Структурно-динамические индексы цен и количеств для агрегированных периодов и средние цены для однородных периодов

Ершов Э.Б.

Рассмотрена проблема определения индексов для периодов с непостоянными ценами. Для агрегированных периодов, состоящих из последовательностей элементарных, не представимых в виде последовательностей периодов с меньшими продолжительностями, и однородных периодов введены структурно-динамические индекс количеств и индекс цен – дефлятор потока стоимости. Они зависят от динамик количеств и средних цен продуктов в этих последовательностях. Это отличает их от традиционных статичных индексов, определяемых только суммами стоимостей и количеств продуктов для агрегированных периодов. Предложено определение индексов, согласованных относительно агрегирования продуктов, естественное в контексте практического использования индексов. Рекомендуемые сцепленные индексы цен Дивизиа – Монтгомери таким свойством обладают. Рассмотрены альтернативные определения однородности периода с непостоянными ценами и соответствующие методы расчета средних цен продуктов по доступным статистическим данным. Предпочтение отдается определению, базирующемуся на свойствах индексов Дивизиа – Монтгомери.

Ключевые слова: индексы цен и количеств; индексы Дивизиа; индексы Монтгомери; элементарный и однородный период; агрегированный период; средняя цена; согласованность при агрегировании; согласованность относительно агрегирования.

1. Введение

В классической теории индексов проблема обоснованного теоретически и приемлемого практически выбора формулы индексов цен и количеств обсуждалась и решалась для пары сравниваемых элементарных периодов, в каждом из которых цены товаров и услуг предполагались постоянными или слабо и незакономерно изменяющимися. Такие периоды неизбежно должны иметь небольшие продолжительности. Предположения о слабом изменении цен в сравниваемых периодах регулярно используются. Так, в «Руководстве» [13; p. 291] со ссылкой на Фишера [18; p. 318] и Хикса [19; p. 122] формулируется следующая рекомендация: «В принципе, период времени должен выбираться таким образом, чтобы изменения цен товаров внутри периода были очень малы по сравнению с их изменениями между периодами».

Ершов Э.Б. – к.э.н., профессор кафедры математической экономики и эконометрики Государственного университета – Высшей школы экономики. E-mail: emborer33@gmail.com

Статья поступила в Редакцию в июне 2010 г.

Однако экономическая теория и статистика преимущественно имеют дело с более продолжительными периодами, состоящими из последовательностей элементарных и существенно меньших периодов. В качестве агрегированных периодов рассматриваются, например, годы или кварталы, а в качестве элементарных периодов − месяцы или даже недели и дни. Элементарные периоды предполагаются достаточно однородными для того, чтобы можно было не представлять их в виде цепочек однородных периодов с меньшими продолжительностями, характеризуемыми своими соотношениями между потоками стоимостей и количеств товаров и услуг и их ценами.

Товары и услуги будем называть продуктами. Если для элементарного периода цены продуктов предполагать постоянными или приближенно постоянными, не имеющими в течение периода тенденций к повышению или понижению, то цену продукта-представителя можно измерять один раз для такого периода, не обращая внимания на динамику его количества. Знание потока стоимости v_i и выборочного значения цены p_i i-го продукта в элементарном периоде позволяет получить тройку согласованных показателей: стоимость v_i, цену p_i и количество $q_i \equiv v_i / p_i$. Для некоторых продуктов статистика представляет значения стоимости и количества, тогда его средняя для элементарного периода цена находится без использования данных выборочных наблюдений ($p_i \equiv v_i / q_i$).

Методы определения цен p_i^t и их индексов $\mathrm{IP}_i(t;\, t+1)$ для элементарных периодов детально изучены в предположении постоянства цен p_i^t и p_i^{t+1} в работах [1; 2; 7; 9; 10; 13, p. 355−371; 14; 16]. Но эти методы не могут быть корректно распространены на случай, когда цены продуктов изменяются в элементарных периодах вместе с соответствующими им количествами. В идеальном случае статистика измеряет величины p_i^t, q_i^t или v_i^t, q_i^t, что позволяет вычислить индивидуальный индекс цены $\mathrm{IP}_i(t;\, t+1)$ продукта. Но при непостоянстве цен в сравниваемых периодах и когда не измерена статистически одна из пары величин v_i^t, q_i^t или v_i^{t+1}, q_i^{t+1}, необходимо предложить метод расчета средних цен p_i^t и p_i^{t+1} по доступным данным. Такой метод должен формализовать качественное предположение об однородности элементарного периода и о достаточности имеющихся данных для расчета средней цены продукта. Метод, базирующийся на предположении о совместной динамике цены и количества i-го продукта в однородном периоде, предложен в третьем разделе статьи.

Но центральной для нас будет другая проблема. Необходимо предложить метод расчета индексов количеств IQ и цен IP для пары сравниваемых, не являющихся однородными, агрегированных периодов, которым даны шифры-номера J = 0 и J = I. Такие периоды будем называть соответственно A0- и AI-периодами. Пусть каждый из них представляется в виде последовательности элементарных периодов с номерами t = 1,...,T(0) для A0-периода и t = T(0) + 1,...,T(0) + T(I) − для AI-периода.

Будем предполагать известными стоимости v_i^t, количества q_i^t и средние цены p_i^t продуктов ($i = 1,\ldots,n$) для всех элементарных периодов ($t = 1,\ldots,\mathrm{T}(0) + \mathrm{T}(\mathrm{I})$). Тогда для A0-периода и AI-периода определены суммарные стоимости $\mathrm{V}_i\left[0\right] = \sum_{t=1}^{\mathrm{T}(0)} v_i^t$,

$\mathrm{V}[0]=\sum_i \mathrm{V}_i[0]$, $\mathrm{V}_i[\mathrm{I}]=\sum_{t=1}^{\mathrm{T(I)}} v_i^{\mathrm{T}(0)+t}$, $\mathrm{V}[\mathrm{I}]=\sum_i \mathrm{V}_i[\mathrm{I}]$, количества $\mathrm{Q}_i[0]=\sum_{t=1}^{\mathrm{T}(0)} q_i^t$, $\mathrm{Q}_i[\mathrm{I}]=\sum_{t=1}^{\mathrm{T(I)}} q_i^{\mathrm{T}(0)+t}$ и средние цены $\mathrm{P}_i[0]=\mathrm{V}_i[0]/\mathrm{Q}_i[0]$, $\mathrm{P}_i[\mathrm{I}]=\mathrm{V}_\mathrm{I}[0]/\mathrm{Q}_i[\mathrm{I}]$. Используя эти данные, требуется предложить определение и метод расчета индексов количеств IQ(0;I) и цен IP(0;I) для пары агрегированных A0- и AI-периодов. От искомых индексов будем требовать удовлетворения Аксиоме стоимости IP(0;I) × IQ(0;I) = V[I]/V[0] ≡ IV(0;I) и Аксиоме обратимости состояний (обратимости во времени) IP(0;I) × IP(I;0) = 1, IQ(0:I) × IQ(I;0) = 1. Заметим, что агрегированные периоды не рассматриваются как однородные и характеризуются своими динамиками средних цен и количеств продуктов, которые скрыты в ценах P_i[J] и количествах Q_i[J] для AJ-периодов.

Проблема состоит в том, можно и следует ли учитывать динамику цен и количеств продуктов, проявляющуюся на уровне элементарных периодов, при определении и расчетах индексов цен-дефляторов IP(0;I), IP(I;0) и индексов количеств IQ(0;I), IQ(I;0) для агрегированных периодов. Насколько нам известно, эта проблема не изучалась. Ей посвящен второй раздел статьи. В четвертом разделе приводится условный пример определения традиционных, статичных и предлагаемых динамических индексов.

2. Индексы цен и количеств для агрегированных периодов

Наиболее прост применяемый в практической статистике способ расчета индексов IQ(0;I) и IP(0;I) как функций от цен P_i[0], P_i[I] и суммарных для агрегированных периодов количеств Q_i[0], Q_i[I] $i = 1,...,n$. Частными случаями таких, определяемых на суммарных величинах Q_i[J], V_i[J] статичных индексов являются индексы цен Ласпейреса, Пааше, Фишера, Маршалла – Эджворта, Уолша, Тейла, Торнквиста, Стювела, Монтгомери – Вартиа и Сато – Вартиа, рассматриваемые вместе с имплицитными им, удовлетворяющими Аксиоме стоимости индексами количеств.

Но всем статичным индексам присуще свойство, делающее спорным, по нашему мнению, их применение в рассматриваемых условиях, т.е. для неоднородных агрегированных периодов. Эти традиционные индексы не меняют свои значения при любых изменениях цен p_i^t и количеств q_i^t, для которых сохраняют свои значения величины V_i[J], Q_i[J], J = 0, I, $i = 1,...,n$. В частности, такие индексы IQ(0;I) и IP(0;I) не изменяются при любом изменении порядка следования элементарных периодов, образующих AJ-периоды. Очевидно, что при перестановках элементарных периодов динамика цен продуктов может измениться кардинальным образом. Следовательно, использование статических индексов допустимо, если цены почти постоянны в течение агрегированных периодов, т.е. сами AJ-периоды могут признаваться элементарными и однородными. Однако именно это предположение в нашем случае считается не соответствующим действительности.

Если же предположение о неоднородности агрегированных периодов не согласуется с динамикой цен продуктов, то требуется предложить иную и более общую модель расчета индексов IQ(0;I) и IP(0;I). Такую модель будем конструировать, используя возможность введения цепных индексов цен и предполагая, что для элементарных периодов с номерами t и $t+1$ выбраны индексные формулы $\mathrm{IP}^{(t;\,t+1)}$, $\mathrm{IQ}^{(t;\,t+1)}$ и $\mathrm{IP}^{(t+1;\,t)}$, $\mathrm{IQ}^{(t+1;\,t)}$, удовлетворяющие аксиомам стоимости и обратимости состояний.

Проанализируем возможности пересчета количеств $q_i^{\mathrm{T}(0)+t}$ для элементарных периодов, образующих AI-период, в цены A0-периода. Если T(0) = T(I) ≡ T и продолжительности t-го и (T + t)-го периодов близки, то, умножая количество $q_i^{\mathrm{T}+t}$ на цену p_i^t, получим индекс количеств типа индекса Ласпейреса

$$\mathrm{IO}_0\left(0;\mathrm{I}\right)=\frac{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^t q_i^{\mathrm{T}+t}\right)}{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^t q_i^t\right)}$$

и имплицитный ему индекс цен

$$\mathrm{IP}_\mathrm{I}\left(0;\mathrm{I}\right)=\frac{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^{\mathrm{T}+t} q_i^{\mathrm{T}+t}\right)}{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^t q_i^{\mathrm{T}+t}\right)},$$

аналогичный индексу Пааше.

Таким же образом количества q_i^t (t = 1,...,T) можно пересчитать в цены периодов с номерами (T + t). В этом случае вводятся индексы

$$\mathrm{IO}_\mathrm{I}\left(0;\mathrm{I}\right)=\frac{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^{\mathrm{T}+t} q_i^{\mathrm{T}+t}\right)}{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^{\mathrm{T}+t} q_i^t\right)},$$

$$\mathrm{IP}_0\left(0;\mathrm{I}\right)=\frac{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^{\mathrm{T}+t} q_i^{\mathrm{T}}\right)}{\left(\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}\sum_i p_i^t q_i^t\right)}.$$

Полученные индексы обладают нежелательными свойствами. Во-первых, они не могут быть обобщены на случай T(0) ≠ T(I). Во-вторых, для них не выполняется аксиома обратимости состояний и в общем случае имеют место неравенства $\mathrm{IO}_0(0;\mathrm{I}) \neq \mathrm{IO}_\mathrm{I}(0;\mathrm{I})$, $\mathrm{IP}_\mathrm{I}(0;\mathrm{I}) \neq \mathrm{IP}_0(0;\mathrm{I})$, т.е. искомые индексы не определяются единственным образом. Кроме того, эти индексы инвариантны относительно согласованного перемешивания элементарных периодов в агрегированных периодах. Такие свойства возникли как следствие использования для дефлирования стоимостей продуктов их индивидуальных индексов цен, определяемых для соответствующих друг другу пар элементарных периодов. Поэтому проанализируем другую возможность дефлирования стоимостей, использующую цепные индексы цен, соответствующие выбранным сцепленным индексам $\mathrm{IP}^{(t;\,t+1)}$. Последние определяются для всей совокупности продуктов и, следовательно, отражают покупательную силу денег в операциях, характеризуемых их ценами и количествами.

