$h_\Pi(t) = (1-t)_+$, $q_L(x) = x_1 + \dots + x_n$, а функция $\sigma^{h_L,h_\Pi}_{q_L,q}$ определена формулой (3). По лемме 2 имеем $p^{c-I}f(p)$, $p^{2c-I}|f(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$. По лемме 3(A) имеем $L\mu = M_c^{-1}(\rho_q M f) \equiv g$, где L — многомерное преобразование Лапласа. Отсюда в силу теоремы характеризации для преобразования Лапласа (см. [3, теорема 4.2.1, с. 87]) вытекает, что функция g вполне монотонна и $g(+0) = \mu(\mathbb{R}^n_+) < \infty$.

Из равенства $g = L\mu$ с учетом леммы 1 следует равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} p^{c-I} g(p)\,dp = \int_{\mathbb{R}^n_+} x^{-c}\mu(dx)\,\Gamma(c_1)\cdots\Gamma(c_n). \tag{6}$$

Отсюда в силу $x^{-c} \in L^1(\mu)$ вытекает, что $p^{c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$. Заменяя в равенстве (6) p^{c-I} на p^{2c-I}, получим, учитывая $x^{-2c} \in L^1(\mu)$, что $p^{2c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Достаточность. По условию функция $g = M_c^{-1}(\rho_q M f)$ вполне монотонна и $g(+0) < \infty$. По теореме характеризации для преобразования Лапласа (см. [3, теорема 4.2.1, с. 87]) найдется такая неотрицательная конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n_+$, что $g = L\mu$.

Так как по условию $p^{c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$, то из равенства (6) следует, что $x^{-c} \in L^1(\mu)$. Заменяя в этом равенстве p^{c-I} на p^{2c-I} и пользуясь тем, что $p^{2c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$, получим, что $x^{-2c} \in L^1(\mu)$. Наконец, из равенства $g \equiv M_c^{-1}(\rho_q M f) = L\mu$ в силу леммы 3(B) следует, что $f(p) = (\Pi_q\mu)(1,p)$.

Из соотношения $\Pi(1,p) \equiv f(p) = (\Pi_q\mu)(1,p)$ в силу свойства $\Pi(\lambda p_0, \lambda p) = \lambda\Pi(p_0,p)$ вытекает, что $\Pi(p_0,p) = (\Pi_q\mu)(p_0,p)$. Теорема доказана.

Замечание. Приведенная схема доказательства теоремы характеризации для функции прибыли (1) непосредственно переносится на случай произвольных операторов вида (2), например, на случай преобразования Фантаппье, которому соответствует выбор $q(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \dots + x_n$, $h(t) = (1+t)^{-1}$.

Литература

[**1**] А. Д. Агальцов, Труды МФТИ, **5**:4 (20) (2013), 48–61. [**2**] А. Д. Агальцов, Труды МФТИ, **6**:2 (22) (2014), 3–14. [**3**] S. Bochner, *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1955. [**4**] G. M. Henkin, A. A. Shananin, in: Transl. Math. Monographs, vol. 81, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 189–223. [**5**] А. А. Шананин, Матем. моделирование, **9**:9 (1997), 117–127.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, факультет
вычислительной математики и кибернетики
CMAP, Ecole Polytechnique, France
e-mail: agalets@gmail.com

Поступила в редакцию
20 октября 2013 г.

УДК 519.2

Замечания о квантовых марковских состояниях

 З. И. Бежаева, В. И. Оселедец

Посвящается А. М. Вершику по случаю его 80-летия

Введение. В настоящей заметке дается определение квантового марковского состояния на квазилокальной C^*-алгебре $\Omega_d = \bigotimes_{k\in N}(M_d)_k$, где M_d есть C^*-алгебра комплексных матриц размера $d \times d$.

Классический аналог состояния — это вероятностная мера на прямом произведении $X = \prod_{k\in N}\{1,\dots,d\}_k$. Классический аналог марковского состояния — это марковская мера на пространстве X.

