УДК 519.658

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК[1)]

Л. А. Бекларян, Н. К. Хачатрян

(117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН)

e-mail: beklar@cemi.rssi.ru; nerses@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию 15.03.2013 г.

Исследована модель, описывающая процесс грузоперевозок, реализуемый в рамках ряда технологий. Изучаются режимы грузоперевозок, удовлетворяющие заданной системе контроля. Такие режимы описываются решениями типа бегущей волны для нелинейного конечно-разностного аналога уравнения параболического типа. Описаны возможные режимы грузоперевозок, исследован вопрос устойчивости стационарных режимов. Библ. 12. Фиг. 7.

Ключевые слова: нелинейный конечно-разностный аналог параболического уравнения, решения типа бегущей волны, устойчивость, динамические модели грузоперевозок.

DOI: 10.7868/S0044466913100037

ВВЕДЕНИЕ

Среди проблем, связанных с работой транспорта, центральное место занимают задачи планирования и организации грузоперевозок. Впервые методы нахождения оптимального плана перевозок в нашей стране были предложены в 30-х годах прошлого столетия. В 1939 г. Л.В. Канторовичем (см. [1]) была математически описана транспортная задача линейного программирования. Им же определен целый класс задач, близких к транспортной, предложен алгоритм для решения транспортной задачи, названный методом разрешающих множителей. В [2] решалась транспортная задача с ограничениями на пропускные способности. Используя идеи общего метода Л.В. Канторовича, для решения задач линейного программирования был разработан метод потенциалов. Через год этот же метод был предложен американским математиком Дж. Данцигом (см. [3]). В то же время в Советском Союзе А.Л. Лурье (см. [4]) предложил метод решения транспортной задачи путем приближения условно-оптимальными планами. В [5] рассмотрена проблема оптимального планирования и управления транспортными потоками на транспортных сетях. Были рассмотрены математические модели транспортных сетей и транспортных потоков (однородный транспортный поток, поток с усилениями и ослаблениями, поток нескольких видов на транспортной сети с ограниченной пропускной способностью звеньев, динамический транспортный поток).

Другой важной задачей, связанной с работой транспорта, является организация грузоперевозок и их системы контроля. Такая задача рассмотрена в [6]–[8]. Настоящая работа посвящена детальному изучению задачи указанного типа. В ней построена и исследована модель организации грузоперевозок на протяженном участке пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Предполагается, что между двумя соседними станциями существует межстанционный перегонный путь, где временно может храниться часть грузов. Емкость перегонных путей считаем неограниченной. Движение грузов происходит в одном направлении. На произвольную промежуточную станцию с номером i груз может поступать как с предыдущей станции с номером $(i - 1)$, так и с перегонного пути, расположенного между ними. Аналогично, с произвольной промежуточной станции с номером i груз может быть отправлен либо на следующую станцию с номером $(i + 1)$, либо на перегонный путь, расположенный между ними.

Рассматриваются четыре варианта модели.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 12-01-00768).

Первый вариант модели описывает транснациональные транспортные грузоперевозки (с большим количеством промежуточных станций) без выделенных начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов. Этот вариант модели описывает грузоперевозки, для которых как первая, так и последняя станции не являются узловыми. Для таких грузоперевозок важно описать закон взаимодействия промежуточных станций. Поэтому предполагается, что число промежуточных станций бесконечно как в левую, так и в правую сторону.

Второй вариант модели описывает транспортные грузоперевозки с выделенной начальной станцией отправления грузов. Этот вариант модели описывает грузоперевозки на протяженном участке пути, где начальная станция является узловой. Роль данной станции является наиболее весомой в задаче организации грузоперевозок, и поэтому она обладает дополнительными мощностями. Для таких грузоперевозок важно описать закон взаимодействия начальной станции с промежуточными, а также закон взаимодействия промежуточных станций. Поэтому предполагается, что число промежуточных станций бесконечно лишь в правую сторону.

Третий вариант модели описывает транспортные грузоперевозки с выделенными начальной станцией отправления и конечной станцией распределения грузов. Этот вариант модели описывает грузоперевозки на протяженном участке пути между двумя узловыми станциями. Наиболее весомыми в задаче организации грузоперевозок являются роли узловых станций (т.е. первой и последней), и поэтому они обладают дополнительными мощностями. Для таких грузоперевозок важно описать как законы взаимодействия узловых станций с промежуточными, так и закон взаимодействия промежуточных станций. Поэтому предполагается, что число промежуточных станций конечно.

Четвертый вариант модели описывает транспортные грузоперевозки по круговой цепочке станций.

Для первых трех вариантов модели приводятся постановка задачи и основные результаты. Детальное описание этих вариантов модели можно найти в [9]–[11]. В основе изучения решений типа бегущей волны в приведенных моделях лежит идея, что такие решения могут быть реализованы как решения соответствующего индуцированного функционально-дифференциального уравнения. Исследование решений самих функционально-дифференциальных уравнений основано на их групповых особенностях и приводится в [12].

Для четвертого варианта модели в рамках данной работы изучены возможные режимы организации грузоперевозок, проведено исследование на устойчивость стационарного режима грузоперевозок.

1. МОДЕЛЬ ТРАНСНАЦИОНАЛЬНЫХ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК

Как было сказано во введении, такая модель описывает движение без выделенных начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов, вследствие чего считаем, что число промежуточных станций бесконечно как в правую, так и в левую стороны.

Работа всех станций состоит из приема, обработки и отправки грузов, а сами станции имеют заданную пропускную способность. Под пропускной способностью понимаем максимальный объем грузов, который может пройти через промежуточную станцию за единичный отрезок времени. Обработка грузов происходит в узлах станций. В каждый момент времени число задействованных узлов на n-ой станции обозначим через $z_n(t)$. В каждом узле в течение единицы времени обрабатывается единичный объем грузов. Очевидно, что количество задействованных узлов обработки грузов при бесперебойной работе всей цепи перевозок ограничено. Максимальное количество таких узлов, обозначаемое через Δ, определяет пропускную способность станций.

Организация подобных грузопотоков зависит от технологий по приему, обработке и отправлению грузов. Опишем эти технологии.

Первая технология основана на установленных нормативных правилах взаимодействия соседних станций. Для каждой станции с номером i существуют правила взаимодействия с предыдущей $(i-1)$-й станцией и последующей $(i+1)$-й станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, станция с номером i, в зависимости от количества задействованных узлов на $(i-1)$-й станции, должна увеличивать или уменьшать количество задействованных узлов со скоростью $\alpha(z_{i-1} - z_i)$ (т.е. принимать груз с предыдущей станции, если количество задействованных узлов на $(i-1)$-й станции больше, чем на i-й станции, или отправлять на перегонный путь, если количество задействованных узлов на $(i-1)$-й станции меньше, чем на i-й станции). Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, станция с номером i, в зависимости от количества задействованных узлов на $(i+1)$-й станции, должна уменьшать или увеличивать количество задействованных узлов со скоростью $\alpha(z_i - z_{i+1})$ (т.е. отправлять на следующую станцию, если число задействованных узлов на i-й станции больше, чем на $(i+1)$-й станции, или принимать с перегонного пути, если число задействованных узлов на i-й станции меньше, чем на $(i+1)$-й станции).

Первая технология не учитывает условия ограниченности пропускной способности станций. Кроме того, она не позволяет использовать весь потенциал станций. В связи с этим наряду с первой технологией используется и иная технология.

Вторая технология позволяет как увеличить число задействованных узлов (если оно не превышает Δ), так и уменьшать (если оно превышает Δ). При этом груз принимается с перегонного пути либо отправляется на перегонный путь. Из определения второй технологии следует, что функция $\varphi(.)$, задающая скорость изменения числа задействованных узлов обработки в рамках данной технологии, обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, 0]$ тождественно равна 0, на интервале $(0, x_{\text{opt}})$ является возрастающей, в точке x_{opt} принимает максимальное значение, на полупрямой $(x_{\text{opt}}, +\infty)$ является убывающей, в точке Δ принимает нулевое значение, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейной.

Предполагаем, что функция $\varphi(.)$ является дважды непрерывно дифференцируемой с равномерно ограниченными первой и второй производными. Очевидно, что такая функция и ее производная удовлетворяют условию Липшица с константами L_0 и L_1 соответственно.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, число задействованных узлов на i-й станции будет описываться дифференциальным уравнением

$$\dot{z}_i(t) = \alpha(z_{i-1} - z_i) - \alpha(z_i - z_{i+1}) + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Для грузоперевозок необходимо иметь действенную и простую систему контроля. Она заключается в том, что объемы обрабатываемых грузов для любого планового интервала времени на всех станциях должны совпадать с определенным лагом времени, единым для всех станций. Такое условие можно описать в следующем виде: существует число $\tau > 0$, не зависящее от t и i, такое, что при всех $i \in Z$ и $t \in [0, +\infty)$ выполняется равенство

$$z_i(t) = z_{i+1}(t+\tau). \tag{2}$$

Решения системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие условию (2), называются *решениями типа бегущей волны*. Константу τ, которая является сдвигом между моментами замеров и сравнения объемов грузов, будем называть *характеристикой системы контроля*. Таким образом, наша модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается счетной системой дифференциальных уравнений и условием, задающим бегущую волну:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{3}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t+\tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Определение 1 (см. [11]). Семейство абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(.)\}_{i \in Z}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется *решением системы дифференциальных уравнений* (3), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(.)$ удовлетворяют этой системе.

