ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2006, том 42, № 3, с. 1–9

УДК 551.46

ВАРИАЦИИ АМПЛИТУДЫ КРАЕВЫХ ВОЛН ПРИ МЕДЛЕННОМ ВДОЛЬБЕРЕГОВОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ШЕЛЬФА

© 2006 г. А. А. Куркин*, Е. Н. Пелиновский**, О. Е. Полухина*

*Нижегородский государственный технический университет 603600 Нижний Новгород, ул. Минина, 24
E-mail: kurkin@kis.ru

**Институт прикладной математики РАН 603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

Поступила в редакцию 21.01.2005 г., после доработки 20.06.2005 г.

Динамика краевых волн над шельфом с цилиндрическим рельефом дна, параметры которого медленно изменяются во вдольбереговом направлении, исследована в рамках линейной теории мелкой воды. Амплитуда краевой волны рассчитана с использованием асимптотической теории и энергетического подхода. Аналитические результаты получены для трех различных профилей шельфа: бесконечного линейного, вогнутого экспоненциального и шельфа-ступеньки – с переменными вдоль берега параметрами.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые волны, многократно зарегистрированные в волновом поле на шельфе [1–4] играют значительную роль в динамике прибрежной зоны и часто рассматриваются как определяющий фактор эволюции береговой линии при формировании ритмических форм рельефа, таких как серповидные бары и фестоны [5]. В книге [6] приведены фотографии береговых структур, сформированных под воздействием краевых волн. Результаты лабораторных экспериментов и грубые оценки характерных масштабов согласуются с наблюдаемыми особенностями морфологии берегов, однако до сих пор не исследована энергетика этих процессов, и, как отмечалось в [7], нет количественных моделей, описывающих эволюцию берега и дна под действием краевых волн.

Мелкомасштабные краевые волны обычно генерируются набегающими ветровыми волнами вследствие сильной нелинейности поля ветровых волн [8–12]. Крупномасштабные краевые волны являются основным компонентом возмущений водной поверхности, генерируемых циклонами, движущимися вдоль побережья [13]. Существованием захваченных волн объясняется неравномерный характер распределения высот волн цунами вдоль береговой линии [14 – 16]. В целом до 70% энергии волн цунами переносится вдоль Курильских островов в виде краевых волн [17].

Поперечная относительно берега структура баротропных захваченных волн в бассейне переменной глубины описана в работах [14, 18–22] и книгах [5, 23]. Недавно были получены некоторые точные решения полных нелинейных уравнений гидродинамики, описывающие волны во вращающемся океане над шельфом с постоянным уклоном [24]. Математически это достаточно сложная задача, поскольку краевая задача оказывается двумерной (относительно вертикальной и поперечной к берегу координат). Только в приближении мелкой воды краевая задача содержит одну переменную (поперечную координату), при этом переменная глубина играет роль потенциала в уравнении Штурма-Лиувилля. Для этого случая достаточно подробно изучены свойства краевых волн над дном с произвольным профилем [5, 20, 21, 23]. Нелинейная теория длинных краевых волн также имела свое развитие: было выведено уравнение Кортевега де Вриза [25], вычислены нелинейные поправки к фазовой скорости [26–29], выведено нелинейное уравнение Шредингера для огибающей [29–32], проанализированы нелинейные взаимодействия в триадах краевых волн [33–36], исследована нелинейная динамика краевых волн над линейно наклонным дном [37, 38]. Хочется также отметить слабодисперсионную модель краевых волн, развитую в [39].

В большинстве теоретических исследований рассматривается бассейн с цилиндрической геометрией, когда глубина океана зависит лишь от поперечной к берегу координаты. Реальные ситуации, как правило, сложнее, и приходится принимать во внимание двумерную изменчивость глубины бассейна. Так, например, в работе [40] анализировались захват и рассеяние топографических волн на эстуариях и мысах; в [41] рассматривалось рассеяние краевых волн береговыми структурами, перпендикулярными к линии берега. В настоящей работе мы рассматриваем ситуацию, когда глубина бассейна – функция двух горизонтальных координат с сильной зависимостью от поперечной к берегу координаты x и слабой зависимостью от вдольбереговой координаты y.

2. ВАРИАЦИИ АМПЛИТУДЫ КРАЕВЫХ ВОЛН

В линейной теории мелкой воды динамика краевых волн описывается уравнением для смещение водной поверхности η:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - g\mathrm{div}[h(x, y)\nabla\eta] = 0, \tag{1}$$

где t – время, $h(x, y)$ – глубина бассейна, g – гравитационное ускорение, а гравитационные операторы div и ∇ действуют в горизонтальной плоскости (x, y). Соответствующие граничные условия, которым должны удовлетворять решения уравнения (1), должны иметь вид:

– на береговой линии $y_0(x)$, где $h(y_0(x), x) \equiv 0$, волновое поле должно быть ограниченным, что следует из условия непротекания;

– вдали от берега ($y \longrightarrow \infty$) волны должны затухать.

