Математика
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2007, № 2, с. 165–168

УДК 519.17

ГРАНИЧНЫЕ КЛАССЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ В КЛАССЕ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

Д.С. Малышев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vestnik_nngu@.mail.ru

Поступила в редакцию 16.02.2007

Известно, что задача о независимом множестве для планарных графов NP-полна. Доказывается её полиномиальная разрешимость для некоторых подклассов класса планарных графов.

Введение

Независимым множеством в обыкновенном графе называется множество попарно несмежных вершин. Задача о независимом множестве для данного графа состоит в нахождении независимого множества наибольшей мощности. Для краткости задачу о независимом множестве будем называть *задачей НМ*. Хорошо известно, что эта задача является NP-полной в классе всех графов и остаётся таковой даже при значительных сужениях рассматриваемого класса графов. В тоже время известны и некоторые «области эффективности», т.е. классы графов, для которых задача о независимом множестве имеет полиномиальную сложность.

Класс графов **K** называется *НМ-простым*, если существует алгоритм, решающий эту задачу для любого графа $G\in$ **K** за полиномиальное время и *НМ-сложным*, если для графов этого класса задача НМ остаётся NP-полной [2]. В литературе имеется множество примеров как НМ-простых, так и НМ-сложных классов. Так, класс планарных графов **Planar** является НМ-сложным [1].

Класс графов **X** называется *наследственным*, если он замкнут относительно изоморфизма и удаления вершин и *сильно наследственным*, если он замкнут ещё и относительно удаления рёбер. Любой наследственный класс (и только наследственный класс) графов **X** может быть задан множеством запрещённых порождённых подграфов **S**: **X** состоит из тех и только тех графов, которые не имеют порождённых подграфов из **S**. В этом случае принята запись **X**=*Free*(**S**). Если **S** является конечным, то такой наследственный класс называется *конечно определённым***.**

В [4] дано определение *граничного класса* и доказано, что конечно определённый класс графов является НМ-сложным тогда и только тогда, когда в нём содержится какой-нибудь граничный класс. В этой работе вводится более широкое понятие относительного граничного класса. Наследственный класс графов **X** назовём *предельным классом относительно наследственного класса* **Y** (или *предельным относительно* **Y**), если существует такая последовательность $\mathbf{X_1}\supseteq\mathbf{X_2}\supseteq\ldots$ НМ-сложных классов, содержащихся в классе **Y**, что $\bigcap_n X_n=\mathbf{X}$. Минимальный по включению предельный относительно **Y** класс назовём *граничным относительно* **Y** классом. Из последнего определения следует, что $\mathbf{X}\subseteq\mathbf{Y}$. Класс **X** назовём *конечно определённым относительно наследственного класса* **Y**, если существует такое конечное множество графов **M**, что $\mathbf{X}=\mathbf{Y}\cap Free(\mathbf{M})$. Для относительных граничных классов легко доказывается обобщение теоремы 3 из работы [2], а именно, относительный конечно определённый класс графов является НМ-сложным тогда и только тогда, когда в нём содержится какой-нибудь относительный граничный класс.

Триодом T_{ijk} называется дерево, имеющее ровно одну вершину степени три и ровно три листа, отстоящих от вершины степени три на расстояниях i,j,k соответственно. Пусть **T** – класс всех графов, у которых каждая из компонент связности является деревом не более чем с тремя листьями. Иными словами, класс **T** состоит только из тех графов, у которых каждая из компонент является либо триодом, либо простым путем. В работе [2] доказано, что **T** является граничным классом, а если $P\neq NP$, то **T** – единственный сильно наследственный граничный класс. Возможно, **T** – единственный граничный класс не только среди сильно наследственных. Доказательство этого предположения равносильно доказательству того, что для любого графа $G\in$ **T** класс *Free(G)* является НМ-простым. К настоящему времени это доказано для графов с не более чем с 5 вершинами из **T** (за исключением P_5 и графов вида pK_2+qK_1). Таким образом, вопрос о единственности **T** как граничного класса оказался сложным.

В настоящей работе рассматривается класс планарных графов. Класс **T** является граничным относительно **Planar**. Доказательство этого легко получить по аналогии с доказательством теоремы 4 из [2]. Возможно, что **T** – единственный граничный класс относительно **Planar**. Это утверждение пока не доказано, но в его исследовании удалось продвинуться значительно дальше, чем в исследовании аналогичного предположения для класса всех графов. Именно, в настоящей работе доказывается НМ-простота класса **Planar**$\cap Free(T_{11i})$ для любого натурального i.