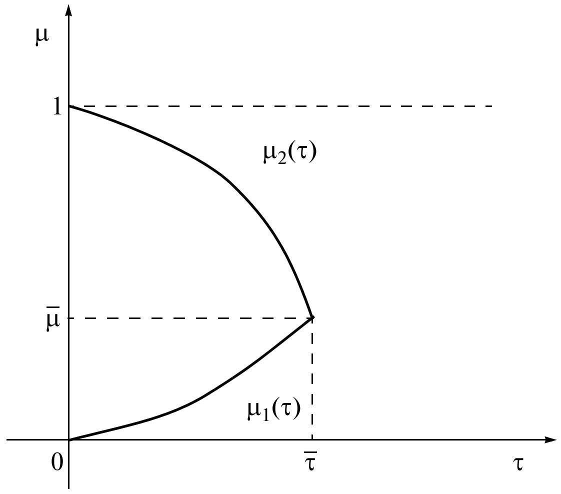
Наиболее важной задачей является организация грузопотока посредством определенных выше технологий с наперед заданной системой контроля, т.е. наличие решений системы (3), удовлетворяющих условию (4) с заданным τ. На практике при малых τ система контроля может быть нереализуема из-за сложных технологических процессов, связанных с перегоном грузов от одной станции к другой. С другой стороны, при очень больших τ такая система контроля может оказаться неактуальной. Поэтому вторая важная задача — оценка возможных диапазонов изменения τ как характеристики системы контроля.

Для формулировки основных результатов определим семейство банаховых пространств функций

$$L_\mu^1 C^{(k)}(R) = \left\{ x(.) : x(.) \in C^{(k)}(R, R), \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in R} \left\| x^{(r)}(t) \mu^{|t|} \right\|_R < +\infty \right\}, \quad \mu \in (0,1),$$

с нормой

$$\|x\|_\mu^{(k)} = \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in R} \left\| x^{(r)}(t) \mu^{|t|} \right\|_R.$$



Фиг. 1.

Если прямую R заменить полупрямой $[0,+\infty)$, то получим определение пространства $L^1_\mu C^k([0,+\infty))$.

Определим пространство $K^1 = \prod_{-\infty}^{+\infty} R_i$, $R_i = R$, $i \in Z$, с элементами $\kappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_i \in R$, $i \in Z$, и со стандартной топологией полного прямого произведения. В пространстве K^1 определим семейство гильбертовых подпространств

$$K^1_{2\mu} = \left\{\kappa : \kappa \in K^1; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|_R^2 \mu^{2|i|} < +\infty\right\}, \quad \mu \in (0,1),$$

с нормой

$$\|\kappa\|_{2\mu} = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|_R^2 \mu^{2|i|}\right]^{1/2}.$$

Пусть

$$M(\tau) = \tau \max[2\alpha, L_0],$$

и рассмотрим неравенство относительно двух переменных $\tau \in (0,+\infty)$ и $\mu \in (0,1)$

$$M(\tau)[1 + 2\mu^{-1}] < \ln \mu^{-1}, \quad \mu \in (0,1). \tag{5}$$

Множество решений неравенства (5) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на фиг. 1.

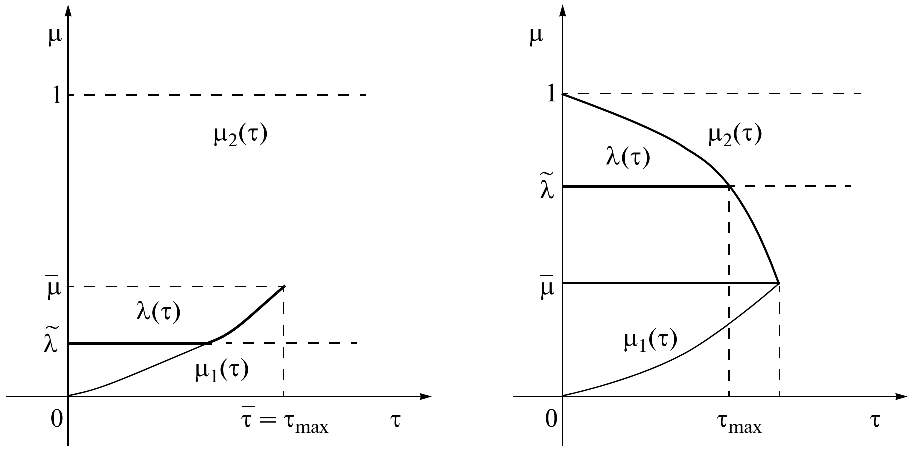
Справедлива следующая

Теорема 1 (см. [11]). *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in Z$, начального момента времени $\bar{t} \in [0,+\infty)$ и характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$ (см. фиг. 1), существует решение $\{z_i(.)\}_{i\in Z}$ уравнения (3) типа бегущей волны (условие (4)) с характеристикой τ, удовлетворяющее начальному условию $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. Более того, для всякого $i \in Z$ функция $z_i(.)$ принадлежит пространству $L^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}([0,+\infty))$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Такое решение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a в том смысле, что каждая координата $z_i(.)$, $i \in Z$, непрерывно зависит от начального условия a как элемент пространства $L^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}([0,+\infty))$.*

Система (3)–(4) имеет два стационарных решения типа бегущей волны: $\bar{z}_1 \equiv \{\ldots,0,0,0,\ldots\}$, $\bar{z}_2 \equiv \{\ldots,\Delta,\Delta,\Delta,\ldots\}$. Очевидно, что такие решения принадлежат пространству $K^1_{2\mu}$ при любом $\mu \in (0,1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\mu^2 - (2\alpha + \delta)\mu + \alpha = 0, \tag{6}$$



Фиг. 2.

где $\delta = -\varphi'(\Delta)$. Из определения функции $\varphi(.)$ следует, что $\delta > 0$. Решениями уравнения (6) являются вещественные числа $\tilde\lambda$, $\tilde{\tilde\lambda}$, причем $0 < \tilde\lambda < 1$, $\tilde{\tilde\lambda} > 1$.

Определение 2 (см. [11]). Стационарное решение $\bar z = \{\bar z_i\}_{i \in Z}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0,1)$, называется *устойчивым по Ляпунову*, если существуют $\gamma > 0$, $\bar t \geq 0$ такие, что для произвольного $d \in K^1_{2\mu}$, удовлетворяющего условию $\|d - \bar z\|_{2\mu} < \gamma$, решение $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(\bar t) = d$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_1 < \gamma$ такое, что при $\|d - \bar z\|_{2\mu} < \sigma_1$ решение $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(\bar t) = d$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar z\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar t$.

Устойчивое по Ляпунову стационарное решение $\bar z = \{\bar z_i\}_{i \in Z}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0,1)$, называется *асимптотически устойчивым*, если $\lim\limits_{t \to +\infty} \|z(t) - \bar z\|_{2\mu} = 0$.

Теорема 2 (см. [11]). *Для любых* α, $\delta > 0$ *и характеристик* $\tau \in (0, +\infty)$ *стационарное решение* $\bar z_2 = \{\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots\}$ *типа бегущей волны уравнения* (3) *в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\tilde\lambda, 1)$, *является асимптотически устойчивым, а стационарное решение* $\bar z_1 = \{\ldots, 0, 0, 0, \ldots\}$ *типа бегущей волны в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0,1)$, *является неустойчивым*.

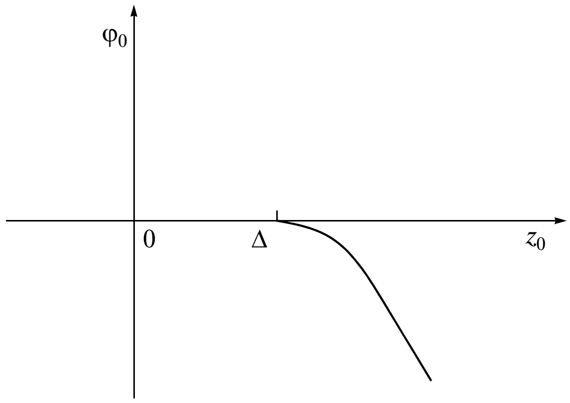
Пусть

$$\tau_{max} = \sup\{\tau : \tau \leq \bar\tau, \mu_2(\tau) \geq \tilde\lambda\}.$$

На интервале $(0, \tau_{max}]$ определяется функция $\lambda(\tau) = \max(\tilde\lambda, \mu_1(\tau))$, графически изображенная на фиг. 2 ((а) – при $\tilde\lambda < \bar\mu$ и (б) – при $\tilde\lambda > \bar\mu$).

