федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Прикладная математика-1»

М.М.Деркач, А.М.Филимонов, Д.А.Филимонов

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве методических указаний для
студентов, обучающихся по специальности
«Прикладная математика и информатика»

Москва – 2013

УДК 517.95
Д36

Деркач М.М.,Филимонов А.М., Филимонов Д.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Уравнения математической физики». — М.: МИИТ, 2013. — 36 с.

В настоящем выпуске помещены методические указания к проведению практических занятий по по разделу «Обобщенные решения дифференциальных уравнений» дисциплины «Уравнения математической физики». При решении задач этого раздела студенты сталкиваются с большими трудностями. Настоящие методические указания имеют своей целью помочь студентам преодолеть эти трудности путем подробного разбора ряда примеров. Для этого некоторое число задач взято из задачника [4], часть задач — из [1] и [2]. Помимо этого, использовались задачи из методических указаний к решению задач по дисциплине: «Уравнения математической физики.» Выпуск 2, изд. МИИТ, 1984. 32 с., (Мышкис А.Д., Филимонов А.М.). Некоторые задачи являются оригинальными. Более сложные задачи, отмеченные звездочкой, могут служить основой для УИРС.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика».

Содержание

Введение

В настоящем выпуске помещены методические указания к решению задач по разделу «Обобщенные решения дифференциальных уравнений» дисциплины «Уравнения математической физики». Теоретический материал по этому разделу можно найти в учебниках [1] и [2], большое количество задач по обобщенным решениям имеется в задачниках [3] и [4]. Однако при решении задач этого раздела студенты сталкиваются с определенными трудностями. Настоящие методические указания имеют своей целью помочь студентам преодолеть эти трудности путем разбора отдельных задач. Для этого довольно большое число задач взято из задачника [4], часть задач — из [1] и [2]. Некоторые задачи являются оригинальными. Более сложные задачи, отмеченные звездочкой, могут служить основой для УИРС.

Под обобщенными решениями уравнений в настоящем выпуске понимаются решения в смысле обобщенных функций, которые трактуются как линейные непрерывные функционалы на пространстве основных функций. Другие подходы к понятию обобщенного решения в этом выпуске не рассматриваются.

В настоящих методических указаниях напоминаются лишь некоторые из основных определений, поскольку предполагается одновременное использование учебников [1] или [2].

1 Пространство основных функций.

Напомним [1], что пространством $D(\mathbb{R})$ основных функций называется множество бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, в котором введена сходимость следующим образом. Говорят, что последовательность основных функций φ_n сходится к функции φ в смысле пространства $D(\mathbb{R})$ (это будем обозначать так: $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если

1. существует отрезок $[-a, a]$, общий для всех функций этой последовательности, вне которого все $\varphi_n(x)$ равны нулю.

2. для любого $\alpha = 0, 1, \ldots$ последовательность функций $D^\alpha \varphi_n$ равномерно на $[-a, a]$ сходится к функции $D^\alpha \varphi$ (равномерности по α не требуется).

Здесь через $D^\alpha \varphi$ обозначена производная порядка α от функции φ и $D^0 \varphi = \varphi$.

Заметим, что эти понятия сохраняют смысл и в случае, когда x — точка m-мерного пространства. Тогда $[-a, a]$ есть m-мерный куб, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — мультииндекс, а символ D^α означает

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}};$$

соответствующее пространство основных функций обозначается $D(\mathbb{R}^m)$.

В [1] показывается, что такую сходимость «в смысле D» нельзя ввести с помощью понятия метрики, т.е. нельзя так определить расстояние на множестве финитных бесконечно дифференцируемых функций, чтобы сходимость в смысле этого расстояния соответствовала бы сходимости «в смысле D». Однако такую сходимость можно ввести с помощью некоторой топологии (о понятии линейного топологического пространства можно прочитать в учебниках [5] и [6]).

Чтобы понять, как это делается, рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.1. Пусть в линейном пространстве A_0 финитных непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ введена система окрестностей нуля по следующему правилу:

$$\Omega_g(0) = \{\varphi \in A_0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| < g(x)\}$$

Здесь $g(x)$ — непрерывная положительная функция, а через $\Omega_g(0)$ обозначена окрестность нуля, задаваемая функцией g.

Система окрестностей нуля задается с помощью всевозможных непрерывных функций g. Легко проверить, что при этом выполняются все свойства системы окрестностей. (О задании топологии с помощью системы окрестностей можно прочитать в [6]).

Как известно [6], последовательность $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ элементов топологического пространства сходится к элементу t_0, если для любой окрестности $\Omega(t_0)$ элемента t_0 найдется такое натуральное число N, что для каждого $n > N \Rightarrow t_n \in \Omega(t_0)$.

Требуется доказать, что сходимость к нулю в смысле топологии этого пространства обладает следующими свойствами:

1. Если последовательность функций $\varphi_n \xrightarrow{A_0} 0$ (так будем обозначать сходимость в смысле топологии пространства A_0), то
   а) существует отрезок $[-a, a]$, вне которого все функции последовательности $\{\varphi_n\}$ равны нулю;
   б) $\varphi_n \to 0$ равномерно на $\mathbb{R}$.

2. Обратно, если последовательность функций $\{\varphi_n\}$ обладает свойствами а) и б), то $\varphi_n \xrightarrow{A_0} 0$.

Решение. Докажем вначале свойство 2.

Пусть последовательность φ_n функций обладает свойствами а) и б). Нужно показать, что для любой непрерывной положительной функции g

$$\exists N | \forall n > N \Rightarrow \varphi_n \in \Omega_g(0)$$

Для этого положим $\varepsilon = \min\limits_{[-a,a]} g(x)$, где $[-a, a]$ — отрезок, указанный в свойстве а). Поскольку $g(x) > 0$, то $\varepsilon > 0$. В силу свойства б) найдется такой номер N, что для $n > N$ и для любого действительного числа $x \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$|\varphi_n(x)|\,\varepsilon$, а потому $|\varphi_n(x)| < g(x)$. Значит $\varphi_n \in \Omega_g(0)$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь свойство 1. Пусть $\varphi_n \xrightarrow{A_0} 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Полагая $g(x) \equiv \varepsilon$, получаем, что $\varphi_n \to 0$ равномерно на $\mathbb{R}$, т.е. свойство б) выполнено.