Цепные индексы цен $\mathrm{IP}^{[t;\,\tau]}$ определяются очевидным образом:

$$\mathrm{IP}^{[t;\tau]} = \begin{cases} \mathrm{IP}^{(t;t+1)} \times \mathrm{IP}^{(t+1;t+2)} \times \ldots \times \mathrm{IP}^{(\tau-1;\tau)} \text{ при } t < \tau; \\ 1, \text{ при } t = \tau; \\ \mathrm{IP}^{(t;t-1)} \times \mathrm{IP}^{(t-1;t-2)} \times \ldots \times \mathrm{IP}^{(\tau+1;\tau)} \text{ при } t > \tau. \end{cases}$$

Дефлированием стоимостей V^t для элементарных периодов с помощью цепных индексов цен $\mathrm{IP}^{[t;\,\tau]}$ при фиксированном номере τ некоторого элементарного периода $(1 \le \tau \le \mathrm{T}(0) + \mathrm{T}(\mathrm{I}))$ найдем стоимости $\mathrm{V}^t \times \mathrm{IP}^{[t;\,\tau]}$, выраженные в ценах периода τ, и введем индекс количеств

$$\mathrm{IQ}^{\tau}(0;\mathrm{I}) = \frac{\sum_{t=1}^{\mathrm{T(I)}} V^{\mathrm{T}(0)+t} \times \mathrm{IP}^{[\mathrm{T}(0)+t;\tau]}}{\sum_{t=1}^{\mathrm{T}(0)} V^{t} \times \mathrm{IP}^{[t;\tau]}}$$

и имплицитный ему индекс цен

$$\mathrm{IP}^{\tau}(0;\mathrm{I}) = \frac{\{\mathrm{V}[\mathrm{I}]/\mathrm{V}[0]\}}{\mathrm{IQ}^{\tau}(0;\mathrm{I})} = \frac{\sum_{t=1}^{\mathrm{T}(0)} \left(\mathrm{V}^{t} / \mathrm{V}[0]\mathrm{IP}^{[t;\tau]}\right)}{\sum_{t=1}^{\mathrm{T(I)}} \left(\mathrm{V}^{\mathrm{T}(0)+t} / \mathrm{V}[\mathrm{I}]\mathrm{IP}^{[\mathrm{T}(0)+t]}\right)}.$$

Важнейшим свойством этих индексов является независимость от выбора τ-го периода, в цены которого пересчитываются стоимости V^t с помощью цепных индексов. Если в качестве такого «базового» периода выбран период с номером τ^*, то числители и знаменатели в формулах индексов $\mathrm{IQ}^{\tau}(0;\mathrm{I})$ и $\mathrm{IP}^{\tau}(0;\mathrm{I})$ умножаются на цепной индекс цен $\mathrm{IP}^{[\tau;\tau^*]}$ и, следовательно, их значения не изменятся. Получаемые индексы для агрегированных периодов удовлетворяют аксиомам стоимости и обратимости состояний, не инвариантны относительно перемешивания элементарных периодов и изменяются, если изменяются цены p_i^t и количества q_i^t продуктов при фиксированных значениях показателей $\mathrm{V}_i[0]$, $\mathrm{Q}_i[0]$ и $\mathrm{V}_i[\mathrm{I}]$, $\mathrm{Q}_i[\mathrm{I}]$, $i = 1,\ldots,n$.

В предложенных индексах учитывается изменяющаяся временная структура цен и количеств продуктов для агрегированных периодов. Назовем их *структурно-динамическими индексами*, подчеркивая динамический характер агрегированных периодов и выделение в них элементарных и однородных подпериодов. Для них будем использовать обозначения $\mathrm{IQ}SD(0;\mathrm{I})$ и $\mathrm{IP}SD(0;\mathrm{I})$, в которых номер τ не указывается. В таких обозначениях не отражен выбор индексных формул для сцепленных индексов цен $\mathrm{IP}^{(t;\,t+1)}$. Будем применять в качестве индексов $\mathrm{IP}^{(t;\,t+1)}$ индексы цен Фишера $\mathrm{IPF}^{(t;\,t+1)}$, Торнквиста $\mathrm{IPTo}^{(t;\,t+1)}$ и Монтгомери – Вартиа $\mathrm{IPM}^{(t;\,t+1)}$. Эти индексы являются частными случаями траекторных индексов цен, порождаемых предложенными Дивизиа и Монтгомери конструкциями индексов [2–5; 11; 17; 21; 22].

Индексы Монтгомери – Вартиа отличаются от индексов Фишера и Торнквиста тем, что они согласованы при агрегировании [8; 11; 12; 15; 23] и могут рассчитываться как сразу для всех n продуктов, так и для групп продуктов с последующим использованием групповых индексов цен различных уровней агрегирования. В определениях такой согласованности используются математические конструкции и предположения, не применяемые в практических расчетах индексов. Поэтому введем следующее, более естественное определение *индексов, согласованных относительно агрегирования*.

Пусть продукты объединены в K непересекающихся групп ($\kappa = 1,\ldots K$) и для κ-й группы рассчитаны групповые индексы цен $\mathrm{IP}_k^{(t-1;\,t)}$ и количеств $\mathrm{IQ}_k^{(t-1;\,t)}$. Тогда для этой группы в периодах $(t-1)$ и t можно ввести «цены» $\mathrm{P}_k^{(t-1)} = 1$, $\mathrm{P}_k^{(t)} = \mathrm{IP}_k^{(t-1;\,t)}$ и «количества» $\mathrm{Q}_k^{(t-1)} = \mathrm{V}_k^{(t-1)}$, $\mathrm{Q}_k^{(t)} = \mathrm{V}_k^{(t)} / \mathrm{IP}_k^{(t-1;\,t)}$, удовлетворяющие аксиоме стоимости: $\mathrm{P}_k^{(t-1)}\mathrm{Q}_k^{(t-1)} = \mathrm{V}_k^{(t-1)}$, $\mathrm{P}_k^{(t)}\mathrm{Q}_k^{(t)} = \mathrm{V}_k^{(t)}$, где $\mathrm{V}_k^{(t)}$ – стоимость κ-й группы продуктов в ценах периода t. По так конструируемым «ценам» и «количествам» для K «продуктов» с использованием тех же индексных формул, которые применялись на уровне групп, рассчитываются индексы $\mathrm{IP}_K^{(t-1;\,t)}$ и $\mathrm{IQ}_K^{(t-1;\,t)}$. Если при любом выделении K групп продуктов ($2 \le K \le n$) и при любых допустимых значениях групповых индексов $\mathrm{IP}_k^{(t-1;\,t)}$ и $\mathrm{IQ}_k^{(t-1;\,t)}$ выполняются равенства $\mathrm{IP}_K^{(t-1;\,t)} = \mathrm{IP}_1^{(t-1;\,t)}$, $\mathrm{IQ}_K^{(t-1;\,t)} = \mathrm{IQ}_1^{(t-1;\,t)}$, в которых $\mathrm{IP}_1^{(t-1;\,t)}$, $\mathrm{IQ}_1^{(t-1;\,t)}$ – индексы, рассчитываемые сразу для n продуктов ($K = 1$), то семейство индексных формул $\{\mathrm{IP};\ \mathrm{IQ}\}$, определенных для любого числа продуктов ($r = 2,\ldots,\infty$), назовем согласованным относительно агрегирования.

Известно, что индексы Фишера и Торнквиста не являются согласованными относительно агрегирования, в то время как индексы Монтгомери – Вартиа этим свойством обладают. Доказательство этого утверждения использует свойства последних как решения задачи нахождения медиального факторного разложения конечного приращения функции многих переменных [2; 3]. Кроме того, для индексов Монтгомери – Вартиа доказано, что они при естественных предположениях являются единственными индексами, которые порождаются при общих для них траекториях цен и количеств как функциях непрерывного времени, конкурирующими конструкциями траекторных индексов, предложенных Дивизиа и Монтгомери [5]. Поэтому эти индексы будем называть также индексами Дивизиа – Монтгомери, обозначая их IPDM и IQDM.

Для структурно-динамических индексов будем использовать следующие обозначения: IP*SD*F(0;I) и IQ*SD*F(0;I), если используются сцепленные индексы цен $\mathrm{IPF}(t-1;\,t)$ Фишера; IP*SD*To(0;I) и IQ*SD*To(0;I), если используются сцепленные индексы цен $\mathrm{IPTo}(t-1;\,t)$ Торнквиста; IP*SD*M(0;I) и IQ*SD*MV(0;I), если используются сцепленные индексы цен $\mathrm{IPMV}(t-1;\,t)$ Монтгомери – Вартиа или Дивизиа – Монтгомери. Необходимо отметить, что с позиций индексной теории индексы Дивизиа – Монтгомери имеют преимущества перед другими динамическими индексами, поскольку они аксиоматически определяются именно для однородных элементарных периодов [3; 5], и с их использованием в следующей части статьи определяется средняя цена продукта для такого периода, когда цена продукта для моментов времени может не оставаться постоянной.

3. Средние цены продуктов для однородных периодов с непостоянными ценами

Существуют две возможные интерпретации показателей цен продуктов: измеряемые статистически моментные цены, предполагающие постоянство цен в периоде, для которого они определяются и в котором проводятся наблюдения; средние для периода цены, в котором цены не остаются постоянными и связаны с динамикой количеств и стоимостей продуктов. Введем понятие средней цены продукта для периода с его изменяющейся ценой. Обоснуем гипотезы, позволяющие аксиоматически рассчитывать среднюю цену, используя наблюдения за моментными ценами в начальный и конечный моменты для однородного периода.

Предполагается, что цена продукта изменяется во времени вместе с его количеством. Конструкции динамических индексов, предложенные Дивизиа и Монтгомери, постулируют использование троек показателей $\{q_i(t),v_i(t),p_i(t)\}$, $i = 1,\dots,n$, являющихся непрерывными функциями времени t. Количества и стоимости благ представляют собой потоковые величины, определяемые для периода времени, имеющего начальный момент t^0 и конечный момент времени $t^1 = t^0 + 1$. Для периода с $\tau \in [t^0;t^1]$ количество и стоимость i-го товара будем обозначать $Q_i(t^0;t^1) \equiv Q_i(t^0)$, $V_i(t^0;t^1) \equiv V_i(t^0)$. Тогда средняя цена для периода равна $P_i(t^0) \equiv V_i(t^0)/Q_i(t^0)$. Триаду $\{Q_i(t),V_i(t),P_i(t)\}$, имеющую непрерывный аргумент – момент времени $t \in [0;1]$, представим в виде

$$Q_i(t) = \int_t^{t+1} q_i(\tau)d\tau,\ \ V_i(t) = \int_t^{t+1} v_i(\tau)d\tau,$$

где $q_i(\tau)$ и $v_i(\tau)$ – плотности; $p_i(\tau) \equiv v_i(\tau)/q_i(\tau)$ – цена в момент τ.