Определение 3 (см. [11]). Стационарное решение $\bar z = \{\bar z_i\}_{i \in Z}$, $\bar z_i = \bar z_{i+1}$, $i \in Z$, типа бегущей волны системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0,1)$, называется *устойчивым по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой* τ, если: оно устойчиво по Ляпунову; существуют $\gamma > 0$, $\bar t \geq 0$ такие, что для произвольного числа d_0, удовлетворяющего условию $|d_0 - \bar z_0| < \gamma$, решение $z(t) = \{z_n(t)\}_{n \in Z}$ системы (3)–(4) с начальным условием $z_0(\bar t) = d_0$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_2 < \gamma$ такое, что из условия $|d_0 - \bar z_0| < \delta_2$ следует, что решение $z(t)$ системы (3)–(4) с начальным условием $z_0(\bar t) = d_0$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar z\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar t$.

Устойчивое по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ стационарное решение $\bar z = \{\bar z_i\}_{i \in Z}$, $\bar z_i = \bar z_{i+1}$, $i \in Z$, системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0,1)$, называется *асимптотически устойчивым*, если $\lim\limits_{t \to +\infty} \|z(t) - \bar z\|_{2\mu} = 0$.



Фиг. 3.

Имеет место

Теорема 3 (см. [11]). *Для любых* $\alpha, \delta > 0$ *и характеристик* $\tau \in (0, \tau_{\max})$ *стационарное решение* $\bar{z}_2 = \{\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots\}$ *типа бегущей волны системы уравнений* (3) *в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$, $\gamma \in (\lambda(\tau), \mu_2(\tau))$ *является асимптотически устойчивым среди решений типа бегущей волны с характеристикой* τ.

2. МОДЕЛЬ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК С ВЫДЕЛЕННОЙ НАЧАЛЬНОЙ СТАНЦИЕЙ ОТПРАВЛЕНИЯ ГРУЗОВ

В предыдущем разделе была рассмотрена модель транснациональных транспортных перевозок, где предполагалось, что множество промежуточных станций бесконечно как в правую, так и в левую сторону. В данном разделе рассмотрим модель транспортных перевозок с выделенной начальной станцией отправления грузов. Исследуется модель транспортных перевозок с начальной станцией отправления грузов $i = 0$ и большим количеством промежуточных станций $i = 1, 2, \ldots$. Так же, как и в первой модели, организация грузопотока осуществляется посредством двух технологий.

Первая технология. На станциях с номерами $i = 1, 2, \ldots$ действует первая технология, описанная в предыдущем параграфе. На начальной станции $i = 0$ первая технология определяется с помощью правила взаимодействия с последующей станцией и правила подачи грузов на нее, определяемой функцией $\psi(t)$, зависящей от переменной времени $t \geq 0$. Предполагаем, что функция $\psi(.)$ является кусочно-бесконечно-дифференцируемой. Так как начальная станция является узловой, то естественно предположить, что она обладает большими мощностями и при необходимости на ней можно резко изменять число задействованных узлов, чего нельзя сделать на промежуточных станциях.

Вторая технология. Для произвольной станции с номером $i = 1, 2, \ldots$ вторая технология в точности повторяет вторую технологию, описанную в предыдущем разделе. Для начальной станции $i = 0$ вторая технология из предыдущего раздела используется только для разгрузки. Поэтому скорость изменения числа задействованных узлов обработки на начальной станции в рамках второй технологии описывается функцией $\varphi_0(.)$, зависящей от количества задействованных узлов на начальной станции, график которой представлен на фиг. 3.

Предполагаем, что функции $\varphi_0(.)$ и $\varphi(.)$ (определенная в предыдущем разделе) являются бесконечно дифференцируемыми. Очевидно, что при объеме грузов на 0-й станции, не превышающем Δ, используется только первая технология.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, а также системы контроля, процесс грузоперевозок будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_0(t) = \psi(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \tag{7}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, +\infty), \tag{8}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, +\infty). \tag{9}$$

Перейдем от системы (7)–(9) к ее формальному расширению

$$\dot{z}_0(t) = \psi(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \tag{10}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, +\infty), \tag{11}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, +\infty), \tag{12}$$

$$\dot{z}_i(t) \equiv 0, \quad i = -1, -2, \ldots, \quad t \in [0, +\infty), \tag{13}$$

$$z_i(0) = 0, \quad i = -1, -2, \ldots. \tag{14}$$

Если $\{z_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ есть решение системы (10)–(14), то $\{z_i(.)\}_0^{+\infty}$ является решением системы (7)–(9).

Пусть Σ есть σ-алгебра всех подмножеств множества целых чисел Z. Через $\overline{B}$ будем обозначать дополнение к B в Z, т.е. $\overline{B} = Z \backslash B$. Каждому множеству $B \in \Sigma$ поставим в соответствие непрерывный проектор P_B, действующий в пространстве K^1 по следующему правилу: для произвольных $\kappa = \{x_n\}_{n \in Z}$, $i \in Z$

$$(P_B\kappa)_i = \begin{cases} x_i, & i \in B, \\ 0, & i \notin B. \end{cases}$$

Рассмотрим оператор сдвига T:

$$\forall \kappa \in K^1, \quad \forall i \in Z \quad (T\kappa)_i = x_{i+1}.$$

Определим линейные операторы A, C и нелинейный оператор Φ, действующие из пространства K^1 в себя по следующему правилу: для любых $i \in Z$, $\kappa \in K^1$

$$(A\kappa)_i = \alpha x_{i-1} - 2\alpha x_i + \alpha x_{i+1}, \quad (C\kappa)_i = -\alpha x_i + \alpha x_{i+1}, \quad (\Phi(\kappa))_i = \varphi(x_i).$$

Пусть $\Psi(t) = \{\ldots \psi(t), \psi(t), \psi(t) \ldots\}$ и $B_0 = \{0\}$, $B_1 = \{1\}$, $B_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $B = B_0 \cup B_+$.

Используя введенные обозначения, систему (10)–(14) можем записать в векторной форме:

$$\dot{\kappa}(t) = (P_{B_+}A + P_{B_0}C)\kappa + P_B\Phi(\kappa) + P_{B_0}\Psi(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{15}$$

$$P_B\kappa(t) = P_BT\kappa(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty), \tag{16}$$

$$P_{\overline{B}}\kappa(0) = 0, \tag{17}$$

где $\dot{\kappa}(t)$ является производной по Гато.

Изучение решений системы (15)–(17) в метризуемом пространстве K^1 затруднительно. В связи с этим рассмотрим сужение системы (15)–(17) на подпространство $K^1_{2\mu}$. Для этого определим ограничения операторов, участвующих в дифференциальном уравнении (15), на подпространство $K^1_{2\mu}$:

$$A|_{K^1_{2\mu}} = A_{2\mu}, \quad C|_{K^1_{2\mu}} = C_{2\mu}, \quad \Phi|_{K^1_{2\mu}} = \Phi_{2\mu}.$$

Для любого $\mu \in (0, 1)$ операторы $A_{2\mu}$, $C_{2\mu}$, $\Phi_{2\mu}$ являются непрерывными преобразованиями этого подпространства. Итак, рассмотрим следующую систему:

$$\dot{\kappa}(t) = (P_{B_+}A_{2\mu} + P_{B_0}C_{2\mu})\kappa + P_B\Phi_{2\mu}(\kappa) + P_{B_0}\Psi(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{18}$$

$$P_B\kappa(t) = P_BT\kappa(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty), \tag{19}$$

$$P_{\overline{B}}\kappa(0) = 0. \tag{20}$$

Рассмотрим решения системы (18)–(20), лежащие в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$ и являющиеся сильно абсолютно непрерывными функциями (почти всюду дифференцируемыми по Фреше, производные интегрируемы по Бохнеру, а сами функции являются первообразными своих производных). Итак, рассмотрим систему (18)–(20), в которой $\dot{\kappa}(t)$ является производной по Фреше в пространстве $K^1_{2\mu}$.