В [4] мы задавали марковскую меру μ с помощью неотрицательной трансфер-матрицы $A \in M_d$ с элементами $a(i,j)$. А именно, если $n \geqslant 2$, то

$$\mu(\{x \in X : x_1(x) = i_1,\dots,x_n(x) = i_n\}) = \frac{l(i_1)a(i_1,i_2)\cdots a(i_{n-1},i_n)r(i_n)}{\lambda^{n-1}}.$$

При $n = 1$

$$\mu(\{x \in X : x_1(x) = i\}) = l(i)r(i).$$

В этих формулах λ — спектральный радиус матрицы A и

$$Ar = \lambda r, \quad r^\top = (r(1),\dots,r(d)) \geqslant 0, \quad l = (l(1),\dots,l(d)) \geqslant 0, \quad lr = 1.$$

Аналогичный подход годится и для квантового случая. Квантовое марковское состояние задается нами с помощью неотрицательно определенной трансфер-матрицы $A \in M_{d^2}$.

Используя матрицу T — результат преобразования Чоя–Ямилковского ([6], [5]) матрицы A, мы получаем еще одну формулу для последовательности матриц плотности, задающих квантовое марковское состояние.

Сцепленные квантовые марковские состояния Аккарди и Фидалео [2] входят в наш класс квантовых марковских состояний. Общие квантовые марковские состояния по Аккарди [1] и конечно коррелированные состояния [3] соответствуют софическим мерам в классическом случае.

Для случая, когда трансфер-матрица имеет ранг 1, мы вычисляем собственные числа и собственные векторы матриц плотности, задающих квантовое марковское состояние. Последовательность энтропий фон Неймана матриц плотности, задающих квантовое марковское состояние, ограничена, динамическая энтропия равна нулю.

1. Квантовые марковские состояния. Пусть M_{d^n} есть C^*-алгебра комплексных матриц размера $d^n \times d^n$. Квадрат нормы матрицы в этой C^*-алгебре матриц равен наибольшему сингулярному числу матрицы.

Для нумерации строк и столбцов таких матриц мы будем будем использовать множество всех слов $x = x_1\cdots x_n$ в алфавите $\{1,\dots,d\}$. Элементы матрицы $F \in M_{d^n}$ имеют вид $F(x,y)$.

Алгебра M_{d^n} вкладывается в алгебру $M_{d^{n+1}}$. А именно, матрице $F \in M_{d^n}$ сопоставляется матрица $\widetilde{F} \in M_{d^{n+1}}$ по формуле

$$\widetilde{F}(x_1\cdots x_{n+1}, y_1\cdots y_{n+1}) = F(x_1\cdots x_n, y_1\cdots y_n)\delta(x_{n+1},y_{n+1}),$$

где $\delta(i,j)$ — символ Кронекера.

Мы отождествляем C^*-алгебру M_{d^n} с C^*-алгеброй $\bigotimes_{k=1}^n (M_d)_k$. C^*-алгебра Ω_d есть замыкание индуктивного предела C^*-алгебр M_{d^n}, $n = 1,2,\dots$.

Состояние ρ на Ω_d (положительный линейный функционал, $\rho(\mathrm{Id}) = 1$) задает последовательность матриц плотности $\rho_n \in M_{d^n}$ по формуле

$$\rho(F) = \mathrm{Tr}(F\rho_n), \qquad F \in M_{d^n}.$$

Напомним, что матрица плотности — это неотрицательно определенная матрица со следом 1.

Условие согласованности. Равенство

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{F}\rho_{n+1}) = \mathrm{Tr}(F\rho_n),$$

т. е.

$$\rho_n(x_1\cdots x_n, y_1\cdots y_n) = \sum_{x_{n+1}} \rho_{n+1}(x_1\cdots x_n x_{n+1}, y_1\cdots y_n x_{n+1}),$$

однозначно определяет состояние ρ по последовательности неотрицательно определенных матриц ρ_n, $\mathrm{Tr}(\rho_n) = 1$.