Мы будем рассматривать монохроматические волны, периодические во времени: $\eta(x, y, t) = \zeta(x, y)\exp(i\omega t)$, тогда (1) сводится к

$$\mathrm{div}[h(x, y)\nabla\zeta] + \frac{\omega^2}{g}\zeta = 0. \tag{2}$$

При стандартном подходе, когда $h = h(y)$, переменные в уравнении (2) можно разделить:

$$\zeta(x, y) = F(y)\exp(-ikx), \tag{3}$$

при этом $F(y)$ и k удовлетворяют краевой задаче

$$\hat{\Gamma}F = \frac{d}{dy}\left[h(y)\frac{dF}{dy}\right] + \left(\frac{\omega^2}{g} - h(y)k^2\right)F = 0 \tag{4}$$

с соответствующими граничными условиями на берегу и бесконечности. Структура собственных функций определяется формой донного рельефа и частотой волны.

Теперь мы рассмотрим обобщение этой задачи, когда глубина моря представима в виде $h = h(y, \varepsilon x)$, где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Поскольку вдольбереговые изменения формы дна предполагаются гладкими, форма волны в нулевом порядке по ε должна иметь вид, аналогичный (3), со слабой зависимостью от вдольбереговой координаты:

$$\begin{aligned}\zeta(x, y) &= A(X)F(y, X)\exp(-i\theta) + \\ &+ \varepsilon\eta_1(y, X)\exp(-i\theta) + \varepsilon^2\ldots,\end{aligned} \tag{5}$$

где $X = \varepsilon x$, и

$$k(X) = \frac{d\theta}{dx} \tag{6}$$

– вдольбереговое волновое число. Мы предполагаем также, что мода $F(y, X)$ нормализована, тогда $A(X)$ – амплитуда волны на берегу. Выделяя слагаемые при одинаковых степенях малого параметра ε после подстановки (5) в (2) с учетом (6), в низшем порядке при ε^0 получаем краевую задачу, аналогичную (4), для каждой фиксированной точки береговой линии X. Таким образом, будут найдены поперечная структура волнового поля $F(y, X)$ и вдольбереговое волновое число k. Амплитуда волны не определена в низшем порядке.

В первом порядке, при ε^1, получается неоднородная краевая задача

$$\hat{\Gamma}\eta_1 = H_1, \tag{7}$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь

$$H_1 = 2ikh\frac{\partial}{\partial X}(AF) + iAF\frac{\partial}{\partial X}(kh)). \tag{8}$$

Как известно, неоднородная краевая задача разрешима при условии, что правая часть уравнения (7) ортогональна собственным функциям оператора, сопряженного с Г. Используя граничные условия непротекания на берегу и затухания на бесконечности, легко показать, что оператор Г – самосопряженный. Поэтому для разрешимости задачи (7) достаточно потребовать, чтобы правая часть H_1 была ортогональна собственным функциям F:

$$\int_{y_0(X)}^{\infty} H(y, X)F(y, X)dy = 0. \tag{9}$$

После несложных математических манипуляций (9) легко свести к уравнению

$$\int_{y_0(X)}^{\infty}\frac{\partial}{\partial X}[k(X)h(y, X)A^2(X)F^2(y, X)]dy = 0. \tag{10}$$

Принимая во внимание соотношение на берегу $h(y_0(X), X) = 0$, можно сказать, что уравнение (10) эквивалентно закону сохранения для интеграла

$$A^2(X)k(X)\int_{y_0(X)}^{\infty} h(y, X)F^2(y, X)dy = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Другое уравнение для нахождения $k(X)$ можно получить из уравнения (4), которое также можно переписать в интегральной форме

$$\begin{aligned}&k^2(X)\int_{y_0(X)}^{\infty} h(y, X)F^2(y, X)dy = \\ &= \frac{\omega^2}{g}\int_{y_0(X)}^{\infty} F^2(y, X)dy - \int_{y_0(X)}^{\infty} h(y, X)\left(\frac{\partial F(y, X)}{\partial y}\right)^2 dy.\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, амплитуда $A(X)$ краевой волны, ее волновое число $k(X)$ и поперечная структура $F(y, X)$ полностью определены и могут быть использованы для исследования эволюции таких волн на шельфе, параметры которого медленно изменяются вдоль берега.

Как обычно при применении асимптотических методов результаты, получаемые в первом порядке, можно интерпретировать как усредненный по времени закон сохранения потока энергии

$$S = \iint pudydz = \text{const}. \tag{13}$$

Здесь p – давление, u – вдольбереговой компонент скорости жидкости. Имея в виду, что в приближении мелкой воды давление гидростатично

$$p = \rho g(\eta - z), \tag{14}$$

а вдольбереговая скорость в бегущей волне выражается через смещение поверхности как

$$u(x, y, t) = \frac{gk}{\omega}\eta(x, y, t), \tag{15}$$

после интегрирования по периоду волны уравнение (13) совпадает с (11) при соответствующем выборе констант. Таким образом, энергетический подход можно использовать для проверки результатов, получаемых асимптотическими методами.

3. ТРАНСФОРМАЦИЯ КРАЕВЫХ ВОЛН НА ШЕЛЬФАХ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

Далее мы рассмотрим несколько примеров трансформации краевых волн на шельфах различной формы.

3.1. Линейный бесконечный откос

Первый пример – краевые волны Стокса, распространяющиеся вдоль линейного бесконечного откоса ($h = \alpha y$), малый угол наклона которого медленно изменяется вдоль берега: $\alpha = \alpha(X)$. Решения задачи (4) в этом случае выражаются через полиномы Лагерра

$$F = \exp(-k_n\tilde{y})L_n(2k_n\tilde{y}), \tag{16}$$

где $\tilde{y} = y - y_0(X)$, а дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \sqrt{(2n+1)\alpha g k_n}, \tag{17}$$

причем для фиксированной частоты (или волнового числа) существует бесконечное число мод краевых волн.