Наряду с системой (18)–(20) изучим следующую краевую задачу, полученную как ограничение системы (18)–(20) на интервал $[0, \tau]$:

$$\dot{\tilde{\kappa}}(t) = (P_{B_+}A_{2\mu} + P_{B_0}C_{2\mu})\tilde{\kappa} + P_B\Phi_{2\mu}(\tilde{\kappa}) + P_{B_0}\Psi(t), \quad t \in [0, \tau], \tag{21}$$

$$P_B\tilde{\kappa}(0) = P_BT\tilde{\kappa}(\tau), \tag{22}$$

$$P_{\overline{B}}\tilde{\kappa}(0) = 0. \tag{23}$$

Для системы (21)–(23) имеет место следующая теорема существования и единственности решения

Теорема 4 (см. [11]). *Для любых начальных данных* $a > 0$, $\bar{i} \in \{0,1,\ldots\}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in [0,\tau]$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \bar{\tau}$ *(см. фиг. 1), и функций* $\psi(.) \in L_1([0,\tau], R)$ *существует решение* $\tilde{\kappa}(.)$ *краевой задачи* (21)–(23) *в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\mu_1(\tau),\ \mu_2(\tau))$, *удовлетворяющее начальному условию* $(\tilde{\kappa}(\bar{t}))_{\bar{i}} = a$. *Такое решение является единственным и непрерывно зависит от начального условия* a *и функции* $\psi(.)$.

По решению $\tilde{\kappa}(.) = \{\tilde{x}_i(.)\}_{i\in Z}$ краевой задачи (21)–(23), в которой $\psi(.) \in C^\infty([0,\tau], R)$, построим функцию $\psi(.)$ и вектор-функцию $\kappa(.) = \{x_i(.)\}_{i\in Z}$ на полупрямой $[0,+\infty)$:

$$\kappa(t) = \begin{cases} \tilde{\kappa}(t), \quad t \in [0,\tau]; \\ P_{\bar{B}}\kappa(t) = P_{\bar{B}}\tilde{\kappa}(0), \quad t \in (\tau,+\infty); \\ P_B T\kappa(t) = P_B\kappa(t-\tau), \quad t \in (k\tau,(k+1)\tau), \quad k = 1,2,\ldots; \\ x_0(t) = x_0(t-\tau) + \dfrac{\psi(t-\tau)}{\alpha} + \dfrac{\varphi_0(x_0(t-\tau)) - \varphi(x_0(t-\tau))}{\alpha}, \\ t \in (k\tau,(k+1)\tau), \quad k = 1,2,\ldots; \\ \psi(t) = \dfrac{1}{\alpha}\dot{\psi}(t-\tau) + \dfrac{1}{\alpha}[\dot{\varphi}_0(x_0(t-\tau)) - \dot{\varphi}(x_0(t-\tau))]\dot{x}_0(t-\tau) + \\ + \dot{x}_0(t-\tau) + \psi(t-\tau) + \varphi_0(x_0(t-\tau)) - \varphi(x_0(t-\tau)) - \\ - \varphi_0\left(x_0(t-\tau) + \dfrac{\psi(t-\tau)}{\alpha} + \dfrac{\varphi_0(x_0(t-\tau)) - \varphi(x_0(t-\tau))}{\alpha}\right), \\ t \in (k\tau,(k+1)\tau), \quad k = 1,2,\ldots. \end{cases} \tag{24}$$

Определение 4 (см. [11]). *Квазирешением уравнения* (18) *в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$ называется всякая кусочно-сильно-абсолютно-непрерывная функция $\kappa(.) : [0,+\infty) \to K^1_{2\mu}$ с разрывами только лишь в точках $k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывная слева и почти всюду удовлетворяющая этому уравнению.

Лемма 1 (см. [11]). *Для произвольного квазирешения* $\kappa(.)$ *системы* (18)–(20) *его ограничение* $\kappa(.)|_{[0,\tau]} = \tilde{\kappa}(.)$ *на интервал* $[0, \tau]$ *является решением краевой задачи* (21)–(23). *Более того, квазирешение* $\kappa(t)$, $t \in [0,+\infty)$, *системы* (18)–(20) *будет удовлетворять соотношениям* (24).

Функция $\kappa(.)$, *построенная по решению* $\tilde{\kappa}(.)$ *краевой задачи* (21)–(23) *в силу соотношений* (24) *является квазирешением системы* (18)–(20), *в которой функция* $\psi(.)$ *определена в* (24).

Приведем определение квазирешения для исходной системы (7)–(9).

Определение 5 (см. [11]). Семейство кусочно-абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(.)\}_0^{+\infty}$, определенных на $[0,+\infty)$, называется *квазирешением типа бегущей волны с характеристикой* $\tau > 0$ *для системы* (7)–(9), если при почти всех $t \in [0,+\infty)$функции $z_i(.)$ удовлетворяют этой системе, а разрывы расположены в точках $k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$.

Сформулируем теорему существования квазирешения для исходной системы (7)–(9).

Теорема 5 (см. [11]). *Для любых начальных данных* $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, \ldots\}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \bar{\tau}$ *(см. фиг. 1), и функции* $\psi(.) \in C^\infty([0, \tau], R)$ *на полупрямой* $(\tau,+\infty)$ *существует единственное кусочно-непрерывное продолжение функции* $\psi(.)$, *определенное в* (24), *и соответствующее ему квазирешение* $\{z_i(.)\}_0^{+\infty}$ *с характеристикой* τ *системы* (7)–(9) *в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$ $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, *удовлетворяющее начальному условию* $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. *Такое квазирешение является единственным и непрерывно зависит от начального условия* a *и функции* $\psi(.)$.

В содержательном плане это означает, что на всех станциях в моменты времени, кратные характеристике системы контроля, возможно скачкообразное изменение числа задействованных узлов. Данная процедура требует подключения дополнительных мощностей, которые имеются только на узловой (начальной) станции. Более того, ниже будет показано, что такие скачкообразные изменения задействованных узлов можно подкорректировать таким образом, чтобы скачкообразные изменения значений самих грузопотоков были малы.

Определение 6 (см. [11]). Квазирешение типа бегущей волны с характеристикой τ называется ε*-квазирешением типа бегущей волны с характеристикой* τ, или (ε, τ)*-квазирешением*, если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 6 (см. [11]). *Для любых начальных данных* $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, \ldots\}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \bar{\tau}$ (*см. фиг.* 1), *произвольной функции* $\psi(.) \in C^\infty([0, \tau], R)$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\psi_\varepsilon(.) \in C^\infty([0, \tau], R)$, *отличная от* $\psi(.)$ *в малой окрестности точки* 0 *такая, что ее продолжение на* $(\tau, +\infty)$, *определенное в* (24), *и соответствующее ему квазирешение* $\{z_{i\varepsilon}(.)\}_0^{+\infty}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *системы* (7)–(9) *удовлетворяет начальному условию* $z_{\bar{i}\varepsilon}(\bar{t}) = a$, *принадлежит фазовому пространству* $K^1_{2\mu}$ *при любом* $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ *и является* (ε, τ)*-квазирешением*.

Таким образом, достаточно лишь на начальной станции, в начальный период времени и периоды, кратные ему, резко изменить число задействованных узлов (слегка изменить функцию $\psi(.)$ в норме $L_1([0, \tau], R)$, чтобы организовать контролируемый грузопоток с помощью определенных выше технологий в виде ε-квазирешения (т.е. такое квазирешение, у которого указанные разрывы меньше ε).

3. МОДЕЛЬ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК С НАЧАЛЬНОЙ СТАНЦИЕЙ ОТПРАВЛЕНИЯ И КОНЕЧНОЙ СТАНЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГРУЗОВ

Рассмотрим модель транспортных перевозок с начальной станцией отправления грузов $i = 0$, промежуточными станциями $i = 1, 2, \ldots, m$ и конечной станцией распределения грузов $i = m + 1$. Так же, как и в предыдущих моделях, организация грузопотока осуществляется посредством двух технологий.

Первая технология. На станциях с номерами $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ действует технология, описанная в предыдущих разделах. Технология подачи грузов на начальную станцию описывается функцией $\psi_1(t)$, $t \geq 0$. На конечной станции первая технология определяется с помощью правила взаимодействия с предыдущей станцией и правилом распределения грузов с нее и описывается функцией $\psi_2(t)$, $t \geq 0$. Предполагаем, что функция $\psi_1(.)$ является кусочно-бесконечно-дифференцируемой, а функция $\psi_2(.)$ кусочно-непрерывной.

Вторая технология. Для начальной и промежуточных станций вторая технология в точности повторяет вторую технологию, описанную в предыдущих разделах. Вторая технология для конечной станции такая же, как для промежуточных станций.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, а также системы контроля, прием и отправка грузов будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \tag{25}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty), \tag{26}$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \tag{27}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty). \tag{28}$$

Перейдем от системы (25)–(28) к ее формальному расширению:

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \tag{29}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty), \tag{30}$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \tag{31}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty), \tag{32}$$

$$\dot{z}_i(t) \equiv 0, \quad i = -1, -2, \ldots \bigcup i = m + 2, m + 3, \ldots, \quad t \in [0, +\infty), \tag{33}$$

$$z_i(0) = 0, \quad i = -1, -2, \ldots \bigcup i = m + 2, m + 3, \ldots. \tag{34}$$

Будем полагать, что функция $\psi_1(.)$ является кусочно-бесконечно-дифференцируемой, а функция $\psi_2(.)$ – кусочно-непрерывной, причем обе функции имеют разрывы только лишь в точках $k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $\{\overline{z}_n(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ есть решение системы (29)–(34), то $\{\overline{z}_n(.)\}_0^{m+1}$ является решением системы (25)–(28).