Для доказательство свойства а) предположим противное, т.е. что для любого $a > 0$ существуют N и x такие что $|x| > a$ и $\varphi_n(x) \neq 0$. Тогда, задав произвольно x_0, построим по индукции последовательности $\{n_k\}$ и $\{x_k\}$, $(k = 1, 2, \dots)$ так, чтобы $|x_k| > |x_{k-1}| + 1$ и $\varphi_{n_k}(x_k) \neq 0$. Перейдя к подпоследовательности, мы можем считать все x_k одного знака, для определенности, все $x_k > 0$.

Построим непрерывную функцию $g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ так, чтобы

$$g(x_k) = |\varphi_{n_k}(x_k)|\,(k = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

Например, можно исходить из формул (1) и произвести линейную интерполяцию, т.е. положить

$$g(x) = \begin{cases} |\varphi_n(x_1)|\,,\ -\infty < x \leqslant x_1, & (k = 1, 2, \dots), \\ \frac{(x_{k+1}-x)\left|\varphi_{n_k}(x_k)\right| + (x-x_k)\left|\varphi_{n_{k+1}}(x_{k+1})\right|}{x_{k+1}-x_k}, & x_k < x \leqslant x_{k+1} \end{cases}$$

Так как последовательность $\{\varphi_n\}$, начиная с некоторого $n = N$, попадает в $\Omega_g(0)$, то при $n \geqslant N$ имеем $|\varphi_n(x)| < g(x) \Rightarrow |\varphi_n(x_k)| < |\varphi_{n_k}(x_k)|$, т.е. все $n_k < N$. Но это невозможно, так как каждая из функций $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ — финитная, $\varphi_{n_k}(x_k) \neq 0$ и $x_k \to \infty$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

Задача 1.2*. В множестве всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ введем топологию с помощью системы окрестностей нуля следующим образом. Возьмем произвольное целое неотрицательное число m и произвольные непрерывные функции $g_0, \dots, g_m\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Окрестность нуля зададим с помощью числа m и системы функций

$g_0, \ldots, g_m$ так:

$$\Omega_{g_0,\ldots,g_m}(0) = \left\{\varphi \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| < g_0(x), \ldots, |\varphi^{(m)}(x)| < g_m(x)\right\},$$

где φ — финитная бесконечно дифференцируемая функция.

Доказать, что сходимость, отвечающая такой топологии, есть сходимость в смысле пространства $D(\mathbb{R})$.

Указание. См. решение задачи 1.1.

Задача 1.3*[1]. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная финитная функция, причем $\varphi_0(x) \not\equiv 0$. Ясно, что $\varphi_0 \in A_0$, где A_0 — линейное топологическое пространство, введенное в задаче 1.1. Рассмотрим в A_0 множество B вида

$$B = \left\{\varphi_k^m \,\middle|\, \varphi_k^m(x) = \frac{f_0(x)}{m} + \frac{\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)}{k},\ \forall x \in \mathbb{R}; m, k \in \mathbb{N}\right\}$$

Доказать, что функция, тождественно равная нулю, является предельной точкой этого множества (т.е. в любой окрестности нуля содержатся элементы множества B), но не существует никакой последовательности элементов множества B, сходящейся к нулю.

Решение. Пусть $[-a,\, a]$ — отрезок, вне которого $\varphi_0(x) \equiv 0$ (Такой отрезок существует с силу финитности функции φ_0).

Пусть $g\colon \mathbb{R} \to (0,\, +\infty)$ — произвольная непрерывная функция. Рассмотрим окрестность нуля $\Omega_g(0)$, задаваемую этой функцией (см. задачу 1.1), и покажем, что найдутся такие m и k, что соответствующая функция из множества B принадлежит этой окрестности. Действительно, выберем величину m так, чтобы

$$\frac{1}{m} \max_{[-a,\, a]} |\varphi_0(x)| < \frac{1}{2} \min_{[-a,\, a]} g(x).$$

Далее, поскольку вне отрезка $[a,\, a]$ функция $\varphi_0(x) \equiv 0$, то вне отрезка $[am,\, am]$ функция $\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)$ также равна нулю. Выберем

k так, чтобы

$$\frac{1}{k}\max_{[-ma,\, ma]}\left|\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)\right| < \frac{1}{2}\min_{[-ma,\, ma]} g(x).$$

Тогда очевидно, что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$|\varphi_k^m(x)| = \left|\frac{1}{m}\varphi_0(x) + \frac{1}{k}\varphi_0\left(\frac{x}{m}\right)\right| < g(x),$$

так что $\varphi_k^m \in \Omega_g(0)$.

В силу произвольности g получаем, что функция $\varphi(x) \equiv 0$ предельна для множества B.

Предположим теперь, что существует последовательность $\left\{\varphi_{k_j}^{m_j}\right\}$, которая сходится к нулю в топологии пространства A_0.

Так как нетрудно проверить, что все $\varphi_k^m(x) \not\equiv 0$ и потому никакой член последовательности $\left\{\varphi_{k_j}^{m_j}\right\}$ не может повторяться в ней бесконечное число раз, то $m_j + k_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Если множество $\{m_j\}$ конечное, то после перехода к подпоследовательности можно считать, что $m_1 = m_2 = \dots$. Но тогда $k_j \to \infty$ и потому последовательность функций $\{\varphi_k^m\}$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходится к функции $\frac{1}{m_1}\varphi_0$, а не к нулю. Если же множество $\{m_j\}$ бесконечное, то последовательность $\left\{\varphi_{k_j}^{m_j}\right\}$ также не может сходиться к нулю в топологии пространства A_0, так как в этом случае не существует отрезка, общего для всех функций $\left\{\varphi_{k_j}^{m_j}\right\}$, вне которого все они равны нулю (см. задачу 1.1).

