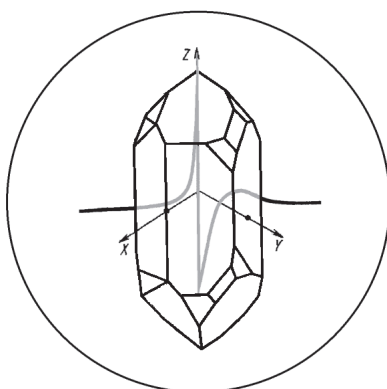


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК



ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Материалы Международной научно-технической
конференции «INTERMATIC – 2014»
1 – 5 декабря 2014 г., Москва

Под редакцией
академика РАН А.С. Сизова

Часть 4

Москва – 2014

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
ПРОБЛЕМЫ РАДИОЭЛЕКТРОННОГО
ПРИБОРОСТРОЕНИЯ**

Материалы Международной научно-технической
конференции «INTERMATIC – 2014»
1–5 декабря 2014 г., Москва

Под редакцией
академика РАН А.С. Сизова

Часть 4

**FUNDAMENTAL PROBLEMS
OF RADIOENGINEERING AND DEVICE
CONSTRUCTION**

Proceedings of the International Scientific and
Technical Conference «INTERMATIC – 2014»
December 1–5, 2014, Moscow

Edited by A. Sigov

Part 4

Москва - 2014

УДК 539.1: 621.315.5: 621.382:

Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения / Материалы Международной научно-технической конференции «INTERMATIC–2014», 1–5 декабря 2014 г., Москва. / Под ред. академика РАН А.С. Сигова. – М.: МГТУ МИРЭА, 2014, часть 4. – 208 с.

ISBN 978-5-7339-1059-8 (ч. 4)
978-5-7339-1055-0

В настоящий сборник включены материалы Международной НТК «INTERMATIC–2014», отражающие новые результаты научных и инженерных исследований в области радиоэлектронного приборостроения.

Сборник рассчитан на специалистов в области физической электроники и технологии радиоэлектронного приборостроения. Он также может быть использован преподавателями, аспирантами и студентами при изучении соответствующих курсов.

В настоящий сборник также включены соответствующие теме материалы VI Всероссийской научно-технической школы-конференции молодых ученых «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения – 2014», 2–5 декабря 2014 г., Москва.

Выполнено при финансовой поддержке РФФИ

Редакционная коллегия:

Ю.В. Гуляев (председатель), А.С. Аджемов, К.А. Воротилов,
П.А. Лучников, И.В. Соловьев, С.А. Никитов, В.Г. Орлов,
А.С. Сигов (ответственный редактор)

Научное издание

Компьютерная верстка – *Д.С. Серегин*

Редакционно-издательский отдел МГТУ МИРЭА
119454, Москва, Проспект Вернадского, д. 78, тел. +7 495 950-53-81

Подписано в печать с оригинал-макета 26.11.2014 г.
Формат 84x108/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 21,84. Уч.изд. л. 20,66.
Тираж 250 экз.

Отпечатано в типографии ООО «Галлея-Принт»

ISBN 978-5-7339-1059-8 (ч. 4)
978-5-7339-1055-0

© МГТУ МИРЭА,
2014

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

**ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ РАН
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ
И АВТОМАТИКИ**

**МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИКИ**

ПРИ УЧАСТИИ:

**ГОМЕЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. Ф. СКОРИНЫ**

**НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
ЖУРНАЛА «НАНОМАТЕРИАЛЫ И НАНОСТРУКТУРЫ»**

ЖУРНАЛА «НАУКОЕМКИЕ ТЕХНОЛОГИИ»