Теория индексов рассматривает как функции времени обе триады, $\{Q_i(t),V_i(t),P_i(t)\}$ и $\{q_i(\tau),v_i(\tau),p_i(\tau)\}$. Но статистическая практика эти показатели как функции непрерывного времени не наблюдает. Она не для любого продукта или их группы способна и наблюдать, и фиксировать, используя различные источники данных, триаду показателей для дискретной последовательности значений t. Если известны величины $Q_i(t)$, $V_i(t)$, то средняя цена $P_i(t)$ рассчитывается. Если из величин $Q_i(t)$, $V_i(t)$ известна только одна, например $V_i(t)$, то величины $Q_i(t)$, $P_i(t)$ могут быть определены при принятии дополнительных предположений. В триаде $\{q_i(t),v_i(t),p_i(t)\}$ только цена $p_i(t)$ может статистически наблюдаться, но как средняя цена для периода малой продолжительности, цену $p_i(\tau)$ в котором допустимо предполагать постоянной.

Определение средних цен $P_i(0)$ и $P_i(I)$ для базового ($t = 0$) и текущего ($t = 1$) периодов, в каждом из которых цена $p_i(\tau)$ могла не оставаться постоянной, и метод расчета их значений по статистическим данным – задача, требующая решения независимо от того, какая версия теории индексов принимается за основу и какие формулы для индексов цен и количеств применяются. Эта задача далее решается для базового периода с $\tau \in [0;1]$ в следующей постановке.

Статистически измеренными предполагаются граничные значения $p_i^0 \equiv p_i(0)$ и $p_i^1 \equiv p_i(1)$ моментной цены $p_i(\tau)$ и суммарная для периода стоимость $V_i(0)$ i-го продукта. Требуется определить количество i-го продукта $Q_i(0)$ и его среднюю цену $P_i(0)$, удовлетворяющие аксиоме стоимости $Q_i(0)P_i(0) = V_i(0)$. Гипотезу однородности периода будем трактовать так, что для определения средней цены $P_i(0)$ и количества $Q_i(0)$ не требуется другая информация, кроме предполагаемой известной. Эту гипотезу предлагается формализовать как аксиоматический выбор функций плотности $v_i(\tau)$, $q_i(\tau)$ и функции моментной цены $p_i(\tau)$.

Рассматриваются два варианта траекторий цены и количества.

Первый вариант:

$$p_i(t) = p_i^0 \left[\frac{1 + t\left(v_i^1 - v_i^0\right)}{v_i^0} \right]^{\alpha(i)}, \; q_i(t) = q_i^0 \left[\frac{1 + t\left(v_i^1 - v_i^0\right)}{v_i^0} \right]^{\beta(i)},$$

$$v_i(t) = v_i^0 + t\left(v_i^1 - v_i^0\right), \; \alpha(i) = \frac{\ln\left(p_i^1 / p_i^0\right)}{\ln\left(v_i^1 / v_i^0\right)},$$

$$\beta(i) = \frac{\ln\left(q_i^1 / q_1^0\right)}{\ln\left(v_i^1 / v_i^0\right)}, \; 0 \le t \le 1.$$

Эти траектории получаются как совпадающие решения задачи нахождения медиального факторного разложения конечного приращения функции $F(p,q) = pq$ положительных переменных p, q и всех функций $H(p,q) \equiv f(F(p,q))$, где $f(z)$ − монотонная и гладкая функция положительного переменного z. В общем виде эта задача сформулирована и решена для функции многих переменных в работе [3]. В рассматриваемом здесь частном случае под конечным приращением функции (pq) понимается разность $\Delta \equiv p^1q^1 - p^0q^0$, представляемая в виде суммы вкладов факторов двух аргументов функции F: $\Delta = \Delta_p + \Delta_q$. Предполагается, что начальная и конечная точки, (p^0,q^0) и (p^1,q^1), определяющие разность $\Delta \equiv \Delta F = F(p^1,q^1) - F(p^0,q^0)$, могут быть соединены дифференцируемым путем $\pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1) \equiv \{p(t),q(t)\}$, $0 \le t \le 1$, для которого $p(0) = p^0$, $q(0) = q^0$, $p(1) = p^1$, $q(1) = q^1$. В точках пути разность $F(p^1(t),q^1(t)) - F((p^0,q^0)$ при $0 < t \le 1$ как функция параметра t представляется, если путь π выбран, в виде

$$F(p^1(t),q^1(t)) - F((p^0,q^0)) = \int_0^t \frac{dp(\tau)}{d\tau} q(\tau)\,d\tau + \int_0^t p(\tau)\frac{dq(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \Delta_p(t) + \Delta_q(t) \equiv \Delta(t).$$

Медиальное факторное разложение конечной разности ΔF определяется равенством $\Delta = \Delta_p(1) + \Delta_q(1)$, в котором медиальный путь $\pi(t;p^0,q^0;p^1,q^1)$ находится из требования независимости долей вкладов факторов $\lambda_p(t) \equiv \Delta_p(t)/\Delta(t)$, $\lambda_q(t) \equiv \Delta_q(t)/\Delta(t)$ от t, т.е. их постоянства на медиальном пути. Доказано, что медиальное факторное разложение для монотонной и дифференцируемой функции $F(x)$, $x \in R_m$ существует и медиальный путь является общим для всех монотонных и гладких функций $f(F(x))$. Медиальное разложение и медиальный путь не зависят от выбора параметра t, сохраняются при переходе от t к параметру $u = h(t)$, где h − монотонная и гладкая функция.

Однородность периода с $\tau \in [0;1]$ предлагается определять как постоянство долей вкладов факторов цен p_i и количеств q_i всех n продуктов в рассматриваемом периоде в конечные приращения их стоимостей $\Delta v_i(\tau) = p_i(\tau)q_i(\tau) - p_i^0q_i^0$ и функций $f(p_iq_i)$. Это определение постулирует «равноправие» моментов времени, образующих однородный период, и отсутствие необходимости измерять цены и количества для моментов времени между начальным и конечным моментами такого периода.

Используя траектории цены и количества i-го продукта, соответствующие медиальному пути, интегрированием получаем формулы для триады $\{Q_i(0), V_i(0), P_i(0)\}$:

$$V_i(0) = 0,5\left(v_i^0 + v_i^1\right),\ Q_i(0) = \frac{q_i^0\left[\left(v_i^1/v_i^0\right)^{\beta(i)+1} - 1\right]}{\left[\left(v_i^1/v_i^0 - 1\right)\left(1+\beta(i)\right)\right]},$$

$$P_i(0) = \frac{0,5\left(v_i^0 + v_i^1\right)\left(v_i^1/v_i^0 - 1\right)\left(1+\beta(i)\right)}{q_i^0\left[\left(v_i^1/v_i^0 - 1\right)^{\beta(i)+1} - 1\right]},$$

в которых используются неизвестные значения q_i^0, q_i^1 или v_i^0, v_i^1, и

$$\beta(i) = \ln(q_i^1/q_1^0)/\ln(v_i^1/v_i^0).$$

Но они связаны соотношением $2V_i(0) = v_i^0 + v_i^1$.

Следовательно, чтобы по $V_i(0)$, p_i^0 и p_i^1 рассчитать величины q_1^0 и q_i^1, а затем использовать их в любых индексах цен и количеств для сравниваемых периодов, необходимо сформулировать гипотезу, позволяющую получить еще одно соотношение для параметров и исходных данных.

Исследуем два случая, в которых эта задача должна быть решена. Для типичного случая начальное значение количеств q_i^0 можно считать найденным в результате решения аналогичной задачи, но для предшествующего периода с $t \in [-1;0]$. Если для такого периода найдены величины $Q_i(-1)$, $P_i(-1)$, то по известным величинам рассчитаны q_i^{-1} и q_i^0. Поэтому $Q_i(0)$ и $P_i(0)$ легко вычисляются.

В особом случае значение q_i^0 неизвестно, поскольку отсутствуют данные для периода, предшествующего рассматриваемому состоянию. Для этого случая запишем формулу для $P_i(0)$, используя представление показателя $(1 + \beta(i))$ в виде

$$1 + \beta(i) = = 1 + [\ln(v_i^1/v_i^0) - \ln(p_i^1/p_i^0)]/(\ln(v_i^1/v_i^0) = 2 - a_i/\ln z_i,$$

где $a_i = \ln(p_i^1/p_i^0)$ и $z_i = v_i^1/v_i^0$,

$$\frac{2P_i(0)}{p_i^0} = \frac{\left(z_i+1\right)\left(z_i-1\right)\left(2\ln z_i - a_i\right)}{\left[\left(z_i\right)^{(2\ln z_i - a_i)/\ln z_i} - 1\right]\ln z_i}.$$

Перейдя к переменной $x_i = 2\ln z_i - a_i$ и опуская для упрощения получаемых формул индекс товара у показателя a_i и переменной x_i, получаем

$$\frac{P_i(0)}{p_i^0} = \frac{(e^{x+a}-1)x}{(e^x-1)(x+a)} \equiv f(x;a).$$

Таким образом, отношение средней и начальной для периода цены в принимаемых предположениях определяется отношениями v_i^1/v_i^0 и (p_i^1/p_i^0).

Проанализируем свойство семейства функций $f(x;a)$, зависящих от параметра a. При $a = 0$ имеем $f(x;1) \equiv 1$, $P_i(0) = p_i^1 = p_i^0$, $Q_i(0) = V_i(0)/p_i^0$, но величины q_i^0 и q_i^1 не определяются. Поэтому исследуем случай $a \neq 0$ и получаемое решение распространим по непрерывности на этот исключительный случай.

Функция $f(x;a)$ переменной x определена на всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Будем предполагать, что параметр a положителен. Случай $a < 0$ исследуется аналогичным образом. Но в этом нет необходимости. Если в начальном периоде наблюдается уменьшение цены, т.е. $p_i^1 < p_i^0$ и $a_i < 0$, то достаточно найти решение рассматриваемой задачи для $(-a) > 0$ и применить его, поменяв нумерацию граничных моментов.

При $a \neq 0$ функция $f(x;a)$ имеет два особых значения аргумента: $x_1 = -a$ и $x_2 = 0$. В этих точках особенности типа «0/0» устранимы:

$$\lim_{x\to -a} f(x;a) = \frac{ae^a}{e^a - 1};\ \lim_{x\to 0} f(x;a) = \frac{e^a - 1}{a}.$$

Асимптотические значения функции $f(x;a)$ легко находятся:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x;a) = 1;\ \lim_{x\to +\infty} f(x;a) = e^a.$$

При $a > 0$ выполняются неравенства $1 < f(-a;a) < f(0;a) < e^a$. Доказательства элементарны: $1 < ae^a/(e^a - 1)$ и $(e^a - 1)/a < e^a$, поскольку $e^a - 1 \equiv a + a^2/2! + a^3/3! + \ldots < a + a^2 + a^3/2! + \ldots \equiv ae^a$; неравенство $ae^a/(e^a - 1) \vee (e^a - 1)/a$ эквивалентно при $a > 0$ неравенствам $a^2e^a \vee (e^a - 1)^2$ или $(2 + a^2)e^a \vee e^{2a} + 1$, а последнее, используя разложение функции e^a в ряд по степеням $(a)^k$, представляется в виде

$$(2 + a^2)(1 + a + a^2/2! + a^3/3! + \ldots) \equiv$$
$$\equiv \{2 + 2a + 2a^2 + (2/3! + 1)a^3 + \ldots + [2/k! + 1/(k-2)!]a^k + \ldots\} \vee$$
$$\vee \{2 + 2a + 2a^2 + (2^3/3!)a^3 + \ldots + (2^k/k!)a^k + \ldots\}.$$

В этом неравенстве коэффициенты при a^0, a^1, a^2, a^3 в левой и правой частях равны, но коэффициенты при a^k $(k \geq 4)$ удовлетворяют неравенствам $[2/k! + 1/(k-2)!] < [2^k/k!]$, которые трансформируются в неравенства $2 + k(k-1) < 2^k$, и неравенство $ae^a/(e^a - 1) < (e^a - 1)/a$ доказано.