Определим линейные операторы C_1 и C_2, действующие из пространства K^1 в себя по следующим правилам: для любых $i \in Z$, $\kappa \in K^1$ имеем

$$(C_1\kappa)_i = -\alpha x_i + \alpha x_{i+1}, \quad (C_2\kappa)_i = \alpha x_{i-1} - \alpha x_i.$$

Пусть

$$\Psi_1(t) = (\ldots\psi_1(t), \psi_1(t), \psi_1(t), \ldots), \quad \Psi_2(t) = (\ldots\psi_2(t), \psi_2(t), \psi_2(t), \ldots)$$

и

$$B_0 = \{0\}, \quad B_{m+1} = \{m+1\}, \quad B_1 = \{1\}, \quad B = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad B_* = \{0, 1, \ldots, m\}, \quad \hat{B} = \{0, 1, \ldots, m+1\}.$$

Используя определение операторов A и Φ из предыдущего раздела, систему (29)–(34) можем записать в виде

$$\dot{\kappa}(t) = (P_BA + P_{B_0}C_1 + P_{B_{m+1}}C_2)\kappa + P_{\hat{B}}\Phi(\kappa) + P_{B_0}\Psi_1(t) + P_{B_{m+1}}\Psi_2(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{35}$$

$$P_{B_*}\kappa(t) = P_{B_*}T\kappa(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty), \tag{36}$$

$$P_{\tilde{\hat{B}}}\kappa(0) = 0, \tag{37}$$

где $\dot{\kappa}(t)$ является производной по Гато.

Так же, как и в предыдущем разделе, рассмотрим сужение системы (35)–(37) на подпространство $K_{2\mu}^1$:

$$\dot{\kappa}(t) = (P_BA_{2\mu} + P_{B_0}C_{12\mu} + P_{B_{m+1}}C_{22\mu})\kappa + P_{\hat{B}}\Phi_{2\mu}(\kappa) + P_{B_0}\Psi_1(t) + P_{B_{m+1}}\Psi_2(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{38}$$

$$P_{B_*}\kappa(t) = P_{B_*}T\kappa(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty), \tag{39}$$

$$P_{\tilde{\hat{B}}}\kappa(0) = 0, \tag{40}$$

и изучим сильно-абсолютно-непрерывные решения системы (38)–(40), в которой под $\dot{\kappa}(t)$ понимается производная по Фреше в пространстве $K_{2\mu}^1$.

Наряду с системой (38)–(40) рассмотрим следующую краевую задачу, полученную как ограничение системы (38)–(40) на интервал $[0, \tau]$:

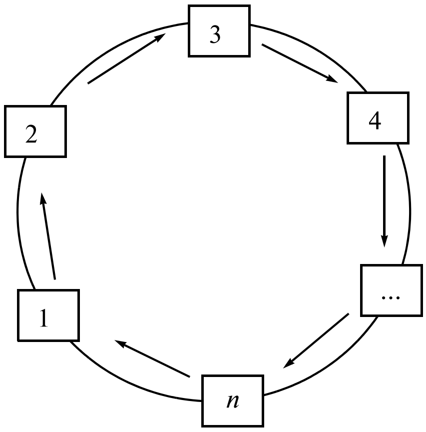
$$\dot{\tilde{\kappa}}(t) = (P_BA_{2\mu} + P_{B_0}C_{12\mu} + P_{B_{m+1}}C_{22\mu})\tilde{\kappa} + P_{\hat{B}}\Phi_{2\mu}(\tilde{\kappa}) + P_{B_0}\Psi_1(t) + P_{B_{m+1}}\Psi_2(t), \quad t \in [0, \tau], \tag{41}$$

$$P_{B_*}\tilde{\kappa}(0) = P_{B_*}T\tilde{\kappa}(\tau), \tag{42}$$

$$P_{\tilde{\hat{B}}}\tilde{\kappa}(0) = 0. \tag{43}$$

Для системы (41)–(43) имеет место следующая теорема существования и единственности решения.

Теорема 7 (см. [11]). *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$, начального момента времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$, характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$ (см. фиг. 1), и функций $\psi_1(.)$, $\psi_2(.) \in L_1([0, \tau], R)$ существует решение $\tilde{\kappa}(.)$ краевой задачи (41)–(43) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, удовлетворяющее начальному условию $(\tilde{\kappa}(\bar{t}))_{\bar{i}} = a$. Такое решение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a и функций $\psi_1(.)$, $\psi_2(.)$.*



Фиг. 4.

По решению $\tilde{\kappa}(.) = \{\tilde{x}_i(.)\}_{i\in Z}$ краевой задачи (41)–(43), в которой $\psi_1(.) \in C^\infty([0,\tau], R)$, $\psi_2(.) \in C([0,\tau], R)$, построим функции $\psi_1(.)$, $\psi_2(.)$ и вектор-функцию $\kappa(.) = \{x_i(.)\}_{i\in Z}$ на полупрямой $[0,+\infty)$:

$$\kappa(t) = \begin{cases} \tilde{\kappa}(t), \quad t \in [0,\tau], \\ P_{\bar{\tilde{B}}}\kappa(t) = P_{\bar{\tilde{B}}}\tilde{\kappa}(0), \quad t \in (\tau,+\infty), \\ P_{B_*}T\kappa(t) = P_{B_*}\kappa(t-\tau), \quad t \in (k\tau,(k+1)\tau), \quad k = 1, 2, \dots, \\ x_0(t) = x_0(t-\tau) + \dfrac{\psi_1(t-\tau)}{\alpha} + \dfrac{\varphi_0(x_0(t-\tau)) - \varphi(x_0(t-\tau))}{\alpha}, \\ t \in (k\tau, (k+1)\tau), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \psi_1(t) = \dfrac{1}{\alpha}\dot{\psi}_1(t-\tau) + \dfrac{1}{\alpha}[\dot{\varphi}_0(x_0(t-\tau)) - \dot{\varphi}(x_0(t-\tau))]\dot{x}_0(t-\tau) + \\ + \dot{x}_0(t-\tau) + \psi_1(t-\tau) + \varphi_0(x_0(t-\tau)) - \varphi(x_0(t-\tau)) - \\ - \dot{\varphi}_0\left(x_0(t-\tau) + \dfrac{\psi_1(t-\tau)}{\alpha} + \dfrac{\varphi_0(x_0(t-\tau)) - \varphi(x_0(t-\tau))}{\alpha}\right), \\ t \in (k\tau, (k+1)\tau), \quad k = 1, 2, \dots; \\ \psi_2(t) = \alpha x_m(t-\tau) - \alpha x_{m+1}(t-\tau), \quad t \in (k\tau, (k+1)\tau), \quad k = 1, 2, \dots. \end{cases} \tag{44}$$

Имеет место лемма, являющаяся аналогом леммы 1, согласно которой решение краевой задачи (41)–(43), продолженное на полупрямую $[0,+\infty)$ в силу соотношений (44) , является квазирешением системы (38)–(40).

Сформулируем теорему существования квазирешения для исходной системы (25)–(28).

Теорема 8 (см. [11]). *Для любых начальных данных* $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \bar{\tau}$ (*см. фиг.* 1), *и функций* $\psi_1(.) \in C^\infty([0, \tau], R)$, $\psi_2(.) \in C([0, \tau], R)$ *на полупрямой* $(\tau,+\infty)$ *существуют единственные кусочно-непрерывные продолжения функций* $\psi_1(.)$ *и* $\psi_2(.)$, *определенные в* (44), *и соответствующее им квазирешение* $\{z_i(.)\}_0^{m+1}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *системы* (25)–(28) *в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, *удовлетворяющее начальному условию* $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. *Такое квазирешение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a и функций* $\psi_1(.)$, $\psi_2(.)$.

Оказывается, что так же, как и для предыдущей модели (с выделенной начальной станцией отправления грузов), с помощью скачкообразного изменения числа задействованных узлов на начальной станции в начальный период времени можно организовать контролируемый грузопоток (получить ε-квазирешение).