Следствие. Пространство A_0 не метризуемо, т.е. на множестве непрерывных финитных функций нельзя ввести понятие расстояния так, чтобы сходимость в смысле этого расстояния отвечала бы сходимости в смысле топологии, введенной в задаче 1.1. Неметризуемость пространства A_0 вытекает из задачи 1.3, так как приведенный в ней пример показывает, что в A_0 не выполняется первая аксиома счетности (см. [5]).

Задача 1.4. Показать, что при любом $a > 0$ функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{a^2-x^2}},\ |x| < a, \\ 0,\ |x| \geqslant a \end{cases}$$

принадлежит пространству $D(\mathbb{R})$.

Задача 1.5. Показать, что функция

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{\int\limits_{|x|}^{1} e^{-\frac{1}{|s|-s^2}}}{\int\limits_{0}^{1} e^{-\frac{1}{s-s^2}}},\ |x| < 1, \\ 0,\ |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

принадлежит $D(\mathbb{R})$, причем $\mu(0) = 1, \mu'(0) = \mu''(0) = \cdots = 0$.

Задача 1.6. Показать, что при любом $a > 0$ функция $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{a^2-x_1^2-x_2^2}},\ x_1^2 + x_2^2 < a^2, \\ 0,\ x_1^2 + x_2^2 \geqslant a^2. \end{cases}$$

Задача 1.7. Пусть дана некоторая фиксированная функция $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_k\}$, где

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x).$$

Сходится ли эта последовательность в $D(\mathbb{R})$?

Решение. Воспользуемся определение сходимости в $D(\mathbb{R})$. Во-первых, носитель всех φ_k один и тот же. Далее, ясно, что для любого $x \in \mathbb{R}$ функции φ_k стремятся к 0, т.е. предельная функция в смысле поточечной сходимости есть тождественный нуль. Покажем, что 0 (нулевая функция) есть предел последовательности φ_k в смысле D. В самом деле $\max\limits_{(-\infty,+\infty)} \left|\varphi_k^{(m)}(x)\right| = \frac{1}{k} \max\limits_{\mathrm{supp}\varphi} \left|\varphi^{(m)}(x)\right|$, поэтому $\varphi_k^{(m)} \to 0$ равномерно на $\mathbb{R}$ при каждом фиксированном m. Значит $\varphi_k \xrightarrow{D} 0$.

Задача 1.8. Пусть дана фиксированная функция $\varphi \in D(\mathbb{R})$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_k\}$, где

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx).$$

Сходится ли она в $D(\mathbb{R})$?

Решение. Ясно, что предельная функция в смысле поточечной сходимости есть 0. Поэтому, если предел в D существует, то он должен быть функцией, тождественно равной нулю. Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi(x) \not\equiv 0$. Тогда существует такая точка x_0, что $\varphi'(x_0) \neq 0$. Обозначив $x_k = \frac{x_0}{k}$, получим

$$\varphi_k'(x_k) = \varphi_k'\left(\frac{x_0}{k}\right) = \varphi'(x_0) = \mathrm{const} \neq 0.$$

Поэтому равномерной сходимости $\varphi_k'(x)$ к нулю нет. Значит, последовательность φ_k не сходится к нулю в D, а потому и вообще предела в D не имеет. Если же $\varphi(x) \equiv 0$, то очевидно, что

$$\varphi_k \xrightarrow{D} 0$$

Задача 1.9. Дано: $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$. Доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0^{(l)}(x)dx = 0, \ (l = 1, 2, \dots).$$

Указание. Воспользоваться финитностью функции $\varphi_0(x)$.

Задача 1.10. Дано $\varphi_1 \in D(\mathbb{R})$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)dx = 0.$$

Доказать, что существует ровно одна функция $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ такая, что $\varphi_0'(x) = \varphi_1(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Указание. Положить $\varphi_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_1(x)dx$.

Задача 1.11. Доказать, что если $\varphi_k \xrightarrow{D} \varphi$, то $\varphi_k^{(l)} \xrightarrow{D} \varphi^{(l)}$ для любого $l = 1, 2, \ldots$.

Задача 1.12. Доказать, что если $\varphi_k \xrightarrow{D} \varphi$, $\psi_k \xrightarrow{D} \psi, c \in \mathbb{R}$, то $\varphi_k + \psi_k \xrightarrow{D} \varphi + \psi$, $\varphi_k \psi_k \xrightarrow{D} \varphi\psi$, $c\varphi_k \xrightarrow{D} c\varphi$.

2 Пространство обобщенных функций.

Обобщенной функцией будем называть линейный непрерывный функционал T, определенный на пространстве основных функций $D(\mathbb{R}^m)$ со значениями в множестве вещественных или комплексных чисел. Множество обобщенных функций, определенных на $D(\mathbb{R}^m)$, будем обозначать $D'(\mathbb{R}^m)$. Значение функционала T на функции φ будем обозначать так:

$$T(\varphi) = (T, \varphi)$$

В этом выпуске будем рассматривать только вещественнозначные функции.

Если значения функционала T на функции φ вычисляются по правилу

$$(T, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)dx \, (x \in \mathbb{R}^m), \tag{2}$$

где $f \in L'_{loc}(\mathbb{R}^m)$, т.е. f — локально суммируемая функция, то будем говорить, что функционал T порождается функцией f. Этот функционал будет обозначаться T_f и называться регулярной обобщенной функцией. Функционалы T, которые нельзя представить в виде (2), называется сингулярными обобщенными функциями.