Волновое число краевых волн Стокса может быть найдено из дисперсионного соотношения (17). Видно, что

$$k \sim \frac{1}{\alpha}. \tag{18}$$

Подставляя (16) в (11), получим, что амплитуда любой моды краевых волн Стокса изменяется вдоль берега по закону

$$A \sim \frac{1}{\alpha}. \tag{19}$$

Необходимо отметить, что параметры волны определяются лишь углом наклона дна и не зависят от кривизны береговой линии. Если уклон дна уменьшается, происходит возрастание амплитуды и уменьшение длины волны, характерные поперечные масштабы также уменьшаются. В результате волна становится более крутой и локализуется в около береговой зоне.

3.2. Экспоненциальный вогнутый шельф

Следующий профиль шельфа имеет два независимых параметра: постоянную глубину на бесконечности H_0 и характерную ширину шельфа a^{-1}:

$$h(y) = H_0(1 - \exp(-ay)). \tag{20}$$

Задача на собственные значения (4) для этого профиля дна впервые была решена в работе [18], см. также [5, 42]. Дисперсионное соотношение и собственные функции в этом случае имеют аналитические выражения:

$$\omega^2 = \frac{gH_0a^2}{2}\left((2n+1)\sqrt{1+\frac{4k_n^2}{a^2}} - (2n^2+2n+1)\right), \tag{21}$$

$$F_n(k, y) = \exp(-apy)\frac{\mathbf{\Gamma}(2p+1)}{\mathbf{\Gamma}(2p+n+1)}\times$$
$$\times \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{\mathbf{\Gamma}(2p+n+j+1)}{\mathbf{\Gamma}(2p+j+1)}(-1)^j\exp(-ajy), \tag{22}$$

где $\mathbf{\Gamma}(z)$ – гамма-функция, и

$$p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4k^2}{a^2}} - (2n+1)\right). \tag{23}$$

Дисперсионное соотношение (21) для шельфа с параметрами $H_0 = 7$ м и $a = 3.14 \times 10^{-2}$ м$^{-1}$ показано на рис. 1. Указанные параметры характеризуют условия на побережье Южного Девона, где были получены ранние данные наблюдений краевых волн [1].

Важной характеристикой дисперсионных кривых для краевых волн над экспоненциальным шельфом является минимальная частота существования отдельных мод, которая определяется выражением

$$\omega_n^{\min} = a[gH_0n(n+1)]^{1/2}, \tag{24}$$

а также длинноволновая асимптотика для скорости волн, определяемая скоростью на максимальной глубине H_0 (показана пунктиром на рис. 1).

Закон изменения амплитуды краевой волны при медленном изменении параметров экспоненциального шельфа H_0 и а можно получить из (11) после подстановки (22). Интегрирование можно выполнить, и для низшей моды ($n = 0$) получим

$$A^2 \sim$$
$$\sim \frac{4\omega^2}{H_0\sqrt{(2\omega^2+gH_0a^2)^2 - g^2H_0^2a^4}\left(1-\frac{2\omega^2}{2\omega^2+gH_0a^2}\right)}. \tag{25}$$

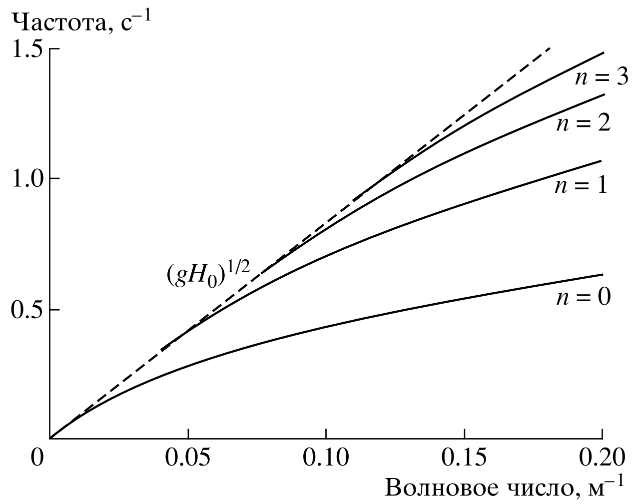

Рис. 1. Дисперсионные кривые краевых волн над экспоненциальным шельфом.

Рис. 2 демонстрирует вариации амплитуды волны нулевой моды при изменении параметров шельфа (амплитуда нормирована на величину A_0, вычисленную из (25) при $H_0 = 5$ м и $a = 0.01$ м$^{-1}$). Видно, что с увеличением H_0 и a амплитуда падает. Действительно, параметр а пропорционален наклону дна вблизи берега, и его уменьшение приводит к росту амплитуды, как это и происходило в случае краевых волн Стокса.