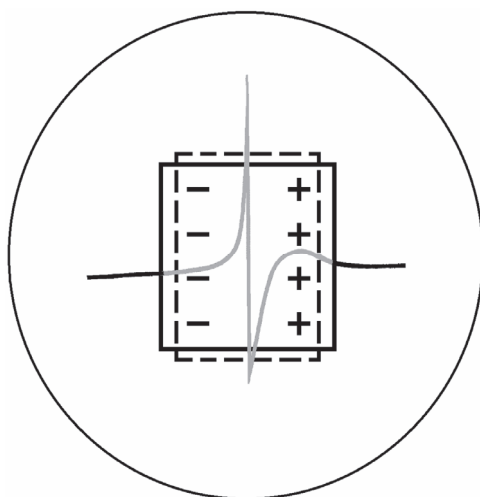
ЖУРНАЛА «РАДИОТЕХНИКА»

О Р Г К О М И Т Е Т

Гуляев Ю.В.	- (Россия) - председатель
Сигов А.С.	- (Россия) - зам. председателя
Аджемов А.С.	- (Россия) - зам. председателя
Лучников П.А.	- (Россия) - ученый секретарь
Бержанский В.Н.	- (Украина)
Ибраев Н.Х.	- (Казахстан)
Камильджанов Б.И.	- (Узбекистан)
Кудж С.А.	- (Россия)
Мальцев П.П.	- (Россия)
Перно Ф.	- (Франция)
Рогачев А.В.	- (Беларусь)
Скотт Дж.	- (Великобритания)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Никитов С.А.	– председатель,
Орлов В.Г.	– ученый секретарь,
Безруков В.Н.,	Воротилов К.А.,
Захаров А.К.,	Есаулов Н.П.,
Капустин В.И.	Крашенинников А.И.,
Лось В.П.,	Морозов А.И.,
Нефедов В.И.,	Ивашов Е.Н.,
Резниченко Л.А.,	Санников В.Г.,
Сидорин В.В.,	Соколов В.В.,
Соловьев И.В.,	Суржиков А.П.,
Фетисов Ю.К.,	Шаврин С.С.



Приборы и компоненты РЭА

СОДЕРЖАНИЕ

Приборы и компоненты РЭА	5
1. Косарев Р.А., Фрейдович И.А., Прокофьев Б.В. Проектирование многолучевого клистрона с кольцевыми резонаторами, работающими на виде колебаний E020	7
2. Зима В.Н., Танская Т.Н., Козлов А.Г. Тонкопленочный СВЧ-резонатор с брэгговским отражателем	11
3. Завгородняя М.И., Лавров И.В. Модель оптического фильтра на основе плёнки из текстурированного нанокompозита с несколькими видами серебряных включений	15
4. Масальский Н.В. Новый подход схемотехнического моделирования характеристик двух затворных КНИ КМОП нанотранзисторов	19
5. Булаев И.Ю. Тестер динамических параметров КМОП-микросхем	23
6. Савченко Е.М., Першин А.Д., Будяков А.С., Пронин А.А. СВЧ МИС усилителя мощности с диапазоном рабочих частот 2,6-3,4 ГГц и выходной мощностью до 5 Вт	26
7. Савченко Е.М., Гладких М.В., Першин А.Д., Пронин А.А. Результаты проектирования и исследования СВЧ МИС аттенуаторов с фиксированным коэффициентом ослабления	30
8. Макеев М.О., Иванов Ю.А., Мешков С.А. Кинетика вольт-амперной характеристики AlAs/GaAs резонансно-туннельного диода в результате диффузионных процессов в его структуре	34
9. Ерёмин Е.О. Алгоритм оценивания проникающей способности оптико-электронной системы звёздного датчика при проведении лётных испытаний	37
10. Белкин М.Е., Гладышев И.В. Методы регистрации механических микровоздействий на оптическое волокно	41
11. Кубасов И.В., Малинкович М.Д., Жуков Р.Н., Киселев Д.А., Ксенич С.В., Быков А.С., Тимушкин Н.Г., Темиров А.А., Пархоменко Ю.Н. Прецизионные безгистерезисные актюаторы микро- и нанодиапазона перемещений на основе ниобата лития	45
12. Серов В.Н., Шестаков Е.И. Разработка бустеров тока для переносных устройств с батарейным питанием	49
13. Удалов А.И. Ионная гидродинамическая модель аккумулятора: от модели к технологии восстановления емкости аккумулятора	52
14. Меньшиков В.В. Перспективы использования методов оптимизации выборочного контроля изделий космических аппаратов в интересах развития космической отрасли	57