Как известно [1], обобщенные функции можно складывать между собой и умножать на числа по следующим правилам:

$$(T_1 + T_2, \varphi) = (T_1, \varphi) + (T_2, \varphi),$$
$$(cT, \varphi) = (T, c\varphi),\ c \in \mathbb{R}.$$

Обобщенные функции можно умножать на бесконечно дифференцируемые функции по правилу:

$$(hT, \varphi) = (T, h\varphi),\ h \in C^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Наконец, обобщенные функции можно дифференцировать по правилу:

$$(D^\alpha T, \varphi) = (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m}(T, D^\alpha \varphi),\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m). \tag{3}$$

В пространстве обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^m)$ также определена операция предельного перехода. Пусть имеется семейство обобщенных функций $T^\varepsilon \in D'(\mathbb{R}^m)$, зависящих от параметра ε, причем пусть множество значений параметра $\{\varepsilon\}$ имеет предельную точку ε_0. Тогда говорят, что T^ε стремится к обобщенной функции T^{ε_0} при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в пространстве $D'(\mathbb{R}^m)$, если для любой основной функции $\varphi \in D(\mathbb{R}^m)$ соответствующая числовая функция (T^ε, φ) параметра ε имеет своим пределом значение $(T^{\varepsilon_0}, \varphi)$.

Обобщенная функция T, значения которой вычисляются по правилу: $(T, \varphi) = \varphi(a)$, называется дельта-функцией и обозначается $x \mapsto \delta(x - a)$. Если $a = 0$, то часто пишут так: $\delta(x) = \delta$.

Задача 2.1. Доказать, что не существует локально суммируемой функции f такой, что $(T_f, \varphi) = \varphi(0)$ для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Решение. Предположим противное: пусть существует локально суммируемая функция f, такая что для любой $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Рассмотрим семейство основных функций φ_ε вида,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}},\ |x| < \varepsilon, \\ 0,\ |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ — вещественный параметр. Тогда, с одной стороны,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx = \varphi_\varepsilon(0) = \frac{1}{e}.$$

С другой стороны, $0 \leqslant \varphi_\varepsilon(x) \leqslant \frac{1}{e}$, откуда

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right| = \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{e}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)|dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Полученное противоречие доказывает требуемый результат.

Задача 2.2. Рассмотрим семейство регулярных обобщенных функций T_{f_ε}, порожденных функциями $f_\varepsilon \in L'_{loc}(\mathbb{R})$ вида

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon},\ |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0,\ |x| > \varepsilon\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Найти $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{f_\varepsilon}$ в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

Решение. Если $\varphi \in D(\mathbb{R})$, то, в соответствии с понятием регулярной обобщенной функции, имеем

$$(T_{f_\varepsilon}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)dx$$

По теореме о среднем существует точка $x_1 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ такая, что

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\varphi(x)dx = \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(x_1)2\varepsilon = \varphi(x_1)$$

Но так как $\varphi(x_1) \to \varphi(0)$ при $x_1 \to 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T_{f_\varepsilon}, \varphi) = \varphi(0).$$

Значит $T_{f_0} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{f_\varepsilon}$ существует, причем значение T_{f_0} на произвольной основной функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ есть $\varphi(0)$. Поэтому $T_{f_0} = \delta$. Окончательно $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{f_\varepsilon} = \delta$,

Задача 2.3. Рассмотрим семейство регулярных обобщенных функций T_{f_ε} $(\varepsilon > 0)$, значения которых на произвольной функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ вычисляются по правилу

$$(T_{f_\varepsilon}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx,\ f_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Требуется найти $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{f_\varepsilon}$ в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

Решение. Рассматривая графики функций $f_\varepsilon(x)$ при конкретных значениях ε, приходим к предположению, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{f_\varepsilon} = \pi\delta$, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)dx = \pi,\ \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(0) = \infty,\ \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = 0,\ (x \neq 0).$$

Чтобы доказать справедливость этого предположения, нам надо проверить, что для любой фиксированной основной функции φ

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx=\pi\varphi(0).$$

Для этого сделаем замену переменной $x=\varepsilon s$, $(\varepsilon>0)$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\varphi(\varepsilon s)ds=J_\varepsilon.$$

Однако

$$\left|\int\limits_{|s|\geqslant N}\frac{1}{s^2+1}\varphi(\varepsilon s)ds\right|\leqslant\max|\varphi|\int\limits_{|s|\geqslant N}\frac{1}{s^2+1}ds=$$
$$=2\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}N\right)\max|\varphi|\xrightarrow[N\to\infty]{}0,$$

т.е. несобственный интеграл J_ε при $\varepsilon\to 0$ равномерно сходится к

$$J_0=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\varphi(0)ds=\pi\varphi(0),$$

что и требовалось доказать.

Задача 2.4. Найти в пространстве $D'(\mathbb{R})$ предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}.$$

Ответ. $\delta(x)$.

Замечание. Здесь мы воспользовались распространенными не вполне точными обозначениями функции ($f(x)$ вместо f или

$f(\cdot)$), которые обычно не приводят к недоразумениям. Мы и далее будем так иногда делать без особой оговорки.

Задача. 2.5. Доказать, что функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, определенный формулой

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx,\ \varphi\in D(\mathbb{R}),$$

принадлежит $D'(\mathbb{R})$.

Решение. Линейность функционала $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ очевидна. Поэтому остается проверить непрерывность, причем ясно, что достаточно проверить непрерывность в нуле. Пусть $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{D} 0$. Тогда, согласно определению сходимости в D, существует отрезок $[-a,a]$, вне которого все $\varphi_k\equiv 0$. Поэтому

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi_k\right)\right|=\left|\int\limits_{-a}^{a}\frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(0)}{x}dx\right|\leqslant\int\limits_{-a}^{a}\left|\varphi_k'(\xi)\right|dx\leqslant 2a\max_{[-a,a]}|\varphi_k'|.$$

Но поскольку $\varphi_k\xrightarrow{D}0$, то $\varphi_k'(x)\to 0$ равномерно по x. Поэтому $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi_k\right)\to 0$ для любой последовательности $\varphi_k\xrightarrow{D}0$, что и доказывает непрерывность в нуле функционала $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Замечание. Функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ в некотором смысле соответствует обычной функции $\frac{1}{x}$, в частности, нетрудно проверить, что $\mathcal{P}\frac{1}{x}=(\ln|x|)'$, где производная берется в смысле теории обобщенных функций. Однако следует иметь в виду, что функция $\frac{1}{x}$ не является локально суммируемой и потому не порождает регулярного функционала. Можно показать, что функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ сингулярен.