Для первой ($n = 1$) моды краевых волн изменения амплитуды описываются формулой

$$A^2 \sim \frac{12p(1+p)(1+2p)(3+2p)}{H_0\Theta\sqrt{\left(\dfrac{2\omega^2}{gH_0a^2}+5\right)^2-9}}, \tag{26}$$

где

$$\Theta = 4p^3 + 12p^2 + 11p + 3 - 2c^2p(2p^2+3p+1) + \\ + cp(c+2)(4p^2+8p+3) - \\ - 2p(2c+1)(2p^2+5p+3), \tag{27}$$

$$c = \frac{\mathbf{\Gamma}(2p+3)\mathbf{\Gamma}(2p+1)}{\mathbf{\Gamma}^2(2p+2)}, \quad p = \frac{1}{3}\left(\frac{\omega^2}{gH_0a^2}-2\right).$$

Здесь необходимо отметить, что уже для первой моды (в отличие от нулевой) действует ограничение на частоту волны: $\omega > \omega_1^{\min}$, которое определяется выражением (24). Однако минимальная частота (24) также зависит от параметров шельфа H_0 и a, поэтому она также изменяется при изменении этих величин, а, значит, может достигнуть частоты волны (рис. 3), при этом волна такой частоты больше не может существовать, и ее амплитуда должна уменьшаться до нуля при приближении $\omega_1^{\min}$ к частоте волны. Этот эффект “непропускания” иллюстрируется рис. 4. Из этого рисунка видно, что, как и в случае с нулевой модой, амплитуда краевой волны уменьшается, когда шельф сужается и становится более глубоким.

3.3. Шельф-ступенька

Последний пример – это ступенчатый шельф, глубина которого описывается функцией

$$h(y) = \begin{cases} h_1, & 0 \le y < l, \\ h_2, & y \ge l, \end{cases} \qquad h_2 > h_1. \tag{28}$$

Многие работы касались исследования краевых волн в бассейне с такой геометрией [5, 21, 43]. По-

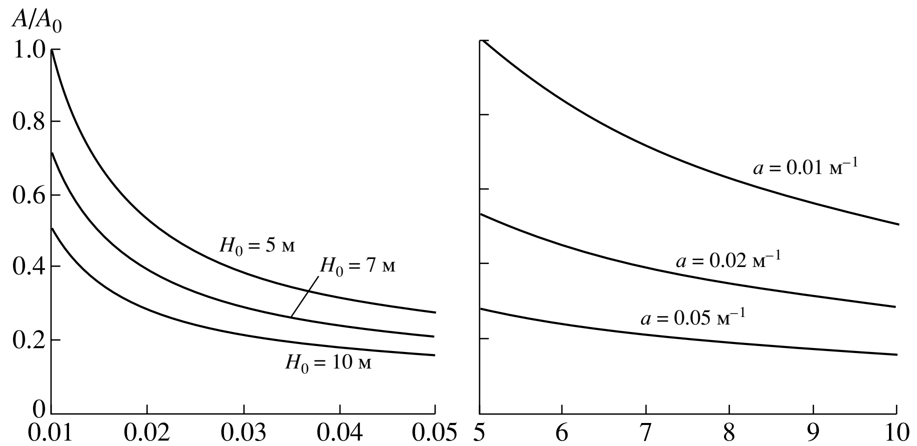

Рис. 2. Изменение амплитуды нулевой моды краевых волн над экспоненциальным шельфом.

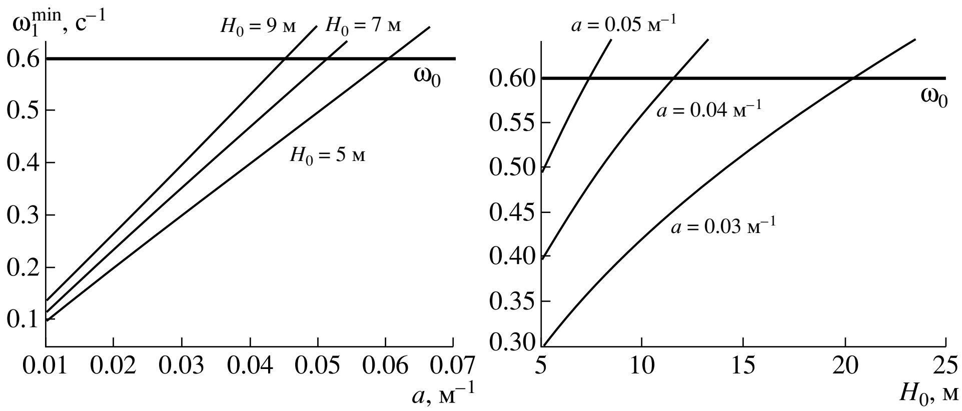

Рис. 3. Минимальная частота первой моды краевых волн ω_1^{min} в зависимости от параметров экспоненциального шельфа a и H_0.