15. Савченко Е.М., Мартынов А.А., Будяков А.С., Вагин А.В. Программно-аппаратный стенд для измерения параметров СВЧ МИС квадратурных модуляторов	62
16. Мушинский А.А. Алгоритм расчета тонкопленочных резисторов	66
17. Асташов С.Г., Калашников Д.А. Компьютерное моделирование процесса холодной настройки мощного предельно-волноводного магнетрона	72
18. Демин И.Е., Козлов А.Г. Динамические характеристики отклика газовых сенсоров на основе $\text{In}_2\text{O}_3\text{-Ga}_2\text{O}_3$	76
19. Герасин А.А. Электромеханические преобразователи энергии в летательных аппаратах	80
20. Таганов А.О., Гуцо Ю.П., Дергунов Н.И. Рельефографический модулятор света для устранения спекл-шума	84
21. Мустафаева Д.Г., Мустафаев М.Г. Технологические подходы при создании, эксплуатации и применении пленочных преобразователей	88
22. Бардин В.А., Васильев В.А., Чернов П.С. Состояние и задачи в области создания пьезоактюаторов и пьезодвигателей	90
23. Белкин М.Е., Гладышев И.В., Хмельницкий И.В. Многоучастковая волоконно-оптическая охранная система	94
24. Ряднов А.Ю. Численное моделирование процесса автоэмиссии для планарных торцевых автоэмиссионных структур	98
25. Ивашов Е.Н., Федотов К.Д., Яговцев В.О. Методы сепарабельного программирования и отсекающих плоскостей в задаче проектирования нанообъектов	102
26. Дударев К.П. Анализ тепловых режимов и термодформации узлов многолучевого клистрона	106
27. Евдулов О.В., Евдулов Д.В. Выпрямитель переменного напряжения	110
28. Зверев М.М., Гамов Н.А., Жданова Е.В., Студенов В.Б., Мазалов А.В., Курешов В.А., Сабитов Д.Р., Падалица А.А., Мармалюк А.А. Импульсный лазер с электронно-лучевой накачкой на основе квантоворазмерной структуры InGaN/GaN	113
29. Ивашов Е.Н., Федотов К.Д., Яговцев В.О. Оптимизация технического решения пьезопривода для нанотехнологии	116
30. Ивашов Е.Н., Федотов К.Д., Яговцев В.О. Применение методов штрафной функции и Флетчера-Ривса в задаче оптимизации пьезоприводов	120
31. Иовдальский В.А., Герасименко С.В., Аюпов И.Н. Совершенствование конструкции ГИС СВЧ – диапазона	124
32. Иовдальский В.А., Герасименко С.В., Аюпов И.Н. Многокристальный составной ПТШ для ГИС усилителей мощности СВЧ-диапазона	128