Выполненный предварительный анализ позволяет сформулировать гипотезу монотонного возрастания функции $f(x;a)$ по переменной x, т.е. положительности производной $df/dx \equiv g(x;a)$. Для нее имеем формулу

$$\frac{df(x;a)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(e^a + \frac{e^a - 1}{e^x - 1}\right)\left(1 - \frac{a}{x+a}\right)\right] = \frac{\left(e^{x+a} - 1\right)\left(e^x - 1\right)a - \left(e^a - 1\right)e^x(x+a)x}{\left(e^x - 1\right)^2(x+a)^2}.$$

Функция $g(x;a)$ также определена на всей оси x, поскольку ее особенности типа «0/0», имеющиеся при $x_1 = -a$ и $x_2 = 0$, также устранимы (используется разложение e^x в ряд Маклорена):

$$g(-a;a) = e^a\frac{\left[1{,}5a + \left(e^a - 1\right)(a-1)\right]}{\left(e^a - 1\right)^2},\quad g(0;a) = \frac{\left[(1 + 0{,}5a) - e^a(1 - 0{,}5a)\right]}{a^2}.$$

Значения производной $df(x;a)/dx$ в точках $x_1 = -a$ и $x_2 = 0$ положительны, поскольку при $a > 0$ выполняются следующие неравенства:

$$1,5a-\left(e^{a}-1\right)\left(1-a\right)=1,5a-\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k}/k!\right)\left(1-a\right)=1,5a-\left(a+a^{2}/2!+a^{3}/3!+...\right)+$$

$$+\left(a^{2}+a^{3}/2!+a^{4}/3!+...\right)=0,5a+0,5a^{2}+\left(1/2!-1/3!\right)a^{3}+\left(1/3!-1/4!\right)a^{4}+...>0;$$

$$2\left(1+0,5a\right)\left(1+a+0,5a^{2}+...\right)\left(a-2\right)=\left(2+a\right)+\left(a+a^{2}+a^{3}/2!+a^{4}/3!+...\right)-$$

$$-\left(2+2a+a^{2}+a^{3}2/3!+a^{4}2/4!+...\right)=\left(1/2!-2/3!\right)a^{3}+\left(1/3!-2/4!\right)a^{4}+...>0.$$

Почленные действия с рядами корректны из-за их абсолютной сходимости.

Неравенства $g(-a;a)>0$ и $g(0;a)>0$ можно рассматривать как эвристические подтверждения гипотезы монотонного возрастания функции $f(x;a)$. Докажем выполнение (при $a > 0$) неравенства $g(x;a) > 0$, выделяя три случая: 1) $0 < x$; 2) $x < -a$; 3) $-a < x < 0$ (при $x_1 = -a$ и $x_2 = 0$ оно уже доказано). Очевидно, что достаточно доказать неравенство

$$\mathrm{H}(x;a) \equiv (e^{a+x}-1)(e^{x}-1)a-(e^{a}-1)e^{x}(x+a)x > 0.$$

1. *Случай* $0 < x$. Неравенство $H(x;a) \vee 0$ при $a > 0$ эквивалентно неравенству

$$\frac{\left(e^{a+x}-1\right)\left(e^{x}-1\right)}{\left(x+a\right)xe^{x}} \vee \frac{e^{a}-1}{a}.$$

Но $(e^{x}-1)/xe^{x} > 1$, поскольку $e^{-x} > 1 - x$ (очевидно геометрически). Следовательно,

$$\frac{(e^{a+x}-1)(e^{x}-1)}{(x+a)xe^{x}} > \frac{e^{a+x}-1}{x+a} = \sum_{k=1}^{\infty}(x+a)^{k}/k! > \sum_{k=1}^{\infty}x^{k}/k! = \frac{e^{a}-1}{a}. \ \square$$

2. *Случай* $x < -a$. Введем переменную $z = -(x + a)$. Тогда $z > 0$ и

$$f(x;a) \equiv \frac{(e^{x+a}-1)x}{(x+a)(e^{x}-1)} = \frac{(e^{-z}-1)(-a-z)}{-z(e^{-a-z}-1)} = \frac{(e^{z}-1)(a+z)}{z(e^{a+z}-1)}e^{a} = \frac{e^{a}}{f(z;a)}.$$

Для производной $df(z;a)/dz$ положительность доказана (случай 1). Поэтому имеем

$$\frac{df(x;a)}{dx} = \frac{e^{a}}{f(z;a)^{2}}\left(-\frac{df(z;a)}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{ae^{a}}{f(z;a)^{2}} \times \frac{df(z;a)}{dz} > 0. \ \square$$

3. *Случай* $-a < x < 0$. Очевидно, что при $a > 0$ $(e^a - 1) = a + 0{,}5a^2 + \ldots > a$. Поэтому

$$\mathrm{H}(x;a) \equiv (e^{x+a} - 1)(e^x - 1)a - (e^a - 1)e^x(x + a)x > (e^{x+a} - 1)(e^x - 1)a - ae^x(x + a)x.$$

Но $xe^x = x + x^2 + x^3/2! + \ldots > x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots = e^x - 1$. Следовательно,

$$(e^{x+a} - 1)(e^x - 1)a - ae^x(x + a)x > a\{(e^{x+a} - 1) - (x + a)] > 0, \text{ так как } (x + a) > 0. \ \square$$

Рассматриваемая задача состоит в том, чтобы выбрать характерное значение переменной x, являющейся аргументом функции $f(x;a)$, от которого зависит значение средней для периода цены $\mathrm{P}_i[0;1]$ i-го товара. В качестве таких характерных значений для монотонно возрастающей функции естественно рассматривать ее особые точки x_1, x_2, в которых она доопределяется так, что становится непрерывной функцией вместе со своими первой и второй производными, и точку x^*, в которой достигает максимума ее производная. Точка x^* представляет интерес в связи с тем, что функция $\mathrm{F}(x;a) = [f(x;a) - 1]/(e^a - 1)$ может рассматриваться как функция распределения некоторой случайной величины, а ее производная − как ее функция плотности. Тогда x^* − мода такой случайной величины.

Покажем, что в особых точках вторая производная функции $f(x;a)$ является непрерывной функцией, и выясним взаимное расположение точек $x_1 = -a < 0$, $x_2 = 0$ и x^*. Для этого найдем явное выражение для второй производной функции $f(x;a)$.

Воспользовавшись представлением функции $f(x;a)$ в виде

$$f(x;a) = \left(\frac{e^{a+x} - 1}{e^x - 1}\right)\left(\frac{x}{x+a}\right) \equiv \left(e^a - \frac{e^a - 1}{e^x - 1}\right)\left(1 - \frac{a}{x+a}\right) \equiv A(x)B(x)$$

и тождеством

$$\frac{d^2 f(x;a)}{d^2 x} = A(x)''B(x) + 2A(x)'B(x)' + A(x)B(x)'' \equiv f(x;a)'',$$

получаем

$$\frac{d^2 f(x;a)}{d^2 x} = \frac{(e^a - 1)e^x(e^x + 1)x(x+a) - 2a(e^a - 1)e^x(e^x - 1)(x+a) - 2a(e^{x+a} - 1)(e^x - 1)^2}{(e^x - 1)^3(x+a)}.$$

Используя разложение функции e^x в ряд $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, находим значение второй производной $f(x;a)''$ при $x = x_1$, т.е. при $\varepsilon \equiv x + a \to 0$:

$$f(x_1;a)'' = f(-a;a)'' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a\left[6e^{2a} - \left(e^a - 1\right)\left(2e^a + 1\right)\right]\varepsilon^3}{3\left(e^a - 1\right)^3 \varepsilon^3} = \frac{a\left[6e^{2a} - \left(e^a - 1\right)\left(2e^a + 1\right)\right]}{3\left(e^a - 1\right)^3}.$$

В числителе коэффициенты при степенях $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ переменой ε равны нулю, а члены с большими степенями ($k > 3$) при $\varepsilon \to 0$ не влияют на результат. Поэтому находятся коэффициенты при ε^3. Очевидно, что

$$6e^{2a} - (e^a - 1)(2e^q + 1) = 4e^{2a} + e^a + 2 > 0 \text{ и } f(-a;a) > 0.$$

Поступая аналогичным образом, находим

$$f(x_2;a)'' = f(0;a)'' = \lim_{x \to 0} \frac{\left[\left(e^a - 1\right)\left(2 - a + a^2/6\right) - 2a\right]x^3}{a^3 x^3} = \frac{\left(e^a - 1\right)\left(2 - a + a^2/6\right) - 2a}{a^3}.$$

Важно, что $f(0;a)'' > 0$, поскольку при $a > 0$ и для $k \geq 5$ имеем

$$12 + k(k-1) - 6(k-1) = (k-3)(k-4) > 0.$$

Таким образом, при $x \to 0$

$$d^2 f(x;a)/dx^2 \to \sum_{k=5}^{\infty} a^{k-3}(1/k!)\left[12 + k(k-1) - 6(k-1)\right] > 0.$$

Аналитическое доказательство того, что вторая производная $d^2f(x;a)/dx^2$ положительна при $x < x^*$, отрицательна при $x^* < x$ и, следовательно, уравнение $d^2f(x;a)/dx^2 = 0$ имеет единственное и положительное решение $x = x^*$, затруднено. Поэтому унимодальность функции $f(x;a)'$ проверена экспериментально при различных значениях параметра a. Заметим, что из доказанного при $x = 0$ неравенства $f(0;a)' > 0$ следует, что $x^* > 0$.

Приведенные на рис. 1 примеры графиков функций $f(x;a)$ при шести различных значениях параметра a (a = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 1,0; 1,5) показывают, что в окрестности $x = 0$ эти функции почти линейны и для их точек перегиба $x^* \approx 0$. Анализируя графики функций $f(x;a)$, следует иметь в виду, что интегральной функцией распределения является функция $\mathrm{F}(x;a) = \dfrac{f(x;a) - 1}{e^a - 1}$ при $a > 0$ и $\mathrm{F}(x;a) = \dfrac{f(x;a) - 1}{1 - e^a}$ при $a < 0$.

Таким образом, в качестве характерного значения аргумента x для функции $f(x;a)$ при $a \neq 0$ предлагается рассматривать x^* – решение уравнения $d^2f(x;a)/dx^2 = 0$, представимого при $x \neq 0$ в виде уравнения

$$h(x;a) \equiv \left(e^a - 1\right)e^x\left(e^x + 1\right)x(x + a) - 2\left(e^a - 1\right)e^x\left(e^x - 1\right)a(x + a) - 2a\left(e^{x+a} - 1\right)\left(e^x - 1\right)^2 = 0,$$

или его приближенное значение $x = 0$. Аргументу x^* соответствует точка перегиба функции $f(x;a)$ и наибольшее значение первой производной этой функции. Заметим, что хотя $x = 0$ является решением этого уравнения, но не представляет собой решение уравнения $d^2f(x;a)/dx^2 = 0$.