Задача 2.6. Доказать, что функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$, определенный формулой

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2},\varphi\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}dx,\ \varphi\in D(\mathbb{R}),$$

принадлежит $D'(\mathbb{R})$

Задача 2.7. Доказать, что функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x^3}$, определенный формулой

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^3},\varphi\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\frac{1}{2}x^2\varphi''(0)}{x^3}dx,\ \varphi\in D(\mathbb{R}),$$

принадлежит $D'(\mathbb{R})$. Обобщить результат задач 2.5 – 2.7.

Задача 2.8. Дана произвольная числовая последовательность $\{a_k\}$, $(k\in\mathbb{Z})$. Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(x-k)$$

сходится в $D'(\mathbb{R})$.

Решение. Нужно показать, что для любой функции $\varphi\in D(\mathbb{R})$ существует

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ N\to\infty}}\left(\sum_{k=-n}^{k=N}a_k\delta(x-k),\varphi\right)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ N\to\infty}}\sum_{k=-n}^{k=N}a_k\varphi(k)$$

и что этот предел непрерывно зависит от φ. Однако $\varphi(x)$ — финитная функция, значит, величина под знаком предела перестает меняться, начиная с некоторых n и N. Поэтому такой предел всегда существует. Аналогично проверяется непрерывность.

3 Решение некоторых простейших алгебраических уравнений в обобщенных функциях.

Мы будем изучать решение уравнений вида $h(x)T = 0$, где $h \in C^\infty$. Основную роль при решении задач этого раздела играет формула Тейлора с интегральным остаточным членом:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \\ + \frac{1}{n!}\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(tx + (1-t)x_0)(1-t)^n dt \cdot (x - x_0)^{n+1} \\ (x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 0) \tag{4}$$

Поскольку такая форма остаточного члена не всегда приводится в распространенных учебниках, приведем ее вывод.

Исходя из формулы Ньютона–Лейбница и многократно интегрируя по частям правую часть, получаем

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t) =$$

$$= f(x_0) - (x-t)f'(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = \dots =$$

$$= f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Остаточный член преобразуем с помощью замены

$$x - t = x - x_0 - \tau x + \tau x_0 \;\Rightarrow\; t = x_0 + \tau(x - x_0)\ (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

Таким образом,

$$x - t = (1 - \tau)(x - x_0).$$

Поэтому остаточный член приобретает вид:

$$\int\limits_0^1 \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \tau(x - x_0))}{n!}(1 - \tau)^n (x - x_0)^{n+1} d\tau.$$

Задача 3.1. Решить уравнение $hT = 0$ относительно обобщенной функции $T \in D'(\mathbb{R})$, если $h(x) \equiv x$.

Решение. Согласно смыслу задачи, требуется найти правило, по которому нужно вычислять значение (T, ψ) для любой функции $\psi \in D(\mathbb{R})$, если $(xT, \varphi) = 0$ при любой функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

По определению умножения бесконечно дифференцируемой функции на обобщенную имеем

$$(xT, \varphi) = (T, x\varphi) = 0.$$

Таким образом, значение искомого функционала T на всех функциях вида $x\varphi(x)$ равно нулю. Заметим, что наличие множителя x у функции $x\varphi(x)$ означает, что эта функция при $x = 0$ обращается в нуль. Покажем, что верно и обратное, т.е. если $\alpha(0) = 0$ для некоторой функции $\alpha \in D(\mathbb{R})$, то α представима в виде $\alpha(x) = x\beta(x)$, где β — некоторая функция из $D(\mathbb{R})$.

Действительно, пусть $\alpha(0) = 0$, $\alpha \in D(\mathbb{R})$. Воспользуемся формулой (4) при $x_0 = 0$, $n = 0$:

$$\alpha(x) = \alpha(0) + \int\limits_0^1 \alpha'(\tau x) x d\tau = x\beta(x),$$

где $\beta(x) = \int\limits_0^1 \alpha'(\tau x)d\tau$.

Очевидно, что $\beta \in D(\mathbb{R})$, поскольку α (а следовательно, и α') принадлежит $D(\mathbb{R})$.

Пусть теперь ψ — произвольная функция из $D(\mathbb{R})$. Нам нужно найти, чему равно $(T,\, \psi)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\alpha = \psi - \psi(0)\mu, \tag{5}$$

где функция μ определена в задаче 1.5.

Ясно, что $\alpha \in D(\mathbb{R})$ и $\alpha(0) = 0$. Поэтому α представима в виде $\alpha(x) = x\beta(x)$ $(\beta \in D(\mathbb{R}))$, а тогда, по установленному выше, значение искомого функционала T на α равно нулю. Отсюда

$$0 = (T,\, \alpha) = (T,\, \psi - \psi(0)\mu) = (T,\, \psi) - \psi(0)(T,\, \mu). \tag{6}$$

Из соотношения (6) получаем, что

$$(T,\, \psi) = \psi(0)\,(T,\, \mu) = \psi(0)C, \text{ где } C = (T,\, \mu) \tag{7}$$

Таким образом, значение искомого функционала T на произвольной функции $\psi \in D(\mathbb{R})$ равно $C\psi(0)$, где C — некоторое число. Вспоминая определение δ-функции, получаем, что $(T,\, \psi) = C\psi(0) = (C\delta,\, \psi)$, где C — некоторая константа. Обратно, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $(xC\delta, \psi) = 0$ при произвольной константе C.

Ответ. $T = C\delta$, где C — произвольная константа.

Замечание. Решение задач такого типа состоит из следующих основных этапов. Во-первых, находим, на какого вида функциях из $D(\mathbb{R})$ искомый функционал равен нулю. В нашей задаче это были функции вида $x \mapsto x\varphi(x)$. Далее, устанавливаем, что функции найденного вида в определенных точках имеют нули (вообще говоря, различных порядков).