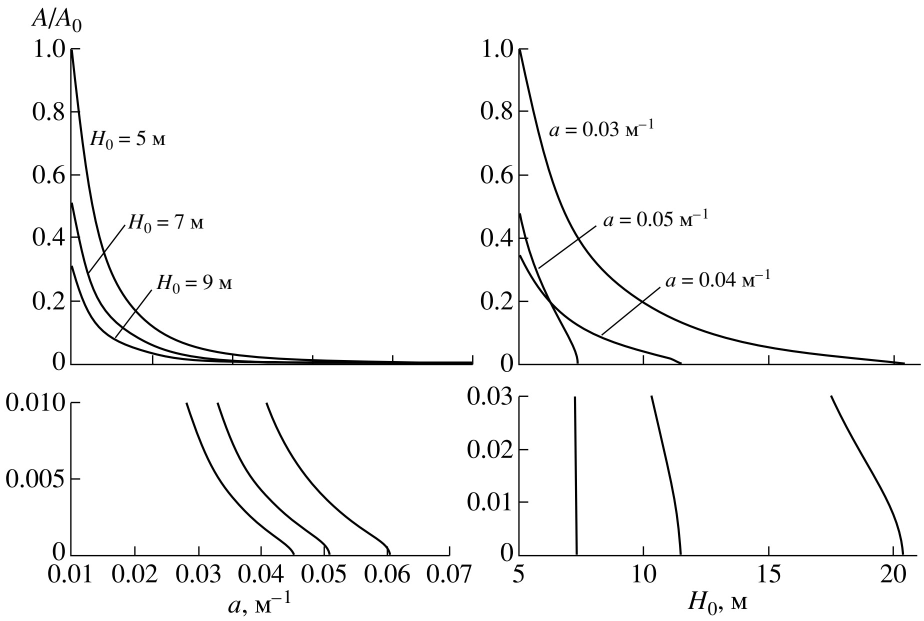

Рис. 4. Зависимость нормированной амплитуды первой моды краевой волны от параметров экспоненциального шельфа a и H_0 (внизу – увеличенные фрагменты верхних рисунков, демонстрирующие уменьшение амплитуды).

перечная структура мод краевых волн в этом случае выражается в элементарных функциях:

$$F = \begin{cases} B\cos\dfrac{\mu y}{l}, & 0 \le y < l, \\ B\cos\mu\exp\left(-\sqrt{k^2 - \dfrac{\omega^2}{gh_2}}(y-l)\right), & y \ge l, \end{cases} \quad (29)$$

где

$$\mu^2 = \frac{\omega^2 l^2}{gh_1} - k^2 l^2, \quad (30)$$

и волновое число изменяется в пределах

$$\frac{\omega^2}{gh_2} < k^2 < \frac{\omega^2}{gh_1}. \quad (31)$$

Дисперсионное соотношение записывается в виде трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg}\mu = \frac{h_2}{h_1}\sqrt{k^2 l^2 - \frac{\omega^2 l^2}{gh_2}}. \quad (32)$$

Дисперсионные кривые краевых волн над шельфом-ступенькой показаны на рис. 5 для параметров, близких к Калифорнийскому шельфу ($h_1 = 0.6$ км, $h_2 = 3.6$ км, $l = 250$ км) [43].

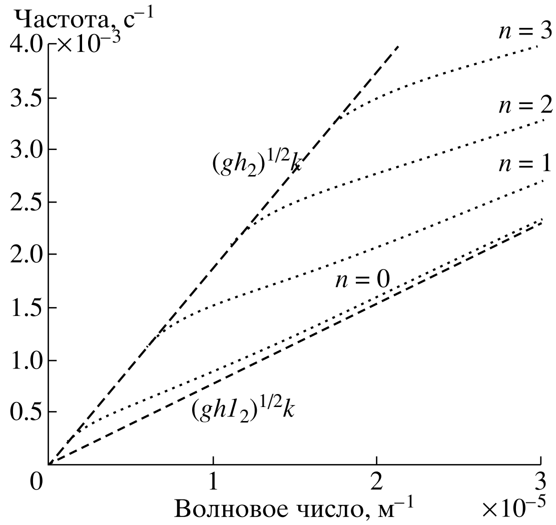

Рис. 5. Дисперсионные кривые для краевых волн над шельфом-ступенькой.

Интеграл (13), описывающий вдольбереговую перестройку краевых волн над плоским ступенчатым шельфом может быть вычислен явно для произвольной моды и выражается формулой

$$A^2 \sim$$
$$\sim \frac{2}{k\left\{h_1 l + \dfrac{h_1 \sin 2l\sqrt{\dfrac{\omega^2}{gh_1} - k^2}}{2\sqrt{\dfrac{\omega^2}{gh_1} - k^2}} + \dfrac{h_2 \cos^2 l\sqrt{\dfrac{\omega^2}{gh_1} - k^2}}{2\sqrt{k^2 - \dfrac{\omega^2}{gh_2}}}\right\}}. \quad (33)$$

Рис. 6 демонстрирует изменения амплитуды низшей ($n = 0$) моды краевых волн в соответствии с (33) при медленном изменении параметров шельфа. Амплитуда нормирована на значение A_0 получаемое при $h_1 = 0.4$ км, $h_2 = 5$ км, $l = 250$ км.