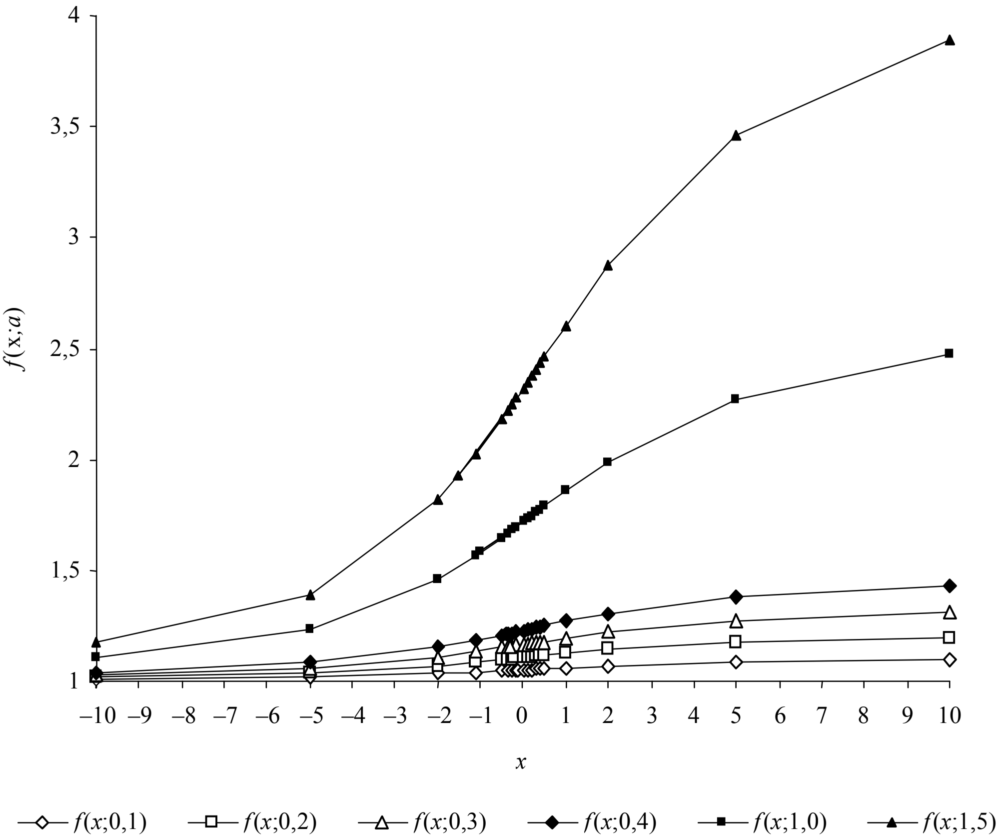

Рис. 1. Графики функций $f(x;a)$

Для практического применения предлагаемого способа оценивания средней цены $P_i[0]$ важно то, что решение x^* не зависит от параметра $a \equiv a_i$ и очень мало, что было обнаружено в результате численных экспериментов. Это позволяет при расчете цены $P_i(0)$ использовать значение экспоненты $\exp(x^*) \approx 1 + 1,11 \times 10^{-16} \approx 1$, т.е. принимать $x = 0$. Чтобы оценить значение положительного корня x^* уравнения $h(x;a) = 0$ в зависимости от значений параметра a, на сетке значений x были рассчитаны значения функции $h(x;a)$, являющейся числителем для производной

$$\frac{d^2 f(x;a)}{dx^2} = \frac{h(x;a)}{\left(e^x - 1\right)^3 (x+a)}.$$

Были вычислены с большой точностью значения функции $h(x;a)$ при значениях параметра a и переменной x из отрезка, содержащего точку $x^*(a)$, для которой $h(x^*;a) = 0$. Результаты подтвердили близость $x^*(a)$ к $x = 0$ и указывают на важное специфическое свойство уравнения $g(x;a) = 0$. Оно состоит в том, что его положительное решение x^* не зависит от значения параметра a. Значение непрерывной функции $g(x;a)$ меняет знак в интервале $(1{,}1107651255\times10^{-16};\ 1{,}1107651258\times10^{-16})$ при a между 0 и 50. Вычисление корня x^* этого уравнения с большей точностью не имеет смысла. В рассматриваемой задаче естественно использовать его приближенное и независящее от a значение $x = 0$. Использование $x = 0$ вместо x^* целесообразно, если учитывать точность определения используемых данных. Ему соответствует дополнительное соотношение: $p_i^0(q_i^0)^2 = p_i^1(q_i^1)^2$.

Для функции $\mathrm{F}(x;a) = \mathrm{sign}(a)[f(x;a) - 1]/(e^a - 1)$, интерпретируемой (при $a \neq 1$) как функция распределения для случайной величины x, значение x^* определяет ее моду. Величина $x = 2\ln z_i - a_i$ при известных значениях цен p_i^0 и p_i^1 i-го товара в начальный и конечный моменты времени рассматриваемого периода может трактоваться как случайная, поскольку в формуле $x = 2\ln(v_i^1/v_i^0) - \ln(p_i^1/p_i^0)$ отношение v_i^1/v_i^0 значений функции плотности для стоимости этого товара в те же моменты времени неизвестно и, следовательно, это отношение может интерпретироваться как случайная величина. Было доказано, что функция $\mathrm{F}(x;a)$ монотонно возрастает и имеет пределы $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{F}(x;a) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x;a) = 1$. Ее можно рассматривать как функцию распределения случайной величины x, принимающей значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Предлагаемая оценка отношения средней и начальной цен $\mathrm{P}_i(0)/p_i^0$ представляют собой оценку, соответствующую максимальному значению плотности случайной величины x и статистически измеренным значениям величин p_i^0, p_i^1, $\mathrm{V}_i(0)$. По значению x^* может быть найдена величина $z_i = \exp[(x^* + a_i)/2] = \exp(x^*/2)(p_i^1/p_i^0)^{0{,}5}$.

Затем вычислялась бы средняя для периода цена $\mathrm{P}_i(0)$. В естественном случае, когда используется приближенное значение $x^* \cong x = 0$, получаем $z_i = (p_i^1/p_i^0)^{0{,}5}$ и находим среднюю цену $$P_i(0) = \frac{p_i^0\left(z_i+1\right)\left(z_i-1\right)\left(2\ln z_i - a_i\right)}{2\left[\left(z_i\right)^{(2\ln z_i - a_i)/\ln z_i} - 1\right]\ln z_i} = \frac{p_i^1 - p_i^0}{\ln\left(p_i^1/p_i^0\right)},$$

если $p_i^1 \neq p_i^0$. В случае $p_i^1 = p_i^0$ и $a_i = 0$ эта формула с помощью предельного перехода при $p_i^1 \to p_i^0$ трансформируется в формулу $\mathrm{P}_i(0) = p_i^0 = p_i^1$ и, следовательно, $\mathrm{P}_i(0)$ равна логарифмическому среднему для цен p_i^0 и p_i^1 в граничные моменты времени. Это вполне логично, поскольку использовалась гипотеза о траекториях плотностей цен и количеств, аналогичных траекториям, порождающим индексы Дивизиа – Монтгомери.

В рассматриваемом специальном случае начального базового периода значение плотности количеств в граничных точках периода [0;1] неизвестны и удовлетворяют условию $2\mathrm{V}_i(0) = v_i^0 + v_i^1$, в котором цены p_i^0, p_i^1 и поток $\mathrm{V}_i(0)$ стоимости статистически измерены. Поэтому, чтобы продолжить вычисления предлагаемых оценок средних цен для последующих периодов, необходимо найти значение плотности в начальный для периода с $\tau \in [1;2]$ момент времени $t = 1$. При найденном значении x^* для периода [0;1] величины q_i^0 и q_i^1 находились бы как решение системы уравнений

$$p_i^0 q_i^0 + p_i^1 q_i^1 = V_i(0),\ 2\ln\left(\frac{p_i^1 q_i^1}{p_i^0 q_i^0}\right) = x^* + \ln\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right).$$

Решение этой системы легко находится:

$$q_i^0 = \frac{V_i(0)}{p_i^0 + \sqrt{p_i^0 p_i^1} e^{0,5x^*}}, \quad q_i^1 = \frac{V_i(0)}{p_i^0 + \sqrt{p_i^0 p_i^1} e^{0,5x^*}} \sqrt{\frac{p_i^1}{p_i^0}} e^{0,5x^*} = \frac{V_i(0) e^{0,5x^*}}{p_i^1 + \sqrt{p_i^0 p_i^1} e^{0,5x^*}}.$$

Оно распространяется на случай $p_i^0 = p_i^1$. Эти формулы упрощаются при использовании приближения $x = 0$ вместо x^*.

Второй вариант определения однородного периода с изменяющимися ценами будем связывать с традиционной для экономической теории и статистики гипотезой постоянства темпов роста для рассматриваемых показателей. Пусть траектории моментных количеств, цен и стоимостей продуктов задаются в виде

$$q_i(t) = q_i^0(q_i^1/q_i^0)^t, p_i(t) = p_i^0(p_i^1/p_i^0)^t, v(t) = v_i^0(v_i^1/v_i^0)^t \equiv p_i^0 q_i^0\{(p_i^1 q_i^1)/(p_i^0 q_i^0\}^t,$$

где $0 \le t \le 1$, $i = 1,\ldots,n$. Величины $\mathrm{V}_i[0]$ и $\mathrm{Q}_i[0]$ находятся интегрированием

$$\mathrm{V}_i(0)=(v_i^1 - v_i^0)/\ln(v_i^1/v_i^0),\ \mathrm{Q}_i(0) = (q_i^1 - q_i^0)/\ln(q_i^1/q_i^0),$$

и для средней (для периода) цены получаем

$$\mathrm{P}_i(0) = \frac{p_i^1 q_i^1 - p_i^0 q_i^0}{q_i^1 - q_i^0} \cdot \frac{\ln\left(q_i^1 / q_i^0\right)}{\ln\left(p_i^1 q_i^1 / p_i^0 q_i^0\right)}.$$

В этой формуле предполагаются известными мгновенные цены p_i^0, p_i^1 и статистически не наблюдаются мгновенные количества q_i^0, q_i^1. Вводя параметр $a = \ln(p_i^1/p_i^0)$ и переменную $x = \ln(q_i^1/q_i^0)$, преобразуем ее к виду

$$\frac{P_i(0)}{p_i^0} = \frac{(e^{x+a} - 1)x}{(e^x - 1)(x + a)} \equiv f(x;a),$$

полностью совпадающему с формулой, полученной в первом варианте. Это позволяет, используя результаты анализа свойств функции $f(x;a)$, выбрать для переменной x значение x^*, являющееся решением уравнения $d^2f(x;a)/dx^2 = 0$, и его приближение $x = 0$. Если используется значение $x = 0$, то в качестве дополнительного соотношения используем $q_i^1 = q_i^0$ и получаем

$$\mathrm{Q}_i(0) = q_i^0,\ \mathrm{P}_i(0) = (p_i^1 - p_i^0)/\ln(p_i^1/p_i^0) \text{ и } q_i^0 = \mathrm{V}_i(0)/\mathrm{P}_i(0).$$

Если выбирается найденное численно значение x^*, то значения мгновенных количеств q_i^0, q_i^1 получается как решение системы уравнений $q_i^1 - q_i^0\exp(x^*) = 0$, $(v_i^1 - v_i^0)/\ln(v^1{}_i/v_i^0) = \mathrm{V}_i(0)$, в которой суммарная (для периода) стоимость $\mathrm{V}_i(0)$ i-го продукта предполагается статистически измеренной. Ее решение находится элементарно:

$$q_i^0 = \mathrm{V}_i(0)(a_i + x_i^*)\{p_i^1\exp(x_i^*) - p_i^0\},\ q_i^1 = q_i^0\exp(x_i^*).$$

Следовательно, для первоначального периода с неизвестным значением q_i^0 находятся средняя цена $P_i(0)$, суммарное количество $Q_i(0) \equiv V_i(0)/P_i(0)$ и параметр q_i^1, необходимый для того, чтобы рассчитывать среднюю цену $P_i(1)$ и количество $Q_i(1)$ для следующего периода.