Используя формулу (4), показываем, что все функции из $D(\mathbb{R})$, имеющие в тех же точках нули соответствующих порядков, можно представить в найденном виде. Затем, используя функции вида $\mu(x-x_0)$, подбираем вспомогательную функцию α так, чтобы, во-первых, в нее в качестве слагаемого входила произвольная функция $\psi \in D(\mathbb{R})$, а во-вторых, чтобы α удовлетворяла найденным условиям, т.е. чтобы $(T,\, \alpha) = 0$. После этого, пользуясь линейностью функционала T, раскрываем выражение для $(T,\, \alpha)$ и находим, чему равно значение (T, ψ).

Задача 3.2. Решить уравнение $(x-1)T = 0$, где $T \in D'(\mathbb{R})$ (см. замечание на стр. 22).

Ответ. $T = c\delta(x-1)$.

Задача 3.3. Решить уравнение $x^3T = 0$, где $T \in D'(\mathbb{R})$.

Ответ. $T = c_1\delta(x) + c_2\delta'(x) + c_3\delta''(x)$, где $\delta^{(i)}$ $(i = 1,\, 2, \dots)$ — i-я производная обобщенной функции δ, т.е. функционал, значения которого на произвольной функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$ вычисляются по правилу

$$(\delta^{(i)},\, \varphi) = (-1)^i \left(\delta,\, \varphi^{(i)}\right)$$

Задача 3.4. Решить уравнение $(x^4-x^2)T = 0$, где $T \in D'(\mathbb{R})$.

Ответ. $T = c_1\delta(x) + c_2\delta'(x) + c_3\delta(x-1) + c_4\delta(x+1)$.

Задача 3.5. Решить уравнение $(\sin x)T = 0$, где $T \in D'(\mathbb{R})$.

Ответ. $T = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\delta(x-\pi k)$ (см. задачу 2.8).

4 Дифференцирование обобщенных функций.

Задача 4.1. Найти $(T_{\theta_a})'$, где

$$\theta_a(x) = \theta(x-a) = \begin{cases} 0,\ x < a \\ 1,\ x \geqslant a \end{cases}$$

(при $a = 0$ эта функция называется единичной функцией или функцией Хевисайда).

Решение. T_{θ_a} — это регулярный функционал, порожденный функцией $\theta_a \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, так что

$$(T_{\theta_a}, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-a)\varphi(x)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

По определению производной обобщенной функции имеем

$$(T'_{\theta_a},\, \varphi) = -(T_{\theta_a},\, \varphi') = -\int\limits_a^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(a) - \varphi(+\infty) = \varphi(a).$$

Значит, $(T'_{\theta_a},\, \varphi) = \varphi(a) = (\delta(x-a), \varphi)$

Ответ. $T'_{\theta_a} = \delta(x-a)$.

Замечание. Из задачи 4.1. видно, что производная регулярной обобщенной функции может оказаться сингулярной обобщенной функцией. Поскольку регулярные обобщенные функции обычно отождествляются с теми локально суммируемыми функциями, которыми они порождены, то упомянутый факт можно сформулировать так: производная обычной функции может оказаться обобщенной функцией. Кроме того, факт, установленный в задаче 4.1, отвечает интуитивному представлению о том, что если функция изменяется в какой-то точке скачком, то скорость такого изменения в этой точке бесконечна.

В [1] и [2] показано, что если f — локально кусочно непрерывная функция с точками разрыва $a_1, a_2, \ldots$ и соответствующими величинами скачков $b_1,\, b_2, \ldots$, причем $f'(x)$ при $x \notin \{a_i\}$ совпадает со значениями некоторой локально кусочно непрерывной функции $\tilde{f}(x)$, то

$$\begin{aligned}(T'_f,\, \varphi) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\varphi(x)dx + \sum_k b_k\varphi(a_k) = \\ &= \left(T_{\tilde{f}},\, \varphi\right) + \sum_k b_k(\delta(x-a_k),\, \varphi)\end{aligned} \tag{8}$$

Этот результат можно записать так

$$f'(x) = \tilde{f}(x) + \sum_k b_k \delta(x - a_k)$$

Задача 4.2. Вычислить T'_f, где $f(x) = \theta(x)\cos x$.

Ответ. $-\theta(x)\sin x + \delta(x)$.

Задача 4.3. Вычислить T'_f, T''_f, T'''_f, где $f(x) = |x|\cos x$.

Ответ. $T'_f = (\operatorname{sgn} x)(\cos x - x\sin x)$
$T''_f = -(\operatorname{sgn} x)(2\sin x + x\cos x) + 2\delta(x)$
$T'''_f = (\operatorname{sgn} x)(-3\cos x + x\sin x) + 2\delta'(x)$

Задача 4.4. Вычислить $(|x|)^{(m)}$.

Ответ. $|x|' = \operatorname{sgn} x,\ |x|'' = 2\delta(x),\ |x|^{(m)} = 2\delta^{(m-2)}(x),\ (m > 2)$

Задача 4.5. Вычислить $(\operatorname{arctg}\frac{1}{x})'$

Ответ. -$\frac{1}{1+x^2} + \pi\delta(x)$.

Задача 4.6. Доказать, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\delta(x+\varepsilon) - \delta(x)\right] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \delta'(x)$$

Обобщить этот результат. Дать физическое истолкование функции δ'.

Задача 4.7. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \delta^{(k)}(x-k)$ сходится в $D'(\mathbb{R})$ при любых числах a_k.

Указание. См. решение задачи 2.8.

5 Решение простейших дифференциальных уравнений в D'

Задача 5.1. Решить уравнение $T' = 0$ $(T \in D'(\mathbb{R}))$.

