвариантном компакте $\mathcal{K}$ с некоторым $\tau > 0$, в силу чего $\mathcal{K}$ удовлетворяет условию 2.3 и по лемме 2.4, в) неравенство (2.3) справедливо для $u, v \in \mathcal{K}$ при $\theta = 1$. Вместе с леммой 3.1 это дает X^1-параметризацию (0.2) множества $\mathcal{K}$. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению параметризации типа (0.2) на конечномерных подмногообразиях $\mathcal{M} \subset X^\alpha$.

Предложение 4.4. *Если $\mathcal{M}$ – компактное конечномерное C^1-многообразие в X^α, то всякое инвариантное множество $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ допускает X^1-параметризацию* (0.2).

Доказательство. Замыкание $\mathcal{K}$ в X^α компактно и инвариантно. Считаем, не теряя общности, что этими свойствами обладает само множество $\mathcal{K}$. Согласно [8, теорема 1.5] фазовая динамика на $\mathcal{K}$ конечномерна, поэтому искомое утверждение следует из теоремы 4.3.

Коль скоро множество $\mathcal{K}$ в последнем утверждении неинвариантно, общая лемма 3.5 гарантирует для него лишь параметризацию в X^α. Значительно больше можно сказать в случае инвариантного многообразия $\mathcal{M}$ типа графика.

Предложение 4.5. *Конечномерное инвариантное липшицево многообразие $\mathcal{M}$ вида* (1.3) *в X^α допускает X^θ-параметризацию* (0.2) *при любом $\theta \in [\alpha, 1)$. Более того, X^α-ограниченные подмножества $\mathcal{M}$ допускают X^1-параметризацию* (0.2).

Доказательство. Фазовая динамика на $\mathcal{M}$ липшицево сопряжена динамике уравнения

$$\dot{p} = -Ap + P_a F\bigl(P + \gamma(p)\bigr) \tag{4.2}$$

в конечномерном подпространстве $P_a X^\alpha \subset X^1$. Проектор P_a непрерывен в X, $P_a X^\alpha = P_a X$, и в $P_a X$ все нормы эквивалентны. Функции $\gamma\colon P_a X^\alpha \to$

$(I-P_a)X^\alpha$, $F\colon X^\alpha \to X$ удовлетворяют условию Липшица, стало быть, это же верно и для правой части (4.2). Элементарные свойства решений ОДУ обеспечивают теперь справедливость условия 2.3 для $\mathcal{M}$. Использование лемм 2.4, в) и 3.1 завершает доказательство.

Отметим, что обычно инерциальные многообразия полулинейных параболических уравнений строятся именно в виде (1.3). Полезно упомянуть в этой связи результаты, полученные в работе [17, § 2], согласно которым при определенных условиях на уравнение (1.1) всякое гладкое инвариантное подмногообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$ оказывается вложенным многообразием и в X^1.

Линейные функционалы ψ_i в соотношении (4.1) могут быть непрерывными в сколь угодно слабой топологии X^θ при $\theta \to -\infty$. Мы пока не рассматриваем несомненно интересные вопросы о минимальном числе функционалов заданного класса необходимых для эффективной параметризации множеств $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ и о связи этой величины с фрактальной или хаусдорфовой размерностью $\mathcal{K}$.

§ 5. Узловая параметризация

В настоящем параграфе рассмотрим диссипативные уравнения (1.1) с базовым пространством $X = L^2(\Omega)$, где Ω – ограниченная, "достаточно регулярная" [15, гл. 1] область в $\mathbb{R}^N$. Считая выполненными основные гипотезы (H1)–(H4), постараемся реализовать оценку (4.1) в терминах мер Дирака. Нам понадобятся в этой связи пространство $C = C(\Omega)$ функций, непрерывных в замыкании Ω, и L^2-пространства Соболева $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{Z}^+$. Все вложения функциональных пространств будут подразумеваться непрерывными. Если $0 < \theta \leqslant 1$, то
[15, § 1.6] вложение $X^1 \subset H^s(\Omega)$ при $\theta s > N/2$ влечет вложение $X^\theta \subset C$, а значит, и включение $\mathcal{K} \subset C$ для удовлетворяющих условию 2.3 множеств $\mathcal{K} \subset X^\alpha$.