Выбор варианта определения однородности периодов не влияет на значения $P_i(0)$ и $Q_i(0)$, так как в вариантах используется общее значение стоимости $V_i(0)$ и одно и тоже значение параметра $a_i = \ln(p_i^1/p_i^0)$. Поэтому значение цены $P_i(0)$, получаемое при $x = x^*$ или $x = 0$, является общим для этих вариантов, общим будет и значение $Q_i(0) = V_i(0)/P_i(0)$.

Формула для расчета средней цены $P_i(0)$, рекомендуемая для применения, если еще не определялось расчетное значение плотности $q_i(0)$ на момент начала периода, т.е. для финального момента предыдущего периода, при достаточно малом относительном изменении цен преобразуется с помощью использования разложения $\ln(p_i^1/p_i^0)$ в ряд

$$\ln(p_i^1/p_i^0) \equiv \ln\{1 + (p_i^1 - p_i^0)/p_i^0\} \equiv \ln(1 + u) = u - 2^{-1}u^2 + 3^{-1}u^3 - 4^{-1}u^4 + \dots .$$

Ограничиваясь квадратическим приближением, получаем для $P_i(0)$

$$P_i(0) = p_i^0/(1{,}5p_i^0 - p_i^1) = p_i^0/\{1 - 0{,}5(p_i^1 - p_i^0)/p_i^0\} \approx p_i^0\{1 + 0{,}5((p_i^1 - p_i^0)/p_i^0 +$$

$$+ [0{,}5((p_i^1 - p_i^0)/p_i^0]^2 + \dots = 0{,}5(p_i^0 + p_i^1) + 0{,}25(p_i^1 - p_i^0)^2/p_i^0 + \dots .$$

Поэтому часто применяемая в практической статистике формула для средней (для периода) цены $P_i(0) \approx (p_i^0 + p_i^1)/2$ представляет собой приближение к полученному исходя из теоретических соображений значению. Важно, что для оценок средних цен при $p_i^1 > p_i^0$ выполняется неравенство

$$P_i(0) \equiv (p^1{}_i - p_i^0)/\ln(p^1{}_i/p_i^0) < (p^0{}_i + p_i^1)/2 \equiv p_i^0 + (p_i^1 - p_i^0)/2,$$

которое следует из формулы

$$\ln z = 2[x + 3^{-1}x^2 + 5^{-1}x^3 + \dots] = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} \text{ при } x \equiv (z-1)/(z+1).$$

Следовательно, при использовании оценки средней цены $(p_i^0 + p^1{}_i)/2$ происходит занижение оценки количества $Q_i(0)$ по сравнению с оценкой $V_i(0)/\{(p^1{}_i - p_i^0)/\ln(p^1{}_i/p_i^0)\}$.

В табл. 1 для сравнения приводятся значения функций $F_1(x) = (x + 1)/2$ и $F_2(x) = (x - 1)/\ln x$ при значениях аргумента $x \equiv p^1{}_i/p_i^0$ от 1 до 5. Она наглядно показывает, что только при малых относительных изменениях цены различия двух оценок средней для периода цены несущественны. При 40-процентном росте какой-либо цены выбор гипотезы динамики цены в течение предполагаемого однородным периода уже значимо влияет на принимаемую оценку средней для периода цены и суммарного количества i-го продукта.

Также была рассмотрена в следующих трех вариантах линейная гипотеза зависимости переменных $v_i(t)$, $q_i(t)$ и $p_i(t)$ от времени.

Вариант 3: $v_i(\mathrm{t})$, $q_i(t)$ − линейны по t. Тогда

$$\mathrm{V}_i(0) = 0{,}5(v_i^0 + v_i^1),\ \mathrm{Q}_i(0) = 0{,}5(q_i^0 + q_i^1),\ \mathrm{P}_i(0)=(v_i^0 + v_i^1)/(q_i^0 + q_i^1).$$

Вариант 4: $q_i(t)$, $p_i(t)$ − линейны по t. Тогда

$$\mathrm{Q}_i(0) = 0{,}5(q_i^0 + q_i^1),\ \mathrm{V}_i(0) = (p_i^0 + p_i^1)(q_i^0 + q_i^1)/3,\ \mathrm{P}_i(0) = (2/3)(q_i^0 + q_i^1).$$

Вариант 5: $v_i(t)$, $p_i(t)$ − линейны по t. Тогда

$$\mathrm{V}_i(0) = 0{,}5(v_i^0 + v_i^1),\ \mathrm{Q}_i(0) = (v_i^1 - v_i^0)/(p_i^1 - p_i^0)+\{(v_i^0 p_i^1 - v_i^1 p_i^0)/(p_i^1 - p_i^0)^2\}\ln(p_i^1/p_i^0),$$
$$\mathrm{P}_i(0) = \mathrm{V}_i(0)/\mathrm{Q}_i(0).$$

Таблица 1.

Сравнение значений функций $\mathrm{F}_1(x) = (x + 1)/2$ и $\mathrm{F}_2(x) = (x - 1)/\ln x$ (используемых при оценивании средней для периода цены продукта)

x	$(x + 1)/2$	$(x - 1)/\ln(x)$	Разность	x	$(x + 1)/2$	$(x - 1)/\ln(x)$	Разность
1,01	1,00500	1,00499	0,00001	1,45	1,22500	1,21110	0,01390
1,02	1,01000	1,00997	0,00003	1,50	1,25000	1,23315	0,01685
1,03	1,01500	1,01493	0,00007	1,55	1,27500	1,25498	0,02002
1,04	1,02000	1,01987	0,00013	1,60	1,30000	1,27659	0,02341
1,05	1,02500	1,02480	0,00020	1,65	1,32500	1,29799	0,02701
1,06	1,03000	1,02971	0,00029	1,70	1,35000	1,31919	0,03081
1,08	1,04000	1,03949	0,00051	1,75	1,37500	1,34021	0,03479
1,10	1,05000	1,04921	0,00079	1,80	1,40000	1,36104	0,03896
1,15	1,07500	1,07325	0,00175	1,85	1,42500	1,38170	0,04330
1,20	1,10000	1,09696	0,00304	1,90	1,45000	1,40219	0,04781
1,25	1,12500	1,12036	0,00464	2,00	1,50000	1,44270	0,05730
1,30	1,15000	1,14345	0,00655	3,00	2,00000	1,82048	0,17952
1,35	1,17500	1,16626	0,00874	4,00	2,50000	2,16404	0,33596
1,40	1,20000	1,18881	0,01119	5,00	3,00000	2,48534	0,51466

Для этих вариантов не удается предложить и обосновать свои дополнительные соотношения, позволяющие находить величины q_i^0, q_i^1, $\mathrm{P}_i(0)$ по известным $\mathrm{V}_i(0)$, p_i^0, p_i^1. Но можно использовать соотношения: ($r = 1$) $p_i^0(q_i^0)^2 = p_i^1(q_i^1)^2$ или ($r = 2$) $q_i^0 = q_i^1$, на которых основываются соответственно Варианты 1 и 2. Таким образом получаем формулы для средней цены $\mathrm{P}_i(0)$, обозначаемые $\mathrm{P}_i(0)_{kr}$, где $k = 1,2,3,4,5$ и $r = 1,2$:

$$\mathrm{P}_i(0)_{11} = \mathrm{P}_i(0)_{22} = \frac{\left(p_i^1 - p_i^0\right)}{\ln\left(p_i^1 / p_i^0\right)},\ \mathrm{P}_i(0)_{12} = \mathrm{P}_i(0)_{32} = \mathrm{P}_i(0)_{52} = 0{,}5\left(p_i^0 + p_i^1\right),$$

$$\mathrm{P}_i(0)_{21} = \frac{2}{\left(1/p_i^0 + 1/p_i^1\right)},\ \mathrm{P}_i(0)_{31} = \frac{\left(p_i^0 + p_i^1\right)}{\left(p_i^1/p_i^0 + p_i^0/p_i^1\right)},$$

$$\mathrm{P}_i(0)_{41} = \mathrm{P}_i(0)_{42} = (2/3)\left(p_i^0 + p_i^1\right),\ \mathrm{P}_i(0)_{51} = \frac{0{,}5}{\ln\left(p_i^1/p_i^0\right)/\left(p_i^1 - p_i^0\right) - 1/\left(p_i^0 + p_i^1\right)}.$$

Из этих формул следует, что традиционная для практической статистики оценка $(p_i^0 + p_i^1)/2$ средней для периода цены может интерпретироваться по крайней мере тремя способами: как $\mathrm{P}_i(0)_{12}$, как $\mathrm{P}_i(0)_{32}$ и как $\mathrm{P}_i(0)_{52}$.

Для полученных индексов выполняются соотношения $\mathrm{P}_i(0)_{31} = \mathrm{P}_i(0)_{12} \times \mathrm{P}_i(0)_{21}$, $\mathrm{P}_i(0)_{11} = 2/\{(1/\mathrm{P}_i(0)_{12} + 1/\mathrm{P}_i(0)_{21}\}$ и цепочка неравенств

$$\mathrm{P}_i(0)_{41} > \mathrm{P}_i(0)_{12} \geq \mathrm{P}_i(0)_{11} \geq \mathrm{P}_i(0)_{51} \geq \mathrm{P}_i(0)_{21} \geq \mathrm{P}_i(0)_{31}.$$

В них равенства реализуются при $p_i^1 = p_i^0$. Приведем доказательства неравенств, учитывая, что цены $p_i^0 \equiv p^0$, $p_i^1 \equiv p^1$ и средние цены $\mathrm{P}_i(0)_{kr} \equiv \mathrm{P}_{kr}$ положительны.

Неравенство $\mathrm{P}_{41} \equiv (2/3)(p^0 + p^1) > (1/2)(p^0 + p^1) \equiv \mathrm{P}_{12}$ очевидно. Неравенство $\mathrm{P}_{12} \geq \mathrm{P}_{11}$ было доказано выше. Балк [11] сообщает, что оно было доказано Лоренценом [20]. Неравенство $\mathrm{P}_{11} \equiv (p^1 - p^0)/\ln(p^1/p^0) \vee (1/2)\{1/\mathrm{P}_{11} - 1/(p^0 + p^1)\} \equiv \mathrm{P}_{51}$ преобразуется в неравенство $\mathrm{P}_{12} \vee \mathrm{P}_{11}$. Поэтому $\mathrm{P}_{11} \geq \mathrm{P}_{51}$. Неравенство

$$\mathrm{P}_{21} \equiv \frac{2p^0p^1\left\{p^0 + p^1\right\} \vee p^0p^1\left(p = p\right)}{\left(p^0\right)^2 + \left(p^1\right)^2} \equiv \mathrm{P}_{31}$$

эквивалентно неравенству $2\{(p^0)^2 + (p^1)^2\} \vee (p^0 + p^1)^2$. Но $(p^1 - p^0)^2 \geq 0$, поэтому $\mathrm{P}_{21} \geq \mathrm{P}_{31}$.

Сложнее доказывается неравенство $\mathrm{P}_{51} \geq \mathrm{P}_{21}$. Рассмотрим случай $p^1 \geq p^0$. В переменных $x = \ln p^1$, $y = \ln p^0$ и $z = x - y \geq 0$ оно записывается как

$$[(e^z - 1)/z]\{1 + (2 + e^z + e^{-z})/4\} \vee (1 + e^z).$$

Используя разложения функций e^z и e^{-z} в ряды по степеням z, представим последнее неравенство в виде

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k/(k+1)!\right)\left(2 + \sum_{s=1}^{\infty} z^{2s}/[2(2s)!]\right) \vee 2 + \sum_{r=1}^{\infty} z^r/r!$$

или

$$(1 + z/2 + z^2/6 + z^3/24 + z^4/120 + \ldots)(2 + z^2/4 + z^4/48 + \ldots) \vee (2 + z + z^2/2 + z^3/6 + z^4/24 + \ldots).$$

Перемножая ряды в левой части неравенства, сравним коэффициенты при степенях z в левой и правой его частях. Коэффициенты при $(z)^0 \equiv 1$ и при z совпадают. При z^2 получаем коэффициент в левой части $(1/3 + 1/4) = 7/12$, который больше коэффициента в правой части. Аналогичные неравенства получаем для коэффициентов при z^3 и z^4.