Определения и вспомогательные результаты

Предположим, что имеется планарный граф G и он задан в виде своей плоской укладки. Определим понятие *глубины* графа G. Из плоской укладки графа G удалим вершины с инцидентными им ребрами, принадлежащие внешней грани. Множество этих вершин обозначим через V_1. С оставшейся укладкой будем проделывать аналогичную операцию до тех пор, пока множество вершин не станет пустым. В результате мы получим разбиение множества вершин графа на подмножества $V_1,V_2,\ldots,V_k$ которые будем называть *уровнями* графа. Величину k назовём *глубиной* графа G и будем обозначать g (G).

Разделяющая клика графа – множество вершин, порождающее полный подграф, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности. Назовём *C-блоком* максимальный по включению порождённый подграф данного графа, не имеющий разделяющей клики. Пусть **K** – некоторый класс графов, тогда обозначим через $[\mathbf{K}]_c$ множество всех графов, у которых каждый *C*-блок принадлежит **K**. В дальнейшем, понадобятся две операции над классами графов, которые сохраняют свойство НМ-простоты. Первая из этих операций – переход от класса **K** к классу $[\mathbf{K}]_c$. Оказывается, что справедливо следующее утверждение [2].

Лемма 1. Если **X** – НМ-простой наследственный класс графов, то $[\mathbf{X}]_c$ также является НМ-простым.

Второй операцией является переход от класса графов **K** к классу графов $[\mathbf{K}]_r$, представляющему собой множество всех графов, для которых можно удалить не более r вершин так, чтобы получился граф из **K**. Имеет место следующее утверждение [3].

Лемма 2. Если **K** – НМ-простой наследственный класс, то для любого фиксированного r класс $[\mathbf{K}]_r$ является НМ-простым.

Лемма 3. Если G - связный граф и G не принадлежит классу $Free(T_{1,1,i})$ ($i\geq 3$), то либо $G\in Free(T_{111})$, либо $diam(G)<2i+3$.

Доказательство. Предположим, что G не принадлежит классу $Free(T_{111})$, тогда граф G содержит в качестве порождённого граф T_{111}. В этом порождённом подграфе вершины степени 1 обозначим через a, b, c, а вершину степени 3 обозначим через d. Рассмотрим вершину e, наиболее удалённую от d, и кратчайший простой путь $P=(v_1, v_2,\ldots, v_s)$, где $v_1 = d$, $v_s = e$. Покажем, что $s\leq i+2$. Предположим, что $s>i+2$. Возможны два случая.

1. Одна из вершин a, b, c принадлежит этому пути. Пусть для определённости это вершина c (т.е. $v_2 = c$). Рассмотрим вершину a. Вершина a не может быть смежна с вершиной v_i, где $i\geq 4$ (иначе в графе G существовал бы более короткий путь из d в e, чем путь P). То же верно для вершины b. Если ни одна из вершин a, b не смежна с вершиной v_3, то граф G содержит порождённый T_{11i} (порождён множеством вершин a, b и вершинами пути P. Если хотя бы одна из вершин a, b смежна с вершиной v_3 (пусть для определённости это вершина a), то граф G опять содержит порождённый T_{11i} (порождён множеством вершин a, c и вершинами v_3, v_4, …, v_s).

2. Пусть ни одна из вершин a, b, c не принадлежит P. По тем же причинам, что и в пункте 1, ни одна из вершин a, b, c не смежна с такой вершиной v_i, что $i\geq 4$. Если одна из вершин a, b, c смежна с вершиной v_3 (пусть это будет вершина a), то в G найдётся порождённый T_{11i} (порождён вершинами a, b, c, d, v_3, …, v_s). Если две из вершин a, b, c смежны с вершиной v_3 (пусть это вершины a и b), то в G имеется порождённый T_{11i}. (порождён вершинами
a, b, v_3, …, v_s). Остаётся рассмотреть случай, когда ни одна из вершин a, b, c не смежна с v_3. Понятно, что если не более чем одна из вершин a, b, c смежна с v_2, то в графе G найдётся порождённый T_{11i}. Предположим, что среди