Решение. Нужно найти функционал T такой, что $(T', \varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$. В силу определения производной обобщенной функции это условие эквивалентно такому: $(T, \varphi') = 0$. Таким образом, на функциях вида φ' искомый функционал равен нулю. Заметим, что в силу задач 1.8 и 1.9 для представимости функции $\alpha \in D(\mathbb{R})$ в виде $\alpha = \beta'$, $\beta \in D(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = 0. \tag{9}$$

Пусть теперь ψ — произвольная функция из $D(\mathbb{R})$. Построим вспомогательную функцию $\alpha \in D(\mathbb{R})$ так, чтобы в нее в качестве «основного» слагаемого входила функция ψ и чтобы выполнялось условие (9). Для этого положим

$$\alpha = \psi - \nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx, \tag{10}$$

где $\nu \in D(\mathbb{R})$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu(x)dx = 1.$$

Ясно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu(x)dx = 0$$

Поэтому α представима в виде $\alpha = \beta'$ $(\beta \in D(\mathbb{R}))$.
Значит, $(T, \alpha) = 0$. Отсюда с помощью (10) получаем

$$0 = (T, \alpha) = (T, \psi) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx(T, \nu) = (T, \psi) - c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx,$$

где $c \stackrel{def}{=} (T, \nu)$. Поэтому

$$(T, \psi) = c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c\psi(x)dx = (T_c, \psi),$$

где T_c — функционал, порожденный функцией $f(x) \equiv c$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что при произвольном выборе константы c функционал вида T_c удовлетворяет нашему уравнению. Таким образом, решениями нашего уравнения являются регулярные обобщенные функции вида T_c, т.е. обычные функции, тождественно равные константе. Значит, расширение класса возможных решений (вместо дифференцируемых функций — обобщенные) не дало новых решений.

Ответ. $T = T_c$, $c = \text{const}$.

Задача 5.2. Решить уравнение $xT' = 0$.

Решение. В силу задачи 3.1 заданное уравнение равносильно такому:

$$T' = c_1\delta(x) \tag{11}$$

где c_1 — произвольная постоянная. В силу задачи 4.1 при заданном c_1 одним из решений последнего уравнения служит регулярная обобщенная функция

$$T_{\text{частное}} = T_{c_1\theta}.$$

А в силу задачи 5.1, если две обобщенные функции имеют одинаковую производную, то они различаются на постоянное слагаемое. Таким образом, общее решение уравнения (11) имеет вид

$$T = T_{c_1\theta} + T_{c_2} + T_{c_1\theta+c_2},$$

где c_2 — также произвольная постоянная. Это решение можно отождествить с обычной функцией $T = c_1\theta + c_2$: $T(x) = c_1\theta(x)+$

c_2 или, что равносильно,

$$T(x) = \begin{cases} \tilde{c}_1, \ (-\infty < x < 0), \\ \tilde{c}_2, \ (0 \leqslant x < +\infty), \end{cases}$$

где $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ — произвольные постоянные.

Ответ. $T = c_1\theta + c_2$.

Замечание. Если решать уравнение $xf'(x) = 0$ в классе дифференцируемых функций, то получится только решение $f(x) = c_1$. Таким образом, в данном случае, перейдя от обычных функций к обобщенным, мы расширили класс решений.

Задача 5.3. Решить уравнение $(x-1)T' = 0$.

Ответ. $T = c_1\theta_1 + c_2$.

Задача 5.4. Решить уравнение $x^2T' = 0$.

Ответ. $Tc_1 = \delta + c_2\theta + c_3$.

Задача 5.5. Решить уравнение $(\sin x)T' = 0$.

Ответ. $T = c + \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k$, где c и $\{c_k\}$ — произвольные постоянные, для которых ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{0} c_k$ сходящийся.

Задача 5.6. Пусть $f \in L'_{loc}(\mathbb{R})$. Доказать, что функция $(x,t) \mapsto F(x,t) = f(x-t)$ порождает функционал $T_F \in D'(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}T_F + \frac{\partial}{\partial t}T_F = 0. \tag{12}$$

Решение. Равенство (12) означает, что для любой функции $\varphi(x,t) \in D(\mathbb{R}^2)$ должно быть

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}T_F + \frac{\partial}{\partial t}T_F, \varphi\right) = 0. \tag{13}$$

Пользуясь определением обобщенной частной производной (3), левую часть равенства (13) перепишем так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}T_F, \varphi\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}T_F, \varphi\right) = -\left(T_F, \frac{\partial}{\partial x}\varphi\right) - \left(T_F, \frac{\partial}{\partial t}\varphi\right) = \\ = -\left(T_F, \frac{\partial}{\partial x}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\varphi\right). \tag{14}$$

Но T_F — регулярный функционал. Поэтому значение T_F на произвольной функции $\psi(x,t) \in D(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$(T_F, \psi) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F(x,t)\psi(x,t)dxdt = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x-t)\psi(x,t)dxdt$$

В силу этого, продолжая цепочку равенств (14), имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}T_F + \frac{\partial}{\partial t}T_F, \varphi\right) = -\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x-t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)dxdt$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных: $\xi = x - t$, $\tau = t$. Тогда получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}T_F + \frac{\partial}{\partial t}T_F, \varphi\right) = -\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi - \frac{\partial}{\partial \xi}\varphi + \frac{\partial}{\partial \tau}\varphi\right)d\xi d\tau =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \tau}\varphi(\xi+\tau,\tau)d\tau =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi \varphi(\xi+\tau,\tau)\Big|_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} = 0.$$

в силу финитности функции $\varphi(x,t)$.

Таким образом, требуемое утверждение доказано.

Замечание. Задача 5.6 по существу показывает, что функция $u = f(x-t)$ является решением уравнения $u_x + u_t = 0$ не только в случае, когда $f \in C^1(\mathbb{R})$, но и в случае, когда $f \in L'_{loc}(\mathbb{R})$. Правда, в последнем случае $f(x-t)$ является уже не классическим, а обобщенным решением этого уравнения.