Теорема 9 (см. [11]). *Для любых начальных данных* $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, \ldots, m+1\}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \bar{\tau}$ (*см. фиг.* 1), *произвольных функций* $\psi_1(.) \in C^{\infty}([0, \tau], R)$, $\psi_2(.) \in C([0, \tau], R)$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\psi_{1\varepsilon}(.) \in C^{\infty}([0, \tau], R)$, *отличная от* $\psi_1(.)$ *в малой окрестности точки* 0, *такая, что продолжения функций* $\psi_{1\varepsilon}(.)$ *и* $\psi_2(.)$ *на* $(\tau, +\infty)$, *определенные в* (44), *и соответствующее им квазирешение* $\{z_{i\varepsilon}(.)\}_0^{m+1}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *системы* (25)–(28) *удовлетворяет начальному условию* $z_{\bar{i}\varepsilon}(\bar{t}) = a$, *принадлежит фазовому пространству* $K_{2\mu}^1$ *при любом* $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ *и является* (ε, τ)-*квазирешением*.

4. МОДЕЛЬ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК ПО КРУГОВОЙ ЦЕПОЧКЕ СТАНЦИЙ

Вернемся к первому варианту модели. Напомним, что этот вариант модели описывает транснациональные транспортные грузоперевозки без выделенных начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов. Рассмотрим частный случай такой модели, а именно модель транспортных грузоперевозок по круговой цепочке станций, изображенной на фиг. 4.

Для исследования данной модели нам необходимо изучить решения системы (3)–(4), удовлетворяющие следующему дополнительному условию:

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty).$$

Таким образом, данная модель описывается следующей системой:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{45}$$

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{46}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \tag{47}$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Если* $\{\bar{z}_i(.)\}_{i \in Z}$ *является решением системы* (45)–(47), *то для произвольного* $i \in Z$ *функция* $\bar{z}_i(.)$ *периодическая с периодом* τn.

Доказательство. Пусть $\{\bar{z}_i(.)\}_{i \in Z}$ является решением системы (45)–(47). Тогда из условия бегущей волны (соотношение (47)) следует, что для произвольных $i \in Z$, $t \in [0, +\infty)$ выполняется равенство $\bar{z}_i(t) = \bar{z}_{i+n}(t + \tau n)$. Из условия (46) следует, что $\bar{z}_{i+n}(t + \tau n) = \bar{z}_i(t + \tau n)$, поэтому $\bar{z}_i(t) = \bar{z}_i(t + \tau n)$, т.е. $\{\bar{z}_i(.)\}_{i \in Z}$ является периодическим с периодом τn.

Несложно заметить, что систему (45)–(47) можно переписать в виде

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \quad t \in [0, +\infty), \tag{48}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{49}$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n), \quad t \in [0, +\infty), \tag{50}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{51}$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty), \tag{52}$$

$$z_{i+kn}(t) = z_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = -1, -2, \ldots \bigcup k = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, +\infty). \tag{53}$$

Наряду с системой (48)–(53) рассмотрим конечномерную систему

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \quad t \in [0, +\infty), \tag{54}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{55}$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n), \quad t \in [0, +\infty), \tag{56}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{57}$$

$$z_n(t) = z_1(t + \tau), \quad t \in [0, +\infty). \tag{58}$$

Лемма 3. *Если* $\{z_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *является решением системы* (48)–(53), *то* $\{z_i(.)\}_1^n$ *является решением системы* (54)–(58). *Если* $\{z_i(.)\}_1^n$ *является решением системы* (54)–(58), *то* $\{z_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$, *где* $z_{i+kn}(t) = z_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $k = -1, -2, \ldots \bigcup k = 1, 2, \ldots$ *является решением системы* (48)–(53).

Доказательство очевидно.

Таким образом, разрешимость исходной системы (45)–(47) зависит от разрешимости конечномерной системы (54)–(58).

Итак, согласно леммам 2 и 3, если система (54)–(58) имеет решение, то оно будет периодическим с периодом τn. Одним из таких решений является стационарное решение $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$. Для выявления других решений (если они существуют) изучим все решения системы дифференциальных уравнений (54)–(56) (т.е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (57)–(58)).

Напомним, что функция $\varphi(.)$ на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей и имеет вид $\varphi(z_i) = -\delta(z_i - \Delta)$, где $\delta > 0$. На полупрямой $(-\infty, \Delta]$ имеет место неравенство $\varphi(z_i) \le -\delta(z_i - \Delta)$. Следовательно, всюду на прямой $(-\infty, \infty)$ имеет место следующая оценка:

$$\varphi(z_i) \le -\delta z_i + \Delta\delta, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{59}$$

Рассмотрим систему, полученную из (54)–(56) в результате подстановки вместо функции $\varphi(.)$ значений $-\delta z_i + \Delta\delta$:

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - (2\alpha + \delta) z_1 + \alpha z_2 + \Delta\delta, \quad t \in [0, +\infty), \tag{60}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - (2\alpha + \delta) z_i + \alpha z_{i+1} + \Delta\delta, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{61}$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (2\alpha + \delta) z_n + \alpha z_1 + \Delta\delta, \quad t \in [0, +\infty). \tag{62}$$

Замечание 1. Несложно заметить, что правая часть неравенства (59) является линеаризацией функции $\varphi(.)$ в окрестности точки Δ. Следовательно, после линеаризации функции $\varphi(.)$ в окрестности точки Δ система дифференциальных уравнений (54)–(56) преобразуется в систему дифференциальных уравнений (60)–(62).

Несложно проверить, что с помощью замены $\bar{z}_i \to z_i - \Delta$ система дифференциальных уравнений (60)–(62) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - (2\alpha + \delta) z_1 + \alpha z_2, \quad t \in [0, +\infty), \tag{63}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - (2\alpha + \delta) z_i + \alpha z_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{64}$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (2\alpha + \delta) z_n + \alpha z_1, \quad t \in [0, +\infty). \tag{65}$$

Система линейных дифференциальных уравнений (63)–(65) имеет единственное стационарное решение $(0, 0, \ldots, 0)$. Запишем систему (63)–(65) в матричной форме

$$\dot{z}(t) = Az, \tag{66}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -(2\alpha+\delta) & \alpha & 0 \ldots & 0 & \alpha \\ \alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha \;\; 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \;\; \alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha \\ \alpha & 0 & \ldots \;\; 0 & \alpha & -(2\alpha+\delta) \end{pmatrix},$$

$z(.) = (z_1(.), z_2(.), \ldots, z_n(.))^{\mathrm{T}}$.

Изучим собственные значения матрицы A.

4.1. Спектральные свойства матрицы A. Вопросы устойчивости линейной системы (63)–(65)

Матрица A является симметрической, и, следовательно, с ней связана некоторая квадратичная форма. Покажем, что квадратичная форма, определяемая матрицей A, будет отрицательно определенной. Для этого воспользуемся критерием Сильвестра, согласно которому квадратичная форма будет отрицательно определенной, если угловые миноры матрицы A чередуют знаки начиная с отрицательного. Вычеркнув последнюю строку и последний столбец матрицы A, получим угловой минор $(n-1)$-го порядка. Обозначим его через $|B_{n-1}|$. Итак, имеем

$$|B_{n-1}| = \begin{vmatrix} -(2\alpha+\delta) & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & -(2\alpha+\delta) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что и другие угловые миноры, порядок m которых удовлетворяет условию $3 \le m < n-1$, имеют аналогичный вид. Если разложить минор порядка m, обозначаемый через $|B_m|$, по первому столбцу и положить $|B_0| = 1$, $|B_{-1}| = 0$, то получим следующее соотношение:

$$|B_m| = -(2\alpha+\delta)|B_{m-1}| - \alpha^2|B_{m-2}|, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{67}$$

Решим разностное уравнение (67) с использованием корней характеристического уравнения

$$x^2 + (2\alpha+\delta)x + \alpha^2 = 0. \tag{68}$$

Уравнение (68) имеет два действительных корня:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} + 2\alpha + \delta\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} - (2\alpha+\delta)\right).$$

Следовательно, разностное уравнение (67) имеет следующее решение:

$$|B_m| = \frac{(-1)^m}{2^m}C_1\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} + 2\alpha + \delta\right)^m + \frac{1}{2^m}C_2\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} - (2\alpha+\delta)\right)^m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{69}$$

Для определения неизвестных констант C_1 и C_2 непосредственно вычислим определители первого и второго порядков:

$$|B_1| = -(2\alpha+\delta), \quad |B_2| = 3\alpha^2 + 4\alpha\delta + \delta^2.$$

Подставив их значения в формулу (69), получим следующую систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} -\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} + 2\alpha + \delta\right)C_1 + \left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} - (2\alpha+\delta)\right)C_2 = -2(2\alpha+\delta), \\ \left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} + 2\alpha + \delta\right)^2 C_1 + \left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} - (2\alpha+\delta)\right)^2 C_2 = 4(3\alpha^2 + 4\alpha\delta + \delta^2). \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет решение

$$C_1 = \frac{\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} + 2\alpha + \delta}{2\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}}, \quad C_1 = \frac{\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} - (2\alpha+\delta)}{2\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}}.$$

Подставив выражения для C_1 и C_2 в (69), получим

$$|B_m| = \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}}\left((-1)^m\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} + 2\alpha + \delta\right)^{m+1} + \left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2} - (2\alpha+\delta)\right)^{m+1}\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{70}$$

Так как по условию задачи $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, то несложно заметить, что $|B_m| < 0$ при нечетных значениях m и $|B_m| > 0$ при четных. Следовательно, все угловые миноры матрицы A, кроме последнего (определителя матрицы A), удовлетворяют критерию Сильвестра.