этих трех вершин не менее двух (пусть это будут a и b) смежны с v_2. Тогда G содержит порождённый T_{11i} (порождён множеством вершин a, b и вершинами $v_2, \ldots, v_s$). Получаем противоречие с условием леммы. Мы показали, что неравенство $d(d, e) \le i+1$ является справедливым, для любой вершины e. Ввиду неравенства треугольника для любых двух вершин x, y имеем $d(x,y) \le d(x,D)+d(y,D) \le 2i+2$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если G – связный граф и $G \in$ **Planar** $\cap$ $Free(T_{11i})$ $(i \ge 3)$, $g(G)<2i+3$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что если G – связный граф и $G \in$ **Planar** $\cap$ $Free(T_{11i}) \backslash Free(T_{111})$ $(i \ge 3)$, то $diam(G)<2i+3$. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_{g(G)}$ – все уровни графа G. Рассмотрим простой путь P^*, соединяющий произвольную вершину из V_1 с произвольной вершиной из V_k (в силу связности G такой путь всегда найдётся). Пусть $|P^*|$ – длина этого пути, тогда ясно, что $2i+3>diam(G) \ge |P^*| \ge g(G)$, отсюда и следует, что $g(G)<2i+3$.

Лемма 5. Класс планарных графов единичной глубины является НМ-простым.

Доказательство. Утверждение леммы 5 следует из леммы 1, т.к. граф единичной глубины с более чем двумя вершинами, не имеющий разделяющих клик – это, очевидно, простой цикл.

Если G не содержит разделяющих клик, а V_1 – первый уровень графа G, то граф, порождённый множеством V_1, является простым циклом. Для каждой вершины $x \in V(G) \backslash V_1$ определим множество $N(x,V_1)$ всех вершин из V_1, смежных с x. Пусть $deg(x,V_1)$ – мощность множества $N(x,V_1)$. Для каждой вершины $x \in V(G) \backslash V_1$ определим величину $m(x)$ как максимальное количество последовательных вершин из V_1, не смежных с x.

Лемма 6. Пусть $g(G)>1$ и G не содержит разделяющих клик, а V_1 – первый уровень графа G. Тогда, если для некоторой вершины $x \in V(G) \backslash V_1$ выполнено неравенство $deg(x,V_1)>5$, то $m(x)<i+1$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют такие последовательно стоящие в первом уровне вершины $a, v_1, \ldots, v_{i+1}, b$, что x смежна с вершинами a и b и несмежна ни с одной из вершин v_k $(k=1, i+1)$. Поскольку $\deg(x,V_1)>5$, то в $N(x,V_1)$ существуют такие вершины c и d, что вершины a,c,d являются попарно несмежными, но при этом в G будет содержаться порождённый T_{11i}. (Порождён множеством вершин a,c,d,x и некоторыми из вершин $v_1, \ldots, v_{i+1}$).

Доказательство основного результата

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Для любого натурального i класс **Planar** $\cap$ $Free(T_{11i})$ является НМ-простым**.**

Докажем сначала вспомогательный результат. Обозначим через $\mathbf{Q_{ir}}$ подмножество класса **Planar** $\cap$ $Free(T_{11i})$, состоящее из графов глубины не более чем r.

Лемма 7. Для любых натуральных i и r класс $\mathbf{Q_{ir}}$ является НМ-простым.

Доказательство. Известно [4, 5], что классы $Free(T_{11i})$ при $i=1, 2$ являются НМ-простыми. Отсюда следует НМ-простота рассматриваемых классов $\mathbf{Q_{ir}}$ при $i=1, 2$ и любых r.

Пусть $i \ge 3$. Доказательство проведем индукцией по r. Класс $\mathbf{Q_{i1}}$ является НМ-простым ввиду леммы 5.