Если σ_d — эндоморфизм сдвига C^*-алгебры Ω_d, то состояние ρ инвариантно относительно σ_d, если $\rho(\sigma_d\,\cdot\,) = \rho(\,\cdot\,)$.

Условие инвариантности состояния. Состояние инвариантно относительно σ_d тогда и только тогда, когда

$$\sum_{x_0} \rho_{n+1}(x_0x_1\cdots x_n, x_0y_1\cdots y_n) = \rho_n(x_1\cdots x_n, y_1\cdots y_n).$$

Пусть $A \in M_{d^2}$ — ненулевая неотрицательно определенная матрица с элементами $a(x_1x_2, y_1y_2)$. Обозначим через $B \in M_d$ матрицу с элементами $b(i,j) = a(ij, ij)$. Пусть λ — спектральный радиус матрицы B и

$$lB = \lambda l, \quad Br = \lambda r, \qquad l \geqslant 0,\ r \geqslant 0,$$

$$l = (l(1), \dots, l(d)), \quad r = (r(1), \dots, r(d))^T, \quad lr = 1.$$

Пусть Q — ненулевая неотрицательно определенная матрица с элементами $q(i,j)$ и

$$\sum_{k=1}^{d} q(k,k)r(k) = 1.$$

Обозначим через Q^+ матрицу с элементами

$$q^+(i,j) = \sum_{k=1}^{d} a(ik, jk)r(k)$$

и через Q^- матрицу с элементами

$$q^-(i,j) = \sum_{k=1}^{d} l(k)a(ki, kj).$$

Определим матрицы ρ_n, $n = 1, 2, \dots$:

$$\rho_1(x_1, y_1) = q(x_1, y_1)q^+(x_1, y_1),$$

$$\rho_n(x_1\cdots x_n, y_1\cdots y_n) = \frac{q(x_1,y_1)a(x_1x_2, y_1y_2)\cdots a(x_{n-1}x_n, y_{n-1}y_n)q^+(x_n, y_n)}{\lambda^{n-1}}.$$

Определение. Состояние ρ с указанными матрицами плотности ρ_n, $n = 1, 2, \dots$, называется *квантовым марковским состоянием.*

Это определение очень естественно и предельно близко к определению классической марковской меры. Квантовое марковское состояние при ограничении на максимальную абелеву подалгебру в Ω_d, порожденную диагональными матрицами в M_{d^n}, $n = 1, 2, \dots$, совпадает с марковским состоянием, отвечающим марковской мере на множестве $\{1, \dots, d\}^N$.

Заметим, что такое утверждение, вообще говоря, неверно для квантового марковского состояния в смысле Аккарди. Наше определение ближе всего к определению сцепленного квантового марковского состояния Аккарди и Фидалео [2], которое является квантовым марковским состоянием в нашем смысле.

Утверждение 1. *Матрица* ρ_n *неотрицательно определена и* $\mathrm{Tr}(\rho_n) = 1$.

Утверждение 2. *Матрицы* ρ_n *согласованы, т. е.* $\mathrm{Tr}(F\rho_n) = \mathrm{Tr}(\widetilde{F}\rho_{n+1})$.

Доказательство этих утверждений легко следует из введенных определений.

Пусть $Q = Q^-$. Тогда ρ — инвариантное квантовое марковское состояние. Это легко следует из определений.

Получим еще одну формулу для квантового марковского состояния ρ.

Для $F, G \in M_d$ будем обозначать через $F * G$ операцию поэлементного умножения матриц. Рассмотрим матрицы $F_1, \ldots, F_n \in M_d$ и матрицы $\widehat{F}_1, \ldots, \widehat{F}_n \in M_{d^n}$,

$$\widehat{F}_i(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) = F_i(x_i y_i) \prod_{k \neq i} \delta(x_k, y_k), \qquad n \geqslant 1.$$

Тогда

$$\rho(\widehat{F}_1) = \mathrm{Tr}(F_1(Q * Q^+)), \qquad \rho(\widehat{F}_1 \cdots \widehat{F}_n) = \frac{\mathrm{Tr}(F_1(Q * T_{F_2} \cdots T_{F_n}(Q^+)))}{\lambda^{n-1}}, \quad n \geqslant 2,$$

где $T \in M_{d^2}$ — матрица с элементами $t(ij, kl) = a(ik, jl)$, а $T_F(G) = T(F^T * G)$, $F^T(x_1, y_1) = F(y_1, x_1)$.