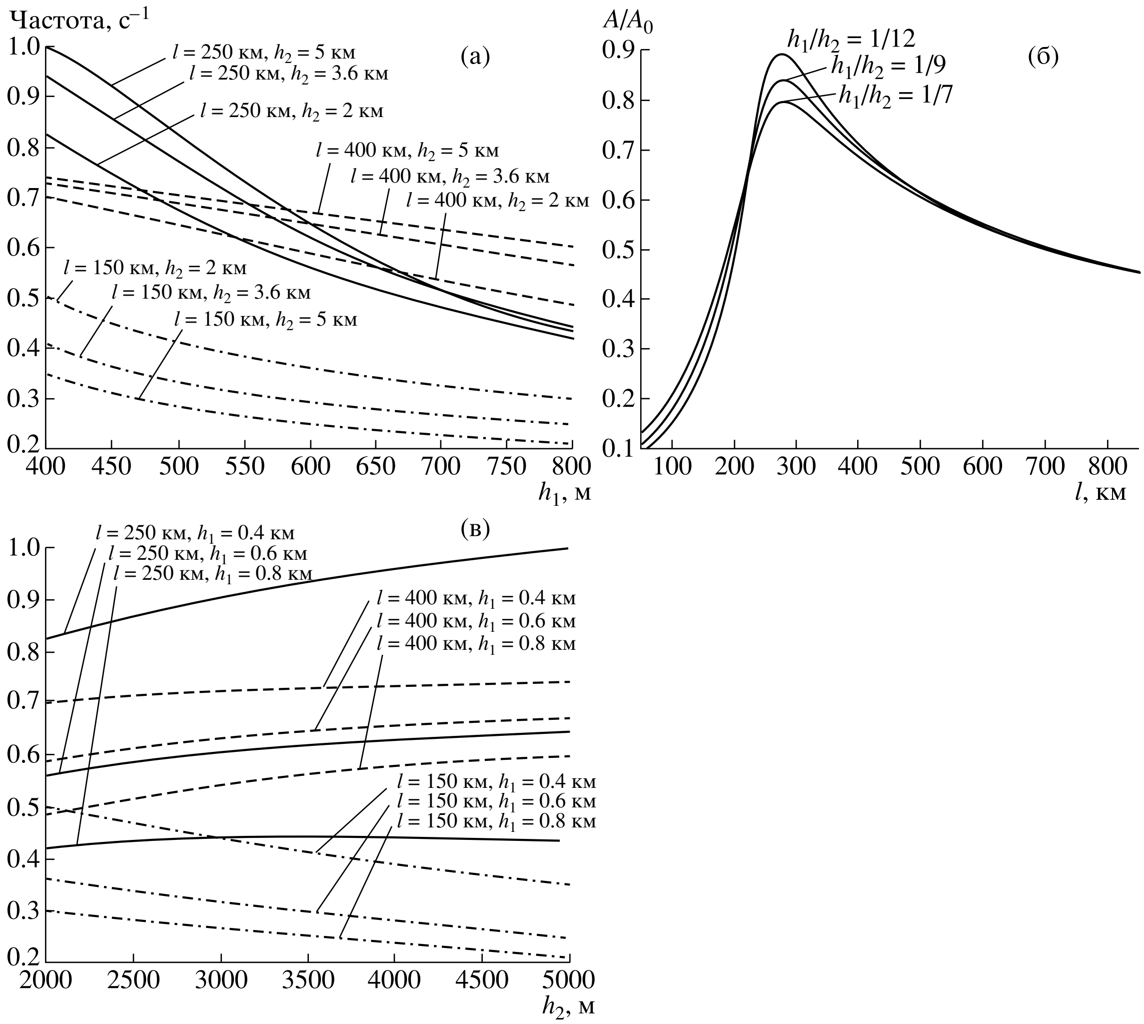

Рис. 6. Изменения амплитуды нулевой моды краевых волн: а – при изменении параметра h_1; б – при изменении l; в – при изменении h_2.

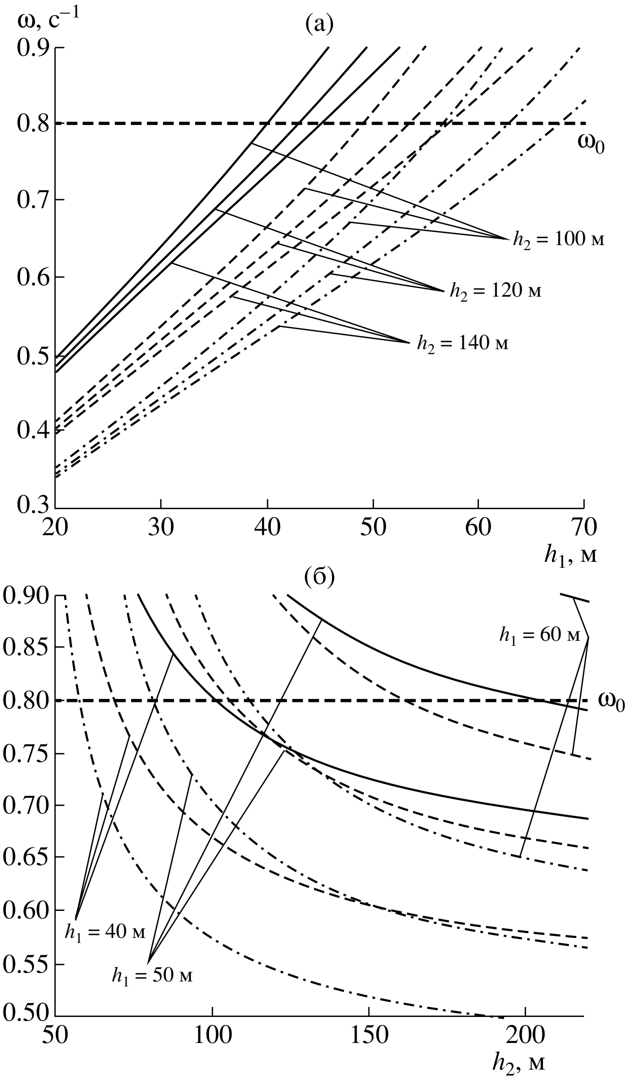

Рис. 7. Зависимость минимальной частоты первой моды краевых волн $\omega_1^{\min}$ от параметров шельфа-ступеньки: а – от h_1; б – от h_2 (сплошные линии соответствуют l = 100 км, пунктирные – l = 120 км, штрихпунтирные – l = 140 км).