Задача 5.7. Пусть $f \in L'_{loc}(\mathbb{R})$. Доказать, что функция $u = f(ax+bt)$, $(a, b = \text{const})$ является обобщенным решением уравнения

$$b\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Задача 5.8. Доказать, что функция $E(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$ $(x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ \theta$ — единичная функция Хевисайда, $a = \text{const} > 0)$ порождает функционал T_E, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_E - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T_E = \delta(x,\, t) \tag{15}$$

Решение. Равенство (15) означает, что для любой функции $\varphi(x,t) \in D(\mathbb{R}^2)$ должно выполняться следующее равенство

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_E - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T_E, \varphi\right) = \varphi(0,0).$$

Используя определение частной производной (3) от обобщенной функции, имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_E - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T_E, \varphi\right) = \left(T_E, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi\right) \tag{16}$$

Поскольку T_E — регулярный функционал, то для любой функции $\psi(x,t) \in D(\mathbb{R}^2)$

$$(T_E, \psi) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} E(x,t)\psi(x,t)dxdt.$$

Поэтому из (16) и свойств функции θ следует, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}T_E - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T_E, \varphi\right) = \frac{1}{2a}\iint\limits_{|x|<at}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)dxdt. \quad (17)$$

Произведем в этом интеграле замену переменных:

$$\xi = x - at,\ \tau = x + at.$$

Тогда нетрудно подсчитать, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\tau}$$

Кроме того, Якобиан замены равен

$$\frac{\partial(x,t)}{\partial(\xi,\tau)} = \left[\frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial(x,t)}\right]^{-1} = \left[\begin{vmatrix}1 & -a\\ 1 & a\end{vmatrix}\right] = \frac{1}{2a}$$

А область интегрирования определена неравенствами

$$-at \leqslant x \leqslant at \Leftrightarrow (x - at < 0,\ x + at > 0) \Leftrightarrow (\xi < 0, \tau > 0).$$

Таким образом, правая часть (17) оказывается равной

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{0}d\xi\int\limits_{0}^{+\infty}\left(-4a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\tau}\right)\frac{1}{2a}d\tau = -\int\limits_{-\infty}^{0}d\xi\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\tau=0}^{\infty} \quad (18)$$

В силу финитности функции φ имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}|_{\tau=\infty} = 0$. Кроме того, так как $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\varphi|_{\tau=\text{const}}\right)$, то

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi|_{\tau=0}\right)$$

Отсюда, преобразуя далее правую часть (18), получаем

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{d}{d\xi}\left(\varphi|_{\tau=0}\right) d\xi = \varphi|_{\tau=0,\xi=0} - \varphi|_{\tau=0,\xi=-\infty} = \varphi|_{\tau=0,\xi=0} = \varphi(0,0).$$

что и требовалось доказать.

Задача 5.9. Доказать, что в $D'(\mathbb{R}^3)$ регулярная обобщенная функция $T_{1/r}$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 T_{1/r}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_{1/r}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_{1/r}}{\partial x_3^2} = -4\pi\delta$$

(отметим, что $\frac{1}{r} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$).

Решение. Нам надо доказать, что для любой функции $\psi(x) \in D(\mathbb{R}^3)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T_{1/r} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T_{1/r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T_{1/r}, \psi\right) = (-4\pi\delta, \psi) \qquad (19)$$

или, что равносильно

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\psi\right) dx_1 dx_2 dx_3 = -4\pi\psi(0,\, 0,\, 0).$$

Для доказательства перейдем к сферическим координатам (r, θ, φ) с центром в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, воспользовавшись формулой

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\psi = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)\right].$$

Учитывая, что якобиан равен $r^2 \sin\theta$, перепишем левую часть

(19) в виде

$$J = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right] drd\theta d\varphi. \tag{20}$$

Чтобы разбить этот интеграл естественным образом на три слагаемых, отрежем окрестности «опасной» точки $r = 0$ и «опасной» оси $\theta = 0, \pi$, т.е. рассмотрим интеграл $J_{\xi,\tau}$, аналогичный (20), но распространенный по области $\mathbb{R}^3_{\xi,\tau} = \{(r, \theta, \tau) | \varepsilon < r < \infty, \tau < \theta < \pi - \tau,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, $(0 < \varepsilon < +\infty,\ 0 < \tau < \frac{\pi}{2})$.

Тогда

$$J = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\tau \to 0^+} J_{\varepsilon,\tau} \tag{21}$$

Однако

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_{\varepsilon,\tau}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) drd\varphi d\theta =$$
$$= \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} dr \int\limits_{\tau}^{\pi-\tau} d\theta \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0. \tag{22}$$

в силу 2π-периодичности по φ функции $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$.

$$\lim_{\tau\to 0^+} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_{\varepsilon,\tau}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) drd\theta d\varphi =$$
$$= \lim_{\tau\to 0^+} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} dr \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{r}\sin\theta\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\tau}^{\theta=\pi-\tau} = 0 \tag{23}$$

из-за множителя $\sin\theta$; наконец из преобразования

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 2\frac{\partial\psi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

получаем

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)drd\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\tau^{\pi-\tau} \sin\theta d\theta \left[-\psi\Big|_{r=\varepsilon} - \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=\varepsilon}\right],$$

откуда

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{\tau\to 0^+}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_{\varepsilon,\tau}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)drd\theta d\varphi = \\ = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta\psi\Big|_{r=0} = -4\pi\psi(0,0,0).\end{gathered} \tag{24}$$

Из формул (20) – (24) вытекает (19), что и требовалось доказать.

Задача 5.10. Доказать, что в $D'(\mathbb{R}^2)$ регулярная обобщенная функция $T_{\ln 1/r}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}T_{\ln\frac{1}{r}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}T_{\ln\frac{1}{r}} = -2\pi\delta.$$

Указание. Применить выражение для лаплассиана в полярных координатах r,φ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\psi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right].$$

Список литературы

[1] Шилов Г.Е. Математический анализ, Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965, – 328 с.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981, – 512 с.

[3] Белов В.В., Воробьев Е.М. Сборник задач по дополнительным главам математической физики. — М.: Высшая школа, 1978, – 272 с.

[4] Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1982, – 256 с.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976, – 544 с.

[6] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982, – 272 с.

Учебно-методическое издание

Деркач Мария Михайловна
Филимонов Андрей Матвеевич
Филимонов Дмитрий Андреевич

Обобщенные решения дифференциальных уравнений

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Уравнения математической физики» для студентов специальности «Прикладная математика и информатика»

Подписано в печать	Формат 60x84/16	Тираж 100 экз.
Усл.-печ. л. -	Заказ №	Изд. № 140—13

УПЦ ГИ МИИТ, 127994, Москва, ул.Образцова, д.9, стр.9