Заметим, что T — вполне положительное отображение, полученное из матрицы A преобразованием Чоя–Ямилковского ([5], [6]).

2. О квантовом аналоге стохастической матрицы. Заметим, что

$$T_{\mathrm{Id}}(Q^+) = \lambda Q^+.$$

Действительно,

$$q^+(i,j) = \sum_k a(ik, jk) r(k), \quad q^+(i,i) = \sum_k a(ik, ik) r(k) = \sum_k b(i,k) r(k) = \lambda r(i).$$

Но

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{Id}} Q^+ &= \sum_{k,l} t(ij, kl) \delta(k,l) q^+(k,l) = \sum_{k,l} a(ik, jl) \delta(k,l) q^+(k,l) \\ &= \sum_k a(ik, jk) q^+(k,k) = \lambda \sum_k a(ik, jk) r(k) = \lambda q^+(i,j). \end{aligned}$$

Если $\lambda = 1$, то $T_{\mathrm{Id}} Q^+ = Q^+$. Если $T_{\mathrm{Id}} \,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$, то T_{Id} — квантовый аналог стохастической матрицы.

3. Вычисление собственных чисел и собственных векторов матрицы $\boldsymbol{\rho_n}$ для случая, когда трансфер-матрица $\boldsymbol{A}$ имеет ранг 1. Если ранг матрицы A равен 1, то $a(x_1 x_2, y_1 y_2) = f(x_1 x_2)\overline{f(y_1 y_2)}$. Тогда число ненулевых собственных чисел матрицы плотности ρ_n (с учетом кратности) не превосходит d (а ведь порядок матрицы ρ_n равен d^n). Поэтому $S_n \leqslant \ln d$, где $S_n = -\mathrm{Tr}(\rho_n \ln \rho_n)$ — энтропия фон Неймана.

При $n > 1$

$$\mathrm{Range}(\rho_n) = \{f(x_1, x_2) \cdots f(x_{n-1}, x_n) \phi(x_1, x_n)\}.$$

При умножении матрицы ρ_n на вектор $f(x_1,x_2)\cdots f(x_{n-1},x_n)\phi(x_1,x_n)$ получаем элемент $f(x_1,x_2)\cdots f(x_{n-1},x_n)\psi(x_1,x_n)$, где

$$\begin{aligned}&\psi(x_1,x_n)\\&=\sum_{y_1\cdots y_n} q^-(x_1,y_1)\overline{f(y_1,y_2)}\cdots\overline{f(y_{n-1}y_n)}f(y_1,y_2)\cdots f(y_{n-1},y_n)q^+(x_n,y_n)\phi(y_1,y_n)\\&\qquad=\sum_{y_1,y_n} q^-(x_1,y_1)b^{n-1}(y_1,y_n)q^+(x_n,y_n)\phi(y_1,y_n),\end{aligned}$$

$b^{n-1}(i,j)$ — элементы матрицы B^{n-1}.

Введем матрицу K_n с элементами $K_n(ij,kl)=q^-(i,k)b^{n-1}(k,l)q^+(j,l)$. Тогда $\psi(i,j)=\sum_{k,l}K_n(ij,kl)\phi(k,l)$.

Матрица ρ_n имеет те же ненулевые собственные числа b, что и матрица K_n. Кроме того, если $\phi(k,l)$ — собственный вектор матрицы K_n, то функция $f(x_1,x_2)\cdots f(x_{n-1},x_n)\phi(x_1,x_n)$ — собственный вектор матрицы ρ_n.

В следующем примере мы вычисляем указанным выше методом собственные числа матрицы ρ_n и получаем, что предел последовательности энтропий фон Неймана S_n равен $\ln 4$.