Пусть G – связный граф из $\mathbf{Q_{ir}}$. Если $G \in Free(T_{111})$, то задача НМ для графа G полиномиально разрешима. Поэтому будем считать, что $G \in \mathbf{Q_{ir+1}} \backslash Free(T_{111})$. Ввиду леммы 1 можно считать, что G не содержит разделяющих клик. Из леммы 3 следует, что $diam(G)<2i+3$. Пусть V_1 – первый уровень графа G. Если $|V_1| \le 2i+3$, то $G \in [\mathbf{Q_{ir}}]_{2i+3}$. Из леммы 2 следует, что класс $[\mathbf{Q_{ir}}]_{2i+3}$ НМ-простой. Далее будем считать, что $|V_1|>2i+3$. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_t$ – все вершины из V_1 и пусть они покрашены в чёрный цвет. Рассмотрим вершины v_1 и $v_{[t/2]}$. Пусть P – путь из v_1 в $v_{[t/2]}$ длины меньшей, чем $2i+3$. Рассмотрим всевозможные независимые множества подграфа, порождённого множеством вершин этого пути. Для каждого такого множества S рассмотрим граф $G^*(S)$, порождённый множеством вершин $V(G) \backslash (N(S) \cap V(P))$, где $V(P)$ – множество вершин подграфа, порождённого вершинами из P, $N(S)$ – множество тех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной вершиной из множества S. Зная решение задачи НМ для графов $G^*(S)$ для всех S, можно за время $O(1)$ найти решение задачи НМ для графа G. Пусть $G_1(S), \ldots, G_p(S)$ – компоненты связности графа $G^*(S)$, которые содержат чёрные вершины и имеют глубину, равную r+1 (остальные компоненты принадлежат классу $\mathbf{Q_{ir}}$). Если множество S содержит такую вершину x, что $\deg(x,V_1)>5$, то ввиду леммы 6 каждый из этих графов содержит не более чем i+1 чёрную вершину, а следовательно, каждый из них принадлежит НМ-простому классу $[\mathbf{Q_{ir}}]_{i+1}$. Если такой вершины не найдется, то ясно, что $p\le 5|S|< <10i+15$. Каждый из графов $G_1(S)$, …, $G_p(S)$ содержит не более $[t/2]+1$ чёрных вершин, причём в каждом из них на первом уровне все чёрные вершины стоят последовательно. К каждому из этих графов применимы те же действия, что и к графу G (т.е. если рассматриваемый граф $G_i(S)$ ($i=1,\ldots,p$) не принадлежит ни классу $Free(T_{111})$, ни классу $[\mathbf{Q_{ir}}]_{2i+3}$, то концы пути P_i следует выбирать по следующему правилу – на первом уровне графа $G_i(S)$ такие две вершины, что одна из них является чёрной, делящей последовательно стоящие чёрные вершины на две «дуги», отличающиеся не более чем на одну вершину.)

Таким образом, всю процедуру решения задачи НМ для графа G можно изобразить в виде дерева решений. Листья этого дерева соответствуют графам из классов $[\mathbf{Q_{ir}}]_{2i+3}\backslash Free(T_{111})$, $Free(T_{111})$, а внутренние узлы соответствуют графам, содержащим не менее $2i+3$ черных вершин и имеющих глубину, равную k+1 и не принадлежащих классу $Free(T_{111})$. Поскольку множество черных вершин каждый раз делится на две почти равные части, то высота данного дерева ограничена сверху величиной $[\log_2(n)]+1$.

Оценим в дереве решений общее количество внутренних узлов. Каждый внутренний узел имеет не более чем $c=(10i+15)2^{2i+3}$ непосредственных потомков, являющихся внутренними узлами, следовательно, общее количество внутренних узлов в дереве решений не превосходит $c^{[\log_2(n)]+2}$, т.е. ограничено полиномом от n. Общее число потомков каждого внутреннего узла, являющихся листьями, не превосходит n, следовательно, число узлов в дереве решений ограничено сверху полиномом от n. Лемма 7 доказана.

Утверждение теоремы 1 следует из леммы 7, поскольку в силу леммы 4, класс $\mathbf{Planar}\cap \cap Free(T_{11i})$ является подмножеством объединения классов $Free(T_{111})$ и $\mathbf{Q_{i2i+3}}$..

Список литературы

BOUNDARY CLASSES FOR THE INDEPENDENT SET PROBLEM IN THE CLASS OF PLANAR GRAPHS

D.S. Malyshev

The Independent Set Problem for planar graphs is known to be NP-complete. In this paper, its polynomial solvability for some subclasses of planar graphs is proved.

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.

2. Alekseev V.E. On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. 2004. V. 132. P. 17–26.

3. Алексеев В.Е., Коробицын Д.В. О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискретная математика. 1992. Т. 4. № 4. С. 34–40.

4. Minty.G.J. On maximal independent sets in claw-free graphs // J. Combin Theory Ser. 1980. V. 28. P. 284–304.

5. Алексеев. В.Е. Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольшего независимого множества в графах без вилок // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Серия 1. Т. 6. № 4.