Перейдем к изучению определителя матрицы A. Как следует из постановки задачи, естественно предположить, что размерность матрицы A не меньше 4. Разложив определитель A по первому столбцу, получим

$$|A_n| = -(2\alpha+\delta)|B_{n-1}| - \alpha\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha \\ \alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & -(2\alpha+\delta) \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n+1}\alpha\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \;\ldots & 0 & \alpha \\ -(2\alpha+\delta) & \alpha & 0 \;\; 0 & \ldots & 0 \\ \alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha \;\; 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\;\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \;\alpha & -(2\alpha+\delta) & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -(2\alpha+\delta)|B_{n-1}| - \alpha^2|B_{n-2}| + (-1)^{n+1}\alpha^n + (-1)^{n+1}\alpha^n + (-1)^{2n+1}\alpha^2|B_{n-2}| =$$

$$= -(2\alpha+\delta)|B_{n-1}| - 2\alpha^2|B_{n-2}| - 2(-1)^n\alpha^n.$$

Итак, мы получили следующее соотношение:

$$|A_n| = -(2\alpha+\delta)|B_{n-1}| - 2\alpha^2|B_{n-2}| - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \ldots. \tag{71}$$

Учитывая (67), соотношение (71) можно переписать в виде

$$|A_n| = |B_n| - \alpha^2|B_{n-2}| - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \ldots. \tag{72}$$

Подставив в правую часть (72) вместо $|B_n|$ и $|B_{n-2}|$ соответствующие выражения из (70) и сгруппировав слагаемые, получим

$$|A_n| = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}}\left[\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}+2\alpha+\delta\right)^2-\alpha^2\right)(-1)^{n-2}\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}+2\alpha+\delta\right)^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}-(2\alpha+\delta)\right)^2-\alpha^2\right)\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}-(2\alpha+\delta)\right)^{n-1}\right] - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \ldots$$

После несложных преобразований данное выражение можно привести к следующему виду:

$$|A_n| = \frac{1}{2^n}\left[\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}+\delta+2\alpha\right)^n(-1)^{n-2} + \left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}-\delta-2\alpha\right)^n\right] - 2(-1)^n\alpha^n, \quad n = 4, 5, \ldots. \tag{73}$$

Для всех $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ правая часть соотношения (73) является непрерывной функцией от переменных α и δ. Обозначим ее через $g(\alpha, \delta)$. Вычислим производную функции $g(\alpha, \delta)$ по переменной δ:

$$\frac{\partial g(\alpha,\delta)}{\partial\delta} = \frac{1}{2^n}\left[n\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}+\delta+2\alpha\right)^{n-1}\left(\frac{2\alpha+\delta}{\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}}+1\right)(-1)^{n-2}+\right.$$

$$\left.+\,n\left(\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}-\delta-2\alpha\right)^{n-1}\left(\frac{2\alpha+\delta}{\sqrt{4\alpha\delta+\delta^2}}-1\right)\right], \quad n = 4, 5, \ldots.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial g(\alpha,\delta)}{\partial\delta} > 0 \quad \text{при четных } n$$

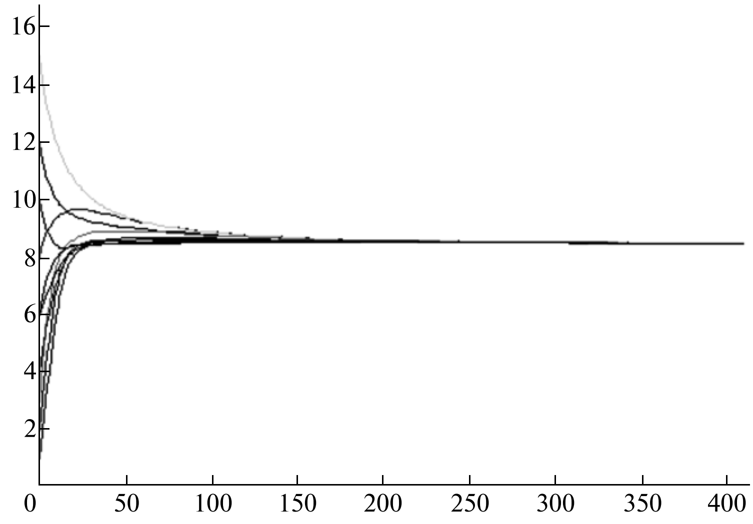
и

$$\frac{\partial g(\alpha,\delta)}{\partial\delta} < 0 \quad \text{при нечетных.}$$

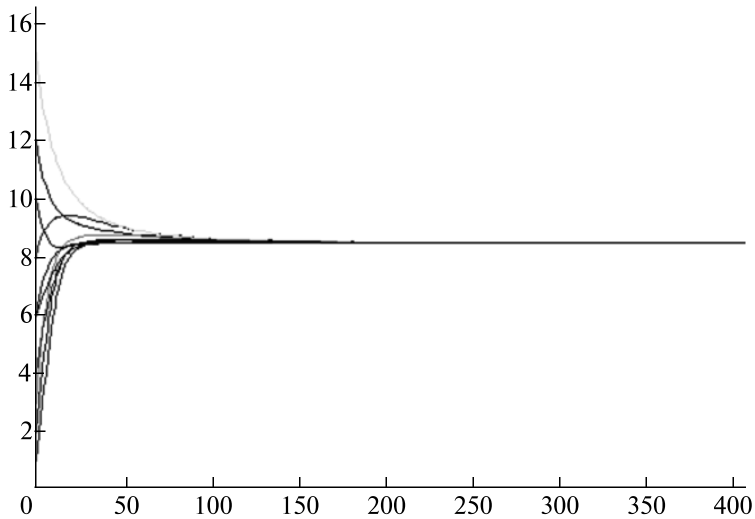
Кроме того,

$$g(\alpha,\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0+.$$

Таким образом, для произвольных $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ функция $g(\alpha, \delta)$ принимает положительные значения при четных n и отрицательные значения – при нечетных. Это означает, что определитель матрицы A (угловой минор наиболее высокого порядка) принимает отрицательные значения, если размерность матрицы A нечетная, и положительные значения в случае четной размерности. Ранее было показано, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ все угловые миноры матрицы A меньшего порядка удовлетворяют критерию Сильвестра отрицательной определенности квадратичной формы, заданной матрицей A. Итак, полученные результаты сформулируем в виде следующего предложения.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

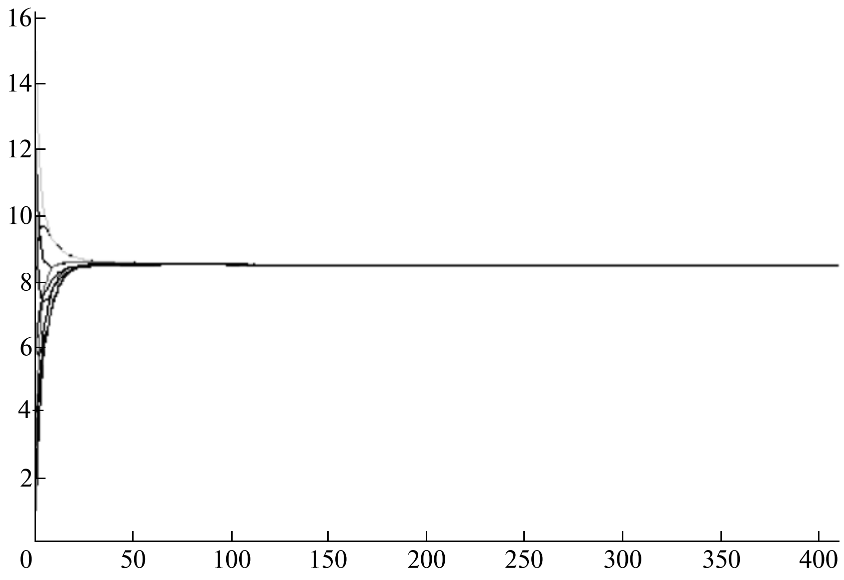
Предложение 1. *Для произвольных* $\alpha > 0$, $\delta > 0$ *собственные значения матрицы* A *являются отрицательными.*

Доказательство. Выше было показано, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ квадратичная форма, определенная матрицей A, является отрицательно определенной. Следовательно, собственные значения матрицы A являются отрицательными.

Вернемся к линейной системе (60)–(62) и сформулируем следующее предложение.