Теорема 5.1. *Пусть $X = L^2(\Omega)$, где Ω – ограниченная, "достаточно регулярная" область в $\mathbb{R}^N$, и имеет место вложение $X^1 \subset H^s(\Omega)$, $s > N/2$. Если при этом множество $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ удовлетворяет условию 2.3 и $\theta < 1$, то найдутся такие точки $x_1, \dots, x_r \in \Omega$, что*

$$|u-v|_\theta \leqslant c \sum_{i=1}^{r} |u(x_i) - v(x_i)| \tag{5.1}$$

на $\mathcal{K}$ при $c = \mathrm{const}$. Это же верно и для $\theta = 1$, коль скоро $\mathcal{K}$ ограничено в X^α.

Доказательство. Считаем, не теряя общности, что $\theta s > N/2$, т. е. $X^\theta \subset C$. Обозначим через C_θ замыкание X^θ в норме C; тогда C_θ – замкнутое (не обязательно собственное) подпространство в C. Вложение $X^\theta \subset C_\theta$ плотно, следовательно, вложение сопряженных пространств $C_\theta^* \subset Y_\theta$ w^*-плотно. Если $\mathcal{F}$ – множество мер Дирака с носителями в Ω, то $\mathcal{F} \subset C^*$ и линейная оболочка $\operatorname{sp}\mathcal{F}$ w^*-плотна в C^*. По теореме Хана–Банаха каждый элемент C_θ^* есть сужение на C_θ линейного непрерывного функционала из C^*, поэтому вложение $\operatorname{sp}\mathcal{F} \subset C_\theta^*$ плотно в w^*-топологии пространства C_θ^*, а значит, и в более слабой w^*-топологии Y_θ. Итак, вложения $\operatorname{sp}\mathcal{F} \subset C_\theta^*$ и $C_\theta^* \subset Y_\theta$ плотны в w^*-топологии Y_θ, стало быть, w^*-плотно и вложение $\operatorname{sp}\mathcal{F} \subset Y_\theta$. Поскольку пространство $Y_\theta = (X^\theta)^*$ гильбертово, то выпуклое множество $\operatorname{sp}\mathcal{F}$ на самом деле сильно плотно в Y_θ. Искомое утверждение следует теперь из теоремы 4.2.

Замечание 5.2. Поскольку условия теоремы 5.1 подразумевают непрерывное вложение $X^\theta \subset C$, то в неравенстве (5.1) можно заменить $|u-v|_\theta$ на C-норму $\|u-v\|_C$.

Следствие 5.3. *Пусть* $X^1 \subset H^s(\Omega)$, $s>N/2$. *Тогда утверждения теоремы* 5.1 *для множества* $\mathcal{K} \subset X^\alpha$ *справедливы в каждом из двух случаев*:

а) $\mathcal{K}$ *инвариантно и лежит на компактном конечномерном* C^1*-подмногообразии* $\mathcal{M} \subset X^\alpha$;

б) $\mathcal{K}$ *лежит на инвариантном конечномерном липшицевом многообразии* $\mathcal{M}$ *вида* (1.3).

Доказательство. Действительно, нужно лишь проверить для множества $\mathcal{K}$ условие 2.3. В случае б) это фактически сделано при доказательстве предложения 4.5. В случае а) согласно [8, теорема 1.5] фазовая динамика на замыкании $\mathcal{K}$ конечномерна и остается лишь применить лемму 2.5.

Обсудим, вкратце, некоторые приложения последних результатов. Ясно, что главным ограничением теоремы 5.1 является условие 2.3 на множество $\mathcal{K} \subset X^\alpha$. Как видим из леммы 2.5 и доказательства предложения 4.5, данному условию удовлетворяет глобальный аттрактор $\mathcal{A} \subset X^\alpha$, если динамика на $\mathcal{A}$ конечномерна, и инерциальное многообразие $\mathcal{M} \subset X^\alpha$ вида (1.3), коль скоро такое существует. Приведем перечень (разумеется, не окончательный) параболических задач, обладающих инерциальным многообразием типа графика (см. [9]–[14]) для 1*)–4*) или же демонстрирующих конечномерную предельную динамику (см. [8]) для 5*):

1*) системы реакции-диффузии и уравнения Гинзбурга–Ландау в $\Omega = (0,1)^N$, $N \leqslant 2$;

2*) уравнения Курамото–Сивашинского и Колмогорова–Сивашинского на интервале $(0,1)$;

3*) обобщенные уравнения Кана–Хилларда в $\Omega = (0,1)^N$, $N \leqslant 2$;

4*) скалярные уравнения реакции-диффузии в ряде областей $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$;

5*) одномерные уравнения вида (0.5).