Покажем, что коэффициенты a_r и $b_r = 1/r!$ при z^r соответственно в левой и правой частях неравенства таковы, что $a_r > b_r$. Неравенство $a_r \vee b_r$, рассматриваемое при нечетном $r = 2t - 1$,

$$2/(2t)! + 0{,}5\{1/[(2t-2)!(2t)!] + 1/[(2t-2)!\,4!] +...+ 1/[2!(2t-2)!]\} \vee 1/(2t-1)!$$

после умножения на $(2t)!$ превращается в неравенство

$$2 + 0{,}5\{(2t-1)t +...+ (2t-1)t\} > 2 + (2t-1)t \vee 2t.$$

Замечаем, что неравенство $2 + (2t - 1)t \geq 2t$ выполняется при всех t. Следовательно, $a_{2t-1} > b_{2t-1}$.

При четном $r = 2t$ неравенство $a_r \vee b_r$ превращается в неравенство

$$0{,}5\{1/(2t)! + 1/[3!(2t-2)!] + 1/[5!(2t-4)!] +...+ 1/[(2t-1)!2!]\} + 2/(2t+1)! \vee 1/(2\mathrm{t})!,$$

которое после умножения на $(2t)!$ дает $0{,}5\{1 +...+ t\} + 2/(2t + 1) > 0{,}5 + 0{,}5t + 2/(2t + 1) \vee 1$.

Но неравенство $0{,}5 + 0{,}5t + 2/(2t + 1) > 1$ выполняется при всех t. Поэтому $a_{2r} > b_{2r}$. И из неотрицательности переменной z и положительности коэффициентов a_r и b_r следует неравенство $\mathrm{P}_{51} \geq \mathrm{P}_{21}$.

Случай $p^0 > p^1$ сводится к уже рассмотренному, поскольку средние цены P_{51} и P_{21} являются симметричными функциями от переменных p^0 и p^1.

Для всех вариантов находятся значения плотностей q_i^0, q_i^1 и формулы, соответствующие особому случаю $p_i^1 = p_i^0$. Но только первый вариант основывается на точно формулируемой интерпретации однородности периода с ценами, которые не предполагаются постоянными.

4. Сравнение структурно-динамических и статических индексов для агрегированных периодов

На условном, но характерном примере продемонстрируем возможные различия значений индексов цен и количеств, рассчитываемых как традиционные, т.е. статичные, и как структурно-динамические индексы. В качестве исходных данных будем использовать цены и количества шести продуктов в пяти периодах из «Руководства» [13, ch. 19]. Этим примером Э. Диверт иллюстрирует расчеты и свойства различных статичных индексов. Пример был подготовлен так, чтобы характеризовать тенденции в динамике цен и количеств групп продуктов. Продукты интерпретировались следующим образом: $i = 1$ − группа сельскохозяйственных продуктов; $i = 2$ − энергоносители; $i = 3$ − традиционные промышленные товары; $i = 4$ − высокотехнологичные промышленные товары; $i = 5$ − традиционные услуги; $i = 6$ − высокотехнологичные услуги. Несмотря на условный характер данных (глава 19 в [13] называется «Построение индексов цен с использованием набора условных данных»), будем считать, что результат расчетов по ним можно рассматривать как в целом соответствующий реалистической динамике цен в развитых экономиках.

По этим данным были сконструированы цены и количества 6 продуктов в 21 элементарном периоде ($t = 0,1,\ldots,20$). Периоды с $t = 1\ldots,20$ включены в 4 агрегированных периода, каждый из которых состоит из 5 последовательных элементарных периодов. Агрегированным или А-периодам даны номера J = 0, I, II и III. Данные из [13] использовались как цены и количества для опорных периодов с номерами $t = 0$, 5, 10, 15 и 20. Для остальных элементарных периодов цены и количества продуктов получены линейной интерполяцией данных для опорных периодов. Рассчитанные цены и количества продуктов приведены в табл. 2, 3 и изображены на рис. 2, 3 .

Таблица 2.

Цены линейной цепи периодов

t	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1	1,04	1,40	1,06	0,94	1,08	0,96
2	1,08	1,80	1,12	0,88	1,16	0,92
3	1,12	2,20	1,18	0,82	1,24	0,88
4	1,16	2,60	1,24	0,76	1,32	0,84
5	1,20	3,00	1,30	0,70	1,40	0,80
6	1,16	2,60	1,34	0,66	1,46	0,76
7	1,12	2,20	1,38	0,62	1,52	0,72
8	1,08	1,80	1,42	0,58	1,58	0,68
9	1,04	1,40	1,46	0,54	1,64	0,64
10	1,00	1,00	1,50	0,50	1,70	0,60
11	0,96	0,90	1,52	0,46	1,74	0,56
12	0,92	0,80	1,54	0,42	1,78	0,52
13	0,88	0,70	1,56	0,38	1,82	0,48
14	0,84	0,60	1,58	0,34	1,86	0,44
15	0,80	0,50	1,60	0,30	1,90	0,40
16	0,84	0,60	1,60	0,26	1,92	0,36
17	0,88	0,70	1,60	0,22	1,94	0,32
18	0,92	0,80	1,60	0,18	1,96	0,28
19	0,96	0,90	1,60	0,14	1,98	0,24
20	1,00	1,00	1,60	0,10	2,00	0,20

Таблица 3.

Количества линейной цепи периодов

t	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
0	1,00	1,00	2,00	1,00	4,50	0,50
1	0,96	0,98	1,98	1,06	4,54	0,52
2	0,92	0,96	1,96	1,12	4,58	0,54
3	0,88	0,94	1,94	1,18	4,62	0,56
4	0,84	0,92	1,92	1,24	4,66	0,58
5	0,80	0,90	1,90	1,30	4,70	0,60
6	0,84	0,94	1,88	1,64	4,70	0,64
7	0,88	0,98	1,86	1,98	4,82	0,68
8	0,92	1,02	1,84	2,42	4,88	0,72
9	0,96	1,06	1,82	2,76	4,94	0,76
10	1,00	1,10	1,80	3,00	5,00	0,80
11	1,04	1,12	1,82	3,60	5,12	0,90
12	1,08	1,14	1,84	4,20	5,24	1,00
13	1,12	1,16	1,86	4,80	5,36	1,10
14	1,16	1,18	1,88	5,40	5,48	1,20
15	1,20	1,20	1,90	6,00	5,60	1,30
16	1,14	1,20	1,92	7,20	5,78	1,54
17	1,08	1,20	1,94	8,40	5,96	1,78
18	1,02	1,20	1,96	9,60	6,14	2,02
19	0,96	1,20	1,98	10,80	6,32	2,26
20	0,90	1,20	2,00	12,00	6,50	2,50

Статичные индексы цен IP(J – 1;J) и количеств IQ(J – 1;J) для пар соседних агрегированных периодов с J = I, II и III рассчитаны по суммарным стоимостям V_i(J), количествам Q_i(J) и ценам P_i(J) в 12 вариантах. В вариантах используются сцепленные индексы цен Ласпейреса IPL, Пааше IPP, геометрические (логарифмические) индексы цен Ласпейреса IPLG и Пааше IPPG, индексы цен Маршалла − Эджворта IPME, Уолша IPW, Тейла IPTh, Стювела IPSt, Фишера IPF, Торнквиста IPTo, Монтгомери − Вартиа IPMV и Сато − Вартиа IPSV. Индексы количеств находятся как имплицитные им индексы с помощью аксиомы стоимости: IQ(J – 1;J) = IV(J – 1;J)/IP(J – 1;J). Получаемые индексы обозначаются соответственно IQP, IQL, IQPG, IQLG, IQME, IQW, IQTh, IQSt, IQF, IQTo, IQMV и IQSV, хотя точнее было бы в каждое из этих обозначений включить символ «p», указывающий на то, что индекс количеств имплицитен именно индексу цен. Тогда используемый индекс количеств Торнквиста имел бы обозначение IQTop. Это отличало бы его от обычного индекса количеств Торнквиста, который вместе с индексом цен Торнквиста не удовлетворяет аксиоме стоимости.

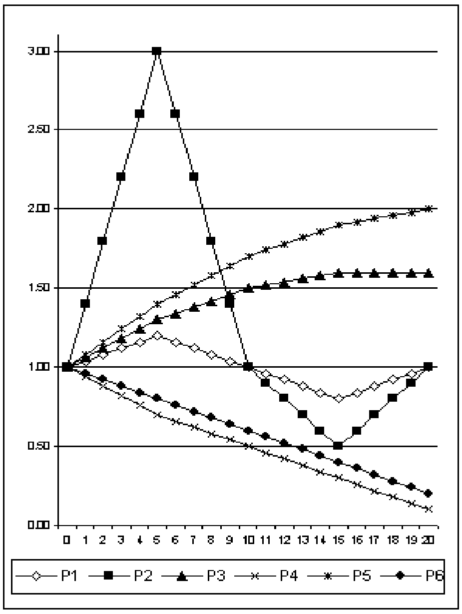

Рис. 2. Цены линейной цепи периодов

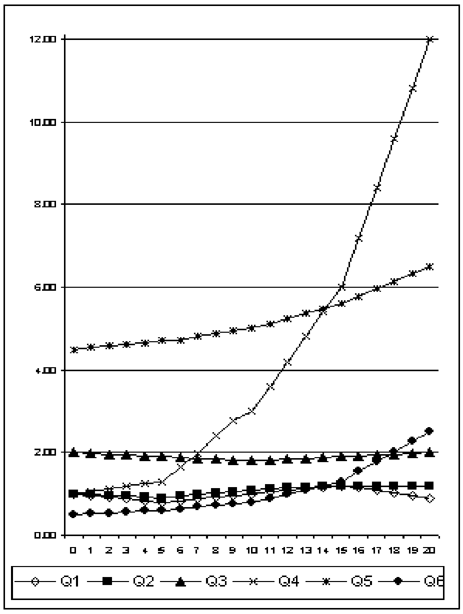

Рис. 3. Количества линейной цепи периодов

Структурно-динамические индексы для агрегированных периодов рассчитаны в трех вариантах, соответствующих использованию сцепленных индексов цен Фишера $IPF^{(t-1;t)}$, Торнквиста $IPTo^{(t-1;t)}$ и Монтгомери – Вартиа $IPMV^{(t-1;t)}$. Результаты приведены в табл. 4.

Отметим особенности получаемых индексов, которые в части статических индексов замечались многими авторами. Так называемые «граничные» статические индексы Ласпейреса и Пааше, а также их геометрические аналоги, принимают сильно различающиеся значения для фиксированной пары сравниваемых агрегированных периодов. Эти индексы рекомендуется использовать только в качестве предварительных и грубых оценок для интервала возможных значений соответствующего искомого индекса. Остальные 8 моментных индексов цен и количеств принимают относительно близкие, но все же значительно различающиеся значения. Различия в значениях структурно-динамических индексов значительно меньше, чем для статических индексов. Знаки разностей структурно-динамических и статических индексов зависят от того, для каких агрегированных периодов они рассчитываются, и учет динамики цен и количеств в агрегированных периодах приводит к индексам, не эквивалентным статическим индексам.

Таблица 4.