Предложение 2. *Для произвольных* $\alpha > 0$, $\delta > 0$ *стационарное решение* $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$ *линейной системы* (60)–(62) *является глобально устойчивым.*

Доказательство. Из предложения 1 следует, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ стационарное решение $(0, 0, \ldots, 0)$ линейной системы (66) является глобально устойчивым. Напомним, что линейная система (66) была получена из линейной системы (60)–(62) с помощью замены $\overline{z}_i \to z_i - \Delta$. Сделав обратную замену, мы получим, что для произвольных $\alpha > 0$, $\delta > 0$ стационарное решение $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$ линейной системы (60)–(62) глобально устойчиво.



Фиг. 7.

Теорема 10. *Стационарное решение* $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$ *нелинейной системы дифференциальных уравнений* (54)–(56) *локально устойчиво по Ляпунову по первому приближению.*

Доказательство следует из замечания 1 и глобальной устойчивости стационарного решения $(\Delta, \Delta, \ldots, \Delta)$ линейной системы дифференциальных уравнений (60)–(62).

4.2. Об ограниченных решениях нелинейной системы (54)–(56)

Вернемся к изучаемой системе нелинейных дифференциальных уравнений (54)–(56) и установим связь между свойствами ее решений и решений линейной системы дифференциальных уравнений (60)–(62).

Лемма 4. *Если* $\{\bar{z}_i(.)\}_{i=1}^n$ *является решением нелинейной системы* (54)–(56), *а* $\{\bar{\bar{z}}_i(.)\}_{i=1}^n$ *является решением линейной системы* (60)–(62) *и для каждого* $i = 1, \ldots, n$ *выполняется условие* $\bar{z}_i(t_0) = \bar{\bar{z}}_i(t_0)$, *то для каждого* $i = 1, \ldots, n$, $t > t_0$ *имеет место неравенство* $\bar{z}_i(t) \le \bar{\bar{z}}_i(t)$.

Доказательство следует из структуры правых частей систем дифференциальных уравнений (54)–(56), (60)–(62) и неравенства (59).

Покажем, что решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (54)–(56) является ограниченным сверху.

Лемма 5. *Всякое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений* (54)–(56) *ограничено сверху. Более того, асимптотически оно ограничено значением* Δ.

Доказательство следует из предложения 2 и свойств леммы 4.

Покажем, что решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (54)–(56) является также ограниченным снизу.

Лемма 6. *Пусть* $\{\bar{z}_i(.)\}_{i=1}^n$ *является решением системы нелинейных дифференциальных уравнений* (54)–(56), *причем,* $\bar{z}_i(\bar{t}) > 0$ *для каждого* $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для произвольного* $t > \bar{t}$ *имеют место неравенства* $\bar{z}_i(t) \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство следует из структуры правых частей системы дифференциальных уравнений (54)–(56). Действительно, пусть в некоторый момент времени одна из компонент решения системы дифференциальных уравнений (54)–(56) первой оказалась равной нулю, т.е. для некоторого $\tilde{t} > \bar{t}$ выполняются условия: существует $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $\bar{z}_m(\tilde{t}) = 0$, и при этом $\bar{z}_i(\tilde{t}) \ge 0$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда из (54)–(56) следует, что $\dot{\bar{z}}_m(\tilde{t}) \ge 0$ и, следовательно, $\bar{z}_m(t) \ge 0$ при $t > \tilde{t}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для случаев, когда равными нулю становятся одновременно несколько компонент решения системы дифференциальных уравнений (54)–(56) (в том числе когда равными нулю становятся одновременно все компоненты решения).

Итак, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 11. *Для произвольных* $\alpha > 0$, $\delta > 0$ *всякое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений* (54)–(56) *с координатами начального значения, большими нуля, ограничено. Более того, каждая координата решения снизу ограничена нулем, а сверху асимптотически стремится к значению* Δ.

Доказательство следует из леммы 5 и леммы 6.

4.3. Область устойчивости нелинейной системы (54)–(56). Численные эксперименты

В п. 4.1 было показано, что стационарное решение $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ нелинейной системы дифференциальных уравнений (54)–(56) локально устойчиво (теорема 10). Для определения области устойчивости указанного решения система дифференциальных уравнений (54)–(56) была решена численно с помощью метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Результаты численных экспериментов сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Для любых* $\alpha > 0$, $\delta > 0$ *областью устойчивости стационарного решения* $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ *системы нелинейных дифференциальных уравнений* (54)–(56) *является положительный ортант, т.е. всякое решение системы дифференциальных уравнений* (54)–(56) *с положительными координатами начального значения сходится к стационарному решению* $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$.

Таким образом, если координаты начального значения больше нуля, то график решений системы дифференциальных уравнений (54)–(56) будет таким, как на фиг. 5.

На данной фигуре представлен график решений нелинейной системы (54)–(56) при $n = 10$, $\alpha = 1$, $\delta = 0.5$, $\Delta = 8.5$.

Численные эксперименты также показали, что как с увеличением значения δ, так и с увеличением значения α решения нелинейной системы (54)–(56) раньше выходят на стационарный режим. Например, ниже на фиг. 6 и 7 представлены графики решений системы (54)–(56) при $\alpha = 1$, $\delta = 1$ и $\alpha = 5$, $\delta = 0.5$ соответственно.

4.4. Решения типа бегущей волны исходной системы (45), (46)

Напомним, что мы занимаемся поиском решений типа бегущей волны системы (45)–(46). Показано, что всякое решение типа бегущей волны системы (45), (46) является периодическим (лемма 2), а компоненты такого решения с номерами $1, 2, \dots, n$ являются решениями типа бегущей волны конечномерной нелинейной системы (54)–(56) (т.е. удовлетворяют системе (54)–(58)). Было исследовано множество всех решений нелинейной системы (54)–(56) (т.е. не только решения типа бегущей волны, удовлетворяющие условиям (57), (58) и являющиеся периодическими). В п. 4.2 были найдены условия, при выполнении которых решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (54)–(56) являются ограниченными (теорема 11). В предыдущем пункте с помощью численных экспериментов была определена область устойчивости стационарного решения (утверждение 1). Из теоремы 11 и утверждения 1 следует, что всякое ограниченное решение системы дифференциальных уравнений (54)–(56) с положительными координатами начального значения сходится к стационарному решению $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$. Следовательно, других периодических решений, кроме стационарного решения, $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$ система дифференциальных уравнений (54)–(56) с положительными координатами начального значения не имеет. Это, в свою очередь, означает, что система (54)–(58) с положительными координатами начального значения, кроме стационарного решения $(\Delta, \Delta, \dots, \Delta)$, не имеет других решений. Таким образом, исходная система (45)–(46) с положительными координатами начального значения имеет единственное решение типа бегущей волны, а именно стационарное решение $(\dots, \Delta, \Delta, \dots, \Delta, \dots)$.

В заключение отметим направление развития данной модели. Напомним, что одним из предположений данной модели является неограниченность емкостей перегонных путей. Полученные выводы будут справедливы и при достаточно больших емкостях перегонных путей, что на практике не всегда выполнимо. В связи с этим возникают следующие вопросы: существуют ли режимы грузоперевозок, позволяющие организовать контролируемый грузопоток при ограниченных емкостях перегонных путей и каким образом эти режимы (если они существуют) зависят от емкостей перегонных путей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л.В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
2. *Канторович Л.В., Гавурин М.К.* Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта: Сб. научных статей. М.: Изд-во АН СССР. 1949. С. 110–138.
3. *Данциг Дж., Вольф Ф.* Алгоритм разложения для задач линейного программирования // Математика: Сб. переводов. 1964. Т. 8. № 1. С. 151–160.
4. *Лурье А.Л.* Алгоритм решения сетевой транспортной задачи с ограничением пропускных способностей методом условно-оптимальных планов // Материалы конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭММ в планировании. Новосибирск, 1962. С. 3–13.
5. *Авен О.И., Ловецкий С.Е., Моисеенко Г.Е.* Оптимизация транспортных потоков. М.: Наука, 1985.
6. *Галабурда В.Г.* Совершенствование технологии перевозок и увеличение пропускной способности железных дорог. М.: МИИТ, 1983.
7. *Галабурда В.Г.* Оптимальное планирование грузопотоков. М.: Транспорт, 1985.
8. *Козовский И.Г.* Рационализация перевозок грузов на железных дорогах. М.: Транспорт, 1977.
9. *Хачатрян Н.К.* Динамическая модель транснациональных грузоперевозок. Препринт : WP/2002/145. М.: ЦЭМИ РАН.
10. *Хачатрян Н.К.* О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. 2003. № 3. С.137–149.
11. *L.A. Beklaryan, N.K. Khachatryan.* Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional different. equations. 2006. V. 13. № 2. P. 125–155.
12. *Бекларян Л.А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Изд-во Факториал, 2007.