Для случая 4*) уточним [13], [14], что в качестве Ω здесь надлежит брать прямоугольник, куб, правильные многоугольники и некоторые другие области с определенного рода симметрией.

Чтобы установить для перечисленных задач возможность конечной узловой параметризации (5.1) глобального аттрактора $\mathcal{A}$ или инерциального многообразия $\mathcal{M}$, необходимо еще проверить основные гипотезы (H1)–(H4), а также условие вложения $X^1 \subset H^s(\Omega)$, $s > N/2$, из теоремы 5.1. Поясним, в общих чертах, как это делается; необходимые подробности можно найти в статьях [8]–[14].

Пусть $I = \mathrm{id}$ в $X = L^2(\Omega)$. Если исходить из абстрактной формы записи (1.1), то в случаях 1*)–5*) всегда $A = kI - \Delta$ или $A = kI + \Delta^2$, где $k \geqslant 0$,

Δ – оператор Лапласа и Δ^2 – бигармонический оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leqslant 3$. Краевые условия при этом таковы, что линейный оператор A самосопряжен и положителен в X, поэтому предположения (H1) и (H4) выполнены. Вложение $X^1 \subset H^s(\Omega)$ имеет место для $s = 2$ или $s = 4$ при $A = kI - \Delta$ или $A = kI + \Delta^2$, а потому в соответствии с требованием теоремы 5.1 верна оценка $s > N/2$. Необходимая гладкость нелинейной функции $F\colon X^\alpha \to X$ (как часть гипотезы (H2)) легко устанавливается в рассматриваемых примерах с помощью теорем вложения и известных свойств оператора Немыцкого. Различные условия диссипативности фазовой динамики для параболических задач 1*)–5*), позволяющие работать с ограниченной равномерно липшицевой нелинейностью, содержатся в статьях [8]–[13].

Список литературы

1. Ладыженская О. А., “О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса”, *Зап. науч. семин. ЛОМИ*, **27** (1972), 91–115.
2. Mañé R., “On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps”, *Lecture Notes in Math.*, **898**, Springer-Verlag, Berlin–N. Y., 1981, 230–242.
3. Foias C., Temam R., “Determination of the solutions of the Navier–Stokes equations by a set of nodal values”, *Math. Comput.*, **43**:167 (1984), 117–133.
4. Friz P. K., Robinson J. C., “Parametrising the attractor of the two-dimensional Navier–Stokes equations with a finite number of nodal values”, *Phys. D*, **148**:3–4 (2001), 201–220.
5. Friz P. K., Kukavica I., Robinson J. C., “Nodal parametrisation of analytic attractors”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **7**:3 (2001), 643–657.
6. Foias C., Titi E., “Determining nodes, finite difference schemes and inertial manifolds”, *Nonlinearity*, **4**:1 (1991), 135–153.
7. Романов А. В., “Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **191**:3 (2000), 99–112.
8. Романов А. В., “Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 129–152.
9. Temam R., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, *2-nd ed.*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, N. Y., 1997.
10. Constantin P., Foias C., Nicolaenko B., Temam R., “Spectral barriers and inertial manifolds for dissipative partial differential equations”, *J. Dynam. Differential Equations*, **1**:1 (1989), 45–73.
11. Bartucelli M., Constantin P., Doerling C. R., Gibbon J. D., Gisselfalt M., “On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation”, *Phys. D*, **44**:3 (1990), 421–444.
12. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R., “Some global dynamical properties of a class of pattern formation equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **14**:2 (1989), 245–297.
13. Mallet-Paret J., Sell G. R., “Inertial manifolds for reaction diffusion equations in higher space dimensions”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:4 (1988), 805–866.
14. Kwean H., “An inertial manifold and the principle of spatial averaging”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **28**:5 (2001), 293–299.
15. Хенри Д., *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
16. Ладыженская О. А., “О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными”, *УМН*, **42**:6 (1987), 25–60.

17. Brunovsky P., Terescak I., “Regularity of invariant manifolds”, *J. Dynam. Differential Equations*, **3**:3 (1991), 313–337.
18. Movahedi-Lankarani H., “On the inverse of Mañé’s projection”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **116**:2 (1992), 555–560.
19. Красносельский М. А., Забрейко П. П., *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975.
20. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., *Линейные операторы*. Ч. 1. *Общая теория*., 2-е изд., УРСС, М., 2004.

А. В. Романов (A. V. Romanov)
Московский государственный институт
электроники и математики (МГИЭМ)
E-mail: nastya13@inbox.ru

Поступило в редакцию
19.07.2005