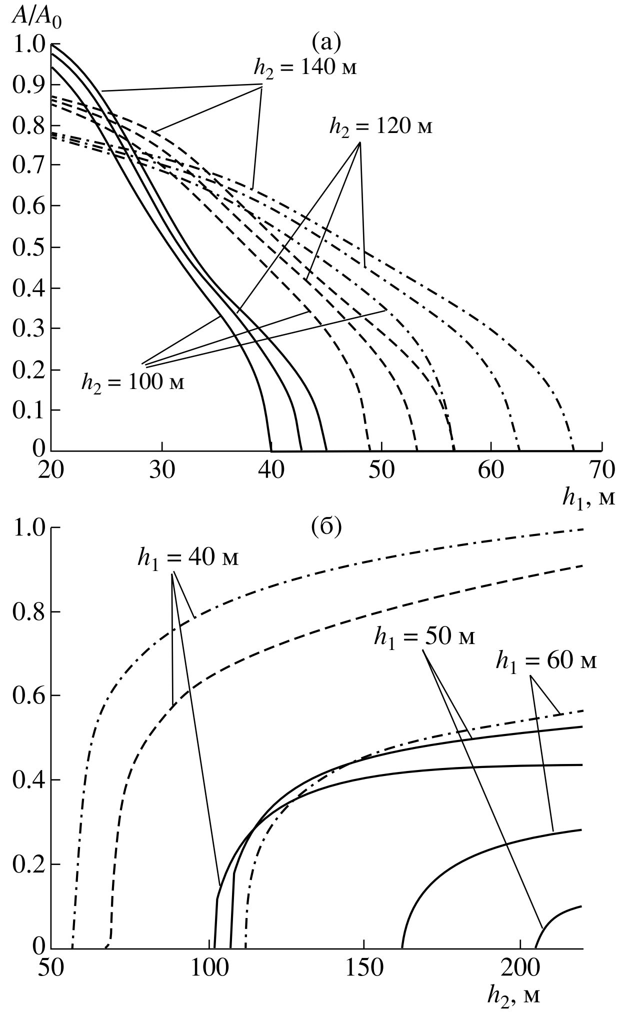

Рис. 8. Амплитуда первой моды краевых волн над шельфом-ступенькой в зависимости от параметров шельфа: а – от h_1; б – от h_2 (сплошные линии соответствуют l = 100 км, пунктирные – l = 120 км, штрихпунтирные – l = 140 км).

Когда глубина мелководной части шельфа увеличивается, амплитуда уменьшается (рис. 6,а); качественно это вполне согласуется с вычислениями в рамках других моделей шельфов. При изменениях ширины шельфа амплитуда изменяется немонотонно, имея максимум (рис. 6,б). В результате зависимость амплитуды от глубины h_2 также не является монотонной (рис. 6,в).

Как видно из рис. 5 и неравенства (31), для рассматриваемого профиля шельфа, так же как и в предыдущем случае, для всех мод, начиная с n = 1, имеет место эффект минимальной частоты, значение которой определяется для n-й моды выражением

$$\omega_n^{\min} = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{gh_1h_2}{h_2 - h_1}}. \tag{34}$$

На рис. 7 показана зависимость минимальной частоты первой моды от параметров шельфа. Видно, что минимальная частота растет с увеличением h_1 и уменьшается с ростом h_2. Эффект непропускания волны с частотой 0.8 с$^{-1}$ иллюстрируется рис. 8. Амплитуда такой волны приближается к нулю, когда параметры шельфа изменяются таким образом, что $\omega_1^{\min}$ достигает заданного значения частоты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагается адиабатическая теория мелководных линейных краевых волн над наклонным дном, глубина которого медленно изменяется во вдольбереговом направлении. С помощью асимптотической теории получено уравнение, описывающее изменения амплитуд волны вдоль берега. Полученные соотношения проиллюстрированы на примере трех различных профилей шельфа: линейный наклонный, экспоненциальный вогнутый и шельф-ступенька. Показано, что медленные изменения топографии шельфа могут приводить как к усилению, так и к ослаблению краевых волн. Отмечен эффект минимальной частоты, который может приводить к непропусканию волн старших мод.