33. Кожухова А.А., Терентьев Д.А. Разработка методики настройки и юстировки магнитных систем на основе плоских магнитов для многолучевых клистронов миллиметрового диапазона	131
34. Котрелева Н.С. Проектирование мощного предельно-волноводного магнетрона с частотой рабочего вида 0.915 ГГц	135
35. Сергеев С.М., Степихова М.В., Новиков А.В. Исследование фотолюминесценции дисковых микрорезонаторов, сформированных на базе светоизлучающих структур SOI/Ge(Si)	138
36. Мазур В.Г., Пудалов А.Д. Генератор первичного измерительного преобразователя сорбционно-частотного измерителя влажности органических жидкостей	142
37. Ирзаев Г.Х. Оптимизация конструкции изделия по технологичности с использованием количественных критериев	146
38. Клюев А.В. Взрывной и 1/F шум в полупроводниковых планарных диодах с Ti-Au/GaAs барьером Шоттки	150
39. Пантюхин М.А., Самойлин Е.А. Метод размножения нейросетевых оценок при построении кусочно-линейных контуров в распознающих оптоэлектронных приборах	154
40. Савочкина М.М., Голев Д.М. Измерительная установка для проверки механической преобразующей системы волоконно-оптического датчика давления	158
41. Рогожников А.А. Создание математической модели многослойных актюаторов	162
42. Сальников Я.В. Времяимпульсный способ преобразования сигналов с индуктивных датчиков	165
43. Сергеев В.А., Фролов И.В., Широков А.А. Связь распределения примеси в гетероструктурах светодиодов с изменением мощности излучения в начале ускоренных испытаний	167
44. Тренкаль Е.И., Бомбизов А.А., Лоцилов А.Г., Осипов К.Ю. Модулятор лазерного излучения	170
45. Сергеев В.А., Фролов И.В., Широков А.А. Анализ токовых зависимостей низкочастотного шума светодиодов на основе двухсекционной шумовой эквивалентной схемы	174
46. Смирнов Д.А. Моделирование автономных генераторов энергии на основе пьезоэффекта	178
47. Урлапов О.В., Шорин А.М. Установка лазерной терапии крови ULT-5	181
48. Холопов В.А., Руднева Л.Ю. Особенности автоматизированной технологии сборки специальных изделий	183

49. Приступчик Н.К. Метод передаточных матриц для моделирования наноэлектромеханических преобразователей перемещения	187
50. Васильев В.А., Москалев С.А., Ползунов И.А., Шокоров В.А. Совершенствование структур и улучшение технических характеристик датчиков давления на основе микроэлектромеханических систем	191
51. Владыкина И.С. Система дефектоскопии железнодорожных путей на основе постоянных магнитов	195
52. Мамай А.В., Гамаюнов А.Р. Тиристорная система плавного пуска асинхронного двигателя	199
53. Бычкова К.А., Пыльнов Ю.В. Алгоритм ультразвуковой реконструктивной томографии вихревых потоков жидкостей	201

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ И ФЛЕТЧЕРА-РИВСА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПЬЕЗОПРИВОДОВ

© 2014 г. Е.Н. ИВАШОВ, К.Д. ФЕДОТОВ, В.О. ЯГОВЦЕВ

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва
e-mail: ienmiem@mail.ru, zenflak@gmail.com

Применение пьезоприводов в нанотехнологии позволяет достигать высоких результатов в плане точности позиционирования зонда, что в свою очередь позволяет достичь высокого качества снимков поверхности подложки или модификации поверхности подложки для достижения определенных функциональных результатов. С целью оптимизации конструкции пьезопривода целесообразно использовать методы штрафной функции и Флетчера-Ривса.

Основная идея метода штрафной функции состоит в преобразовании задачи минимизации функции $z = f(x)$ с соответствующими ограничениями, наложенными на x , в задачу поиска минимума без ограничений функции $Z = f(x) + P(x)$, где функция $P(x)$ является штрафной. Необходимо, чтобы при нарушении ограничений она «штрафовала» функцию Z , т. е. увеличивала ее значение. В этом случае минимум Z будет находиться внутри области ограничений. Функция $P(x)$, удовлетворяющая этому условию, может быть не единственной. Задачу минимизации можно сформулировать следующим образом: минимизировать функцию $z = f(x)$ при ограничениях $c_j(x) > 0, j = 1, 2, \dots, m$.