Матрицы v_1, v_2, v_3 примера взяты из работы [3]. В работе [3] с помощью этих матриц определяется состояние на Ω_3, порождаемое деформацией знаменитой AKLT-модели (см. [3]). Это состояние не является квантовым марковским состоянием на Ω_3.

Мы определяем с помощью матриц v_1, v_2, v_3 квантовое марковское состояние на Ω_6. Любопытно, что предел энтропий фон Неймана состояния на Ω_3 из [3] тоже равен $\ln 4$. Заметим еще, что предел энтропий фон Неймана состояния (если он существует) называют сцепленной энтропией.

4. Пример. $d=6$, $x_i=z_i\alpha_i$, $y_i=v_i\beta_i$ где $u_i,v_i\in\{1,2,3\}$, $\alpha_i,\beta_i\in\{1,2\}$. Положим $f(z_1\alpha_1,z_2\alpha_2)=v_{z_2}(\alpha_1,\alpha_2)$, где

$$v_1=\begin{pmatrix}0&\cos t\\0&0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}\sin t&0\\0&-\sin t\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}0&0\\\cos t&0\end{pmatrix},$$
$$b(z_1\alpha_1,z_2\alpha_2)=v_{z_2}^2(\alpha_1,\alpha_2).$$

Если использовать соответствие

$$11\to1,\ 12\to2,\ 21\to3,\ 22\to4,\ 31\to5,\ 32\to6,$$

то матрица b равна

$$b=\begin{pmatrix}0&(\cos t)^2&(\sin t)^2&0&0&0\\0&0&0&(\sin t)^2&(\cos t)^2&0\\0&(\cos t)^2&(\sin t)^2&0&0&0\\0&0&0&(\sin t)^2&(\cos t)^2&0\\0&(\cos t)^2&(\sin t)^2&0&0&0\\0&0&0&(\sin t)^2&(\cos t)^2&0\end{pmatrix}.$$

Мы предположим, что $|\cos t|<1$.

Матрица b стохастическая, $\lambda=1$. Соответствующие векторы — это

$$l=(0,\tfrac12(\cos t)^2,\tfrac12(\sin t)^2,\tfrac12(\sin t)^2,\tfrac12(\cos t)^2,0),\qquad r^\top=(1,1,1,1,1,1).$$

Можно также вычислить матрицы Q^- и Q^+:

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\cos t)^2 & \frac{1}{2}\sin t\cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cos t\sin t & \frac{1}{2}(\sin t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sin t)^2 & -\frac{1}{2}\cos t\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\cos t\sin t & \frac{1}{2}(\cos t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить матрицы K_n. Ненулевые собственные числа матрицы ρ_n равны собственным числам матрицы K_n и равны

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}.$$

Предел энтропий фон Неймана равен $\ln 4$.

Литература

[**1**] Л. Аккарди, Функц. анализ и его прил., **9**:1 (1975), 1–8. [**2**] L. Accardi, F. Fidaleo, Ann. Mat. Pura Appl., **184**:3 (2005), 327–346. [**3**] M. Fannes, B. Nachtergaele, R. F. Werner, Comm. Math. Phys., **144**:3 (1992), 443–490. [**4**] З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Зап. научн. сем. ПОМИ, **326** (2005), 28–47. [**5**] A. Jamiołkowski, Rep. Mathematical Phys., **3**:4 (1972), 275–278. [**6**] M. D. Choi, Linear Algebra Appl., **10** (1975), 285–290.

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: zbejaeva@hse.ru

Финансовый университет при Правительстве РФ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: oseled@gmail.com

Поступила в редакцию
30 ноября 2014 г.

УДК 514.84

Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шрёдингера на квад-графе*

 Б. О. Василевский

Интегрируемость двумерного стационарного конечнозонного оператора Шрёдингера при фиксированной энергии была установлена в работе Дубровина, Кричевера и Новикова [1]. Большой интерес вызывает задача построения ин-

*Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской федерации 2010-220-01-077.