Учет нелинейных слагаемых, несомненно, повлиял бы на вариации амплитуды краевых волн, однако оценка влияния нелинейности на решение поставленной задачи является предметом самостоятельного исследования и выходит за рамки данной работы.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 03-05-64975, № 03-05-06116), INTAS (№ 01-2156, 01-0330, 03-51-4286) и научной школы член-корр. РАН Б.В. Левина НШ–2104.2003.5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Huntley D.A., Bowen A.J.* Field observations of edge waves // Nature. 1973. V. 243. P. 160–162.
2. *Bowen A.J., Huntley D.A.* Waves, longwaves and nearshore morphology // Marine Geology. 1984. V. 60. P. 1–13.
3. *Huntley D.A., Guza R.T., Thornton E.B.* Field observation of surf beat 1. Progressive edge waves // J. Geoph. Res. 1981. V. 86. P. 6451–6466.
4. *Bryan K.P., Hows P.A., Bowen A.J.* Field observations of bar-trapped edge waves // J. Geoph. Res. 1998. V. 103. P. 1285–1305.
5. *Рабинович А.Б.* Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение. СПб.: Гидрометеоиздат, 1993. 325 с.
6. *Komar P.* Beach Processes and Sedimentation. – N.J.: Prentice-Hall, 1998. 620 p.
7. *Fredsoe J., Deigaard R.* Mechanics of coastal sediment transport. London: World Sci., 1992. 320 p.
8. *Guza R.T., Davis R.E.* Excitation of edge waves by waves incident on a beach // J. Geophys. Research. 1974. V. 79. P. 1285–1291.
9. *Foda M.A., Mei C.C.* Nonlinear excitation of long trapped waves by a group of short swell // J. Fluid Mech. 1981. V. 111. P. 319–345.
10. *Agnon Y., Mei C.C.* Trapping and resonance of long shelf waves due to groups of short waves // J. Fluid Mech. 1988. V. 195. P. 201–221.
11. *Miles J.W.* Parametrically excited standing edge waves // J. Fluid Mech. 1990. V. 214. P. 43–57.
12. *Blondeaux P., Vittori G.* The nonlinear excitation of synchronous edge waves by a monochromatic wave normally approaching a plane beach // J. Fluid Mech. 1995. V. 301. P. 251–268.
13. *Tang Y.M., Grimshaw R.* A modal analysis of coastally trapped waves generated by tropical cyclones // J. Phys. Oceanography. 1995. V. 25. P. 1577–1598.
14. *Ishii H., Abe K.* Propagation of tsunami on a linear slope between two flat regions. I. Eigenwave // J. Phys. Earth. 1980. V. 28. P. 531–541.
15. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
16. *Fujima K., Dozono R., Shigemura T.* Generation and propagation of tsunami accompanying edge waves on a uniform sloping shelf // Coastal Engineering Journal. 2000. V. 42. P. 211–236.
17. *Файн И.В., Шевченко Г.В., Куликов Е.А.* Изучение захваченных свойств Курильского шельфа лучевыми методами // Океанология. 1983. Т. 23. С. 23–26.
18. *Ball F.K.* Edge waves in an ocean of finite depth // Deep-Sea Research. 1967. V. 14. P. 79–88.
19. *Evans D.V., McIver P.* Edge waves over a shelf: full linear theory // J. Fluid Mech. 1984. V. 142. P. 79–95.
20. *Grimshaw R.* Edge waves: a long wave theory for oceans of finite depth // J. Fluid Mech. 1974. V. 62. P. 775–791.
21. *Munk W., Snodgrass F., Wimbush M.* Tides off-shore: transition from California coastal to deep-sea waters // Geophys. Fluid Dynamics. 1970. V. 1. P. 161–235.
22. *Ursell F.* Edge waves on a sloping beach // Proc. Royal Soc. London. 1955. V. A214. P. 79–97.
23. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. 845 с.
24. *Constantin A.* Edge waves along a sloping beach // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. V. 34. P. 9723–9731.
25. *Grimshaw R.* Nonlinear aspects of long shelf waves // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1977. V. 8. P. 3–16.
26. *Whitham G.B.* Nonlinear effects in edge waves // J. Fluid Mech. 1976. V. 74. P. 353–368.
27. *Minzoni A.* Nonlinear edge waves and shallow-water theory // J. Fluid Mech. 1976. V. 74. P. 369–374.
28. *Minzoni A., Whitham G.B.* On the excitation of edge waves on beaches // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. P. 273–287.
29. *Дубинина В.А., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е.* Слабонелинейные периодические краевые волны Стокса // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40. № 4. С. 525–530.
30. *Akylas T.R.* Large-scale modulation of edge waves // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 197–208.
31. *Yeh H.H.* Nonlinear progressive edge waves: their instability and evolution // J. Fluid Mech. 1985. V. 152. P. 479–499.
32. *Yang J.* The stability and nonlinear evolution of edge waves // Studied Applied Mathematics. 1995. V. 95. P. 229–246.
33. *Kenyon K.E.* A note on conservative edge wave interactions // Deep-Sea Research. 1970. V. 17. P. 197–201.
34. *Kirby J.T., Putrevu U., Ozkan-Haller H.T.* Evolution equations for edge waves and shear waves on longshore uniform beaches // Proc. 26th Int. Conf. Coastal Engineering. 1998. P. 203–216.

35. *Кочергин И.Е., Пелиновский Е.Н.* Нелинейное взаимодействие триады краевых волн // Океанология. 1989. Т. 29. № 6. С. 899–903.

36. *Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е., Дубинина В.А.* Резонансные трехволновые взаимодействия краевых волн Стокса // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42.

37. *Дубинина В.А., Куркин А.А., Полухина О.Е.* Нелинейная динамика краевых волн над линейно наклонным дном // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41. № 2. С. 124–128.

38. *Куркин А.А.* Динамика нестационарных краевых волн Стокса // Океанология. 2005. Т. 45. № 3. С. 325–331.

39. *Sheremet A., Guza R.T.* A weakly dispersive edge wave model // Coastal Engineering. 1999. V. 38. P. 47–52.

40. *Stoker T.F., Johnson E.R.* The trapping and scattering of topographic waves by estuaries and headlands // J. Fluid Mech. 1991. V. 222. P. 501–524.

41. *Baquerizo A., Losada M.A., Lozada I.J.* Edge wave scattering by a coastal structure // Fluid Dynamics Res. 2002. V. 31. P. 275–287.

42. *Дубинина В.А., Куркин А.А., Полухина О.Е.* Фокусировка краевых волн на шельфе моря // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. № 6. С. 839–848.

43. *Snodgrass F.E., Munk W.H., Miller G.R.* Long-period waves over California's continental borderland // J. Marine Research. 1962. V. 20. P. 3–30.w