Структурно-динамические и статические индексы количеств и имплицитные им индексы цен для агрегированных периодов

Индекс количеств	{IQ(J – 1;J) – 1}100 = = {IV(J – 1;J)/IP(J – 1;J) – 1} × 100			IP(J – 1;J) × 100		
	J = I	J = II	J = III	J = I	J = II	J = III
Структурно-динамические индексы						
IQ*SD*F	9,619	17,901	19,184	8,911	−4,841	−3,596
IQ*SD*To	9,635	17,927	19,170	8,895	−4,862	−3,585
IQ*SD*MV	9,742	18,096	19,327	8,789	−4,998	−3,712
Статические индексы						
IQP	8,444	15,777	16,278	9,713	−3,101	−1,205
IQL	12,074	19,502	22,254	6,551	−6,122	−6,033
IQPG	11,339	22,368	19,982	7,254	−8,320	−4,254
IQLG	9,243	13,857	17,525	9,312	−1,467	−2,352
IQME	10,527	17,776	19,491	8,042	−4,746	−3,861
IQW	10,272	17,463	18,911	8,291	−4,492	−3,392
IQTh	10,216	17,384	18,687	8,347	−4,427	−3,210
IQSt	10,464	17,821	19,550	8,103	−4,782	−3,908
IQF	10,447	17,625	19,228	8,120	−4,623	−3,649
IQTo	10,286	18,036	18,747	8,278	−4,955	−3,358
IQMV	10,235	17,354	18,684	8,328	−4,403	−3,207
IQSV	10,268	17,468	18,716	8,316	−4,496	−3,233

Этот качественный вывод подтверждается расчетами, в которых использовались другие траектории цен и количеств продуктов для элементарных периодов с фиксированными их стоимостями и количествами для агрегированных периодов. Напомним, что значения любых статических индексов не зависят от выбора таких динамик. Такие траектории были сконструированы во многих вариантах. Охарактеризуем только два из них.

Для элементарных периодов с номерами $t = 1,\ldots,20$ с использованием экспоненциальной интерполяции были рассчитаны так называемые экспоненциальные траектории, для которых темпы роста цен $p_i(t)^{э}$ и количеств $q_i(t)^{э}$ продуктов в агрегированных периодах постоянны и определяются по данным опорных периодов. Использовались формулы

$$p_i(t)^э = p_i([t/5])\left\{\frac{p_i[t/5]+1}{p_i[t/5]}\right\}^{t-[t/5]^5}, \quad q_i(t)^э = q_i([t/5])\left\{\frac{q_i[t/5]+1}{q_i[t/5]}\right\}^{t-[t/5]^5},$$

в которых $[s]$ – целая часть числа s; $p_i(\tau)$ и $q_i(\tau)$ – исходные данные для опорных периодов ($\tau = 0, 1, 2, 3, 4$).

Затем были рассчитаны симметрично-экспоненциальные траектории $p_i(t)^{сэ}$ и $q_i(t)^{сэ}$, определяемые равенствами

$$p_i(t)^{сэ} + p_i(t)^э = p_i([t/5]) + p_i([t/5]+1),\ q_i(t)^{сэ} + q_i(t)^э = q_i([t/5]) + q_i([t/5]+1),$$

и найдены минимальные и максимальные значения цен и количеств

$$p_i(t)_{\min} = \min(p_i(t)^э; p_i(t)^{сэ}),\ q_i(t)_{\min} = \min(q_i(t)^э; q_i(t)^{сэ}),$$
$$p_i(t)_{\max} = \max(p_i(t)^э; p_i(t)^{сэ}),\ q_i(t)_{\max} = \max(q_i(t)^э; q_i(t)^{сэ}).$$

Последние были пронормированы так, чтобы их суммы для отдельных продуктов в агрегированных периодах совпали с суммами для варианта, полученного линейной интерполяцией данных для опорных периодов. Сконструированные варианты называются минимальным и максимальным. Для них рассчитаны структурно-динамические индексы количеств и цен в трех вариантах, соответствующих применению сцепленных индексов цен Фишера, Торнквиста и Монтгомери – Вартиа. Их значения приведены в табл. 5. Для удобства сравнения в нее включены значения структурно-динамических индексов из табл. 4, в обозначения которых символ «л» указывает способ конструирования используемых данных. Статические индексы количеств Фишера, Торнквиста и Монтгомери – Вартиа в табл. 5 выделены курсивом.

Таблица 5.

Структурно-динамические индексы количеств для вариантов траекторий цен и количеств

Индекс количеств IQ	IQ(J – 1;J) × 100		
	J = I	J = II	J = III
IQ*SD*F^{Л}	109,619	117,901	119,184
IQ*SD*F$^{\min}$	109,551	117,908	119,135
IQ*SD*F$^{\max}$	109,635	117,944	119,168
IQF	*110,447*	*117,625*	*119,228*
IQ*SD*To^{Л}	109,635	117,927	119,117
IQ*SD*To$^{\min}$	109,570	117,926	119,119
IQ*SD*To$^{\max}$	109,653	117,997	119,161
IQTo	*110,235*	*117,354*	*118,684*
IQ*SD*MV^{Л}	109,742	118,096	119,327
IQ*SD*MV$^{\min}$	109,540	117,896	119,111
IQ*SD*MV$^{\max}$	109,626	117,930	119,144
IQMV	*110,247*	*117,468*	*118,716*

Из приведенных в табл. 5 результатов расчетов видно, что значения структурно-динамических индексов зависят от динамики цен и количеств в элементарных периодах и эта зависимость проявляется сильнее при использовании сцепленных индексов цен Монтгомери – Вартиа. Для всех вариантов структурно-динамических индексов выявляется значимое и однонаправленное при фиксированных сравниваемых агрегированных периодах отличие их значений от соответствующих им статичных индексов.

5. Заключение

Для дефлирования потока стоимости в достаточно продолжительном и потому признаваемым неоднородным периоде, т.е. для пересчета такого потока в цены предшествующего и также неоднородного периода, предложен метод, учитывающий динамики цен и количеств продуктов в последовательностях элементарных периодов, образующих агрегированные периоды. Получаемые структурно-динамические индексы цен и количеств не находятся в конфликте со значениями традиционных статичных индексов, в которых эти динамики не отражаются. Статичные индексы для неоднородных периодов имеют дело с потоками стоимостей для агрегированных, неоднородных периодов, измеряемыми в изменяющихся ценах, что противоречит положениям индексной теории.

Структурно-динамические индексы определяются инвариантно по отношению к выбору элементарного периода, в ценах которого сравниваются потоки стоимостей. Применяемое дефлирование стоимостей соответствует идее выявления и учета покупательной силы денег. Предпочтительным при дефлировании является применение сцепленных индексов цен Монтгомери – Вартиа. В их определении формализуется представление о сравниваемых однородных периодах с непостоянными ценами. Они представляют собой совпадающие динамические индексы, порождаемые конструкциями индексов Дивизиа и Монтгомери и обладают важным для приложений свойством согласованности относительно агрегирования. Предложенное определение этого свойства естественно в контексте практического применения теории индексов цен и количеств.

Введено понятие «однородный период с не предполагаемыми постоянными ценами». У исследователя имеется возможность выбора интерпретации этого понятия. Предлагаемый метод расчета средней цены для однородного периода не зависит от выбора одной из двух основных возможных интерпретаций и не противоречит применяемому в статистической практике «интуитивному» методу, корректируя его в ситуации быстрого роста статистически наблюдаемых для коротких интервалов времени моментных цен.

Такая свобода выбора, вместе с простотой предлагаемых определений траекторий моментных количеств и цен и их связью с индексами Дивизиа – Монтгомери, представляется весомым аргументом, оправдывающим предлагаемый метод расчета показателей количеств и цен для периодов по реально измеряемым статистической системой данным.

Получаемые для последовательности предполагаемых однородными периодов значения количеств Q_i и средних цен P_i товаров и услуг могут использоваться при расчете как статичных, так и динамических индексов.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ершов Э.Б.* Математические вопросы международных сопоставлений экономических показателей. М.: НИЭИ Госплана СССР, 1965.

2. *Ершов Э.Б.* Вступительная статья к [6]. С. 5–34.

3. *Ершов Э.Б.* Индексы цен и количеств Фишера и Монтгомери как индексы Дивизиа // Экономика и математические методы. 2003. Т. 39. № 2. С. 136–154.

4. *Ершов Э.Б.* Имплицитно-суперсовершенные индексы цен и количеств Дивизиа // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42. № 3. С. 68–85.

5. *Ершов Э.Б.* Факторная идентичность траекторных индексов, порождаемых конструкциями Дивизиа и Монтгомери как определяющее свойство логарифмических индексов цен и количеств // Экономический журнал Высшей школы экономики. Т. 14. 2010. № 1. С. 70–87.

6. *Кёвеш П.* Теория индексов и практика экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 1990. (Перевод монографии: Köves P. Theory and Economic Reality. Budapest: Akadémia Kiady, 1983.)

7. *Balk B.M.* On the First Step in the Calculation of a Consumer Price Index. 1994. (http://www.ottawagroup.org)

8. *Balk B.M.* Consistency-in-Aggregation and Stuvel Indices // The Review of Income and Wealth. Series 42. 1996. № 3. P. 353–363.

9. *Balk B.M.* On the Use of Unit Value Indices as Consumer Price Subindices. 1998. (http://www.ottawagroup.org)

10. *Balk B.M.* Price Indexes for Elementary Aggregates: The Sampling Approach. Research Report, Methods and Informatics Department. Voorburg: Statistics Netherlads, 2002.

11. *Balk B.M.* Divisia Price and Quantity Indices: 80 Years After // Statistica Neerlandica. 2005. № 2. P. 119–158.

12. *Blackorby C., Primont D.* Index Numbers and Consistency in Aggregation // Journal of Economic Theory. 1990. Vol. 22. № 1. P. 87–98.

13. Consumer Price Index Manual: Theory and Practice. Geneva: International Labor Office, 2004. (Перевод: МОТ. Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика. Вашингтон: Международный валютный фонд, 2007.)

14. *Dalén J.* Computing Elementary Aggregate in the Swedish Consumer Price Index // Journal of Official Statistics. 1992. Vol. 8. P. 129–147.

15. *Diewert W.E.* Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation // Econometrica. 1978. Vol. 46. № 4. P. 883–900.

16. *Diewert W.E.* Axiomatic and Economic Approach to Elementary Price Indexes: Discussion Paper № 95-01. Department of Economics. Vancouver: University of British Columbia, 1995. (http://www.econ.ubc.ca)

17. *Divisia F.* L' indice monétaire et la théorie de la monnaie // Revue D'Economie Politique. 1925. V. 39. № 4–6. 1926. V. 40. № 1.

18. *Fisher I.* The Making of Index Numbers. A Study of Their Varietes, Tests and Reality. Boston – Massachusetts: Houghton Mifflin Company, 1922. (Перевод 3-го издания этой монографии: Фишер И. Построение индексов. Учение об их разновидностях, тестах и достоверности. М.: ЦСУ СССР, 1928.)

19. *Hiks J.R.* Value and Capital. 2nd ed. Oxford Claredon Press, 1946.

20. *Lorenzen G.* Konsistent Addierbare Relative Aenderungen // Allgemeines Statistisches Archiv. 1990. Vol. 74. P. 336–344.

21. *Montgomery J.K.* Is There a Theoretically Correct Price Index of Group of Commodities? Private edition. Rom: International Institute of Agriculture, 1929.

22. *Montgomery J.K.* The Mathematical Problem of the Price Index. L.: P.S. King et Sons, Ltd., 1937.

23. *Pursiainen H.* Consistency in Aggregation, Quasilinear Means and the Index Numbers: Discussion Paper № 244. Helsinki Center of Economic Research, November 2008.