Функцию $P(x)$ удобно записать следующим образом:

$$P(x) = r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)},$$

где r – положительная величина. Функция $Z = \varphi(x, r)$ принимает вид

$$Z = \varphi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)}.$$

В таком случае, если x принимает допустимые значения, для которых $c_j(x) \geq 0$, то Z принимает значения, которые больше соответствующих значений $f(x)$ (истинной целевой функции задачи), разность можно уменьшить за счет того, что r может быть очень малой величиной. Но если x принимает значения, которые хотя и являются допустимыми, но близки к границе области ограничений, и, по крайней мере, одна из функций $c_j(x)$ близка к нулю, тогда значения функции $P(x)$ и, следовательно, значения Z станут очень велики. Таким образом, влияние функции $P(x)$ состоит в создании «гребня с крутыми краями» вдоль каждой границы области ограничений. Следовательно, если поиск начинается из допустимой точки и осуществляется поиск минимума функции $\varphi(x, r)$ без ограничений, то минимум, конечно, будет достигаться внутри допустимой области для задачи с ограничениями. Полагая r достаточно малой величиной, для того, чтобы влияние $P(x)$ было малым в точке минимума, мы можем сделать точку минимума функции $\varphi(x, r)$ без ограничений совпадающей с точкой минимума функции $f(x)$ с ограничениями. В общем случае невозможно аналитически определить положение минимума функции $\varphi(x, r)$, рассматривая ее как обычную функцию от r . Для его определения следует обратиться к численным методам. Следует отметить, что если целевая функция $f(x)$ выпукла, а функция $c_j(x)$ вогнута, то функция $\varphi(x, r)$, заданная вышеприве-

денным уравнением, также является выпуклой функцией в области ограничений, которая сама является выпуклой. Следовательно, $\varphi(x, r)$ имеет для данного значения r единственный минимум. Если x_1 и x_2 – точки, принадлежащие допустимой области, т.е. $c_j(x_1) \geq 0$ и $c_j(x_2) \geq 0$ для $j = 1, 2, \dots, m$, то при $0 < \theta < 1$ справедливо неравенство $c_j(\theta x_2 + (1 - \theta)x_1) \geq \theta c_j(x_2) + (1 - \theta)c_j(x_1) \geq 0$, так как функция $c_j(x)$ выпукла. Допустимая область так же является выпуклой.

Таким образом, точка $x_2 + (1 - \theta)x_1$ при $0 < \theta < 1$ также является допустимой. Кроме того, функция $1/c_j(x)$ является выпуклой для всех x , которые удовлетворяют неравенству $c_j(x) \geq 0$. Если $h(x) = 1/c_j(x)$, то

$$\nabla h(x) = \frac{-\nabla c_j(x)}{[c_j(x)]^2}.$$

Следовательно, гессиан функции $h(x)$ имеет вид

$$H(x) = -\frac{C(x)}{[c_j(x)]^2} + \frac{2\nabla c(x)\nabla c(x)^T}{[c_j(x)]^3},$$

где $C(x)_{ik} = \partial^2 c_j(x) / \partial x_i \partial x_k$ есть гессиан функции $c_j(x)$. Тогда, если p – произвольный вектор, тогда справедливо равенство

$$p^T H(x) p = -\frac{p^T C(x) p}{[c_j(x)]^2} + \frac{2[p^T \nabla c_j(x)]^2}{[c_j(x)]^3},$$

где всегда $p^T H(x) p > 0$, так как $C(x)$ – матрица с отрицательным определителем, так как $c_j(x)$ – выпуклая функция и $c_j(x) \geq 0$. Тогда матрица $H(x)$ положительно определена и $1/c_j(x)$ выпукла во всей области.

Предположим, что $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ – минимальные точки функции $\varphi(x, r)$ для убывающей последовательности значений $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$, стремящейся к нулю. Тогда последовательность точек $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, \dots$ сходится к оптимальному решению задачи с ограничениями при $r_k \rightarrow 0$, следовательно,

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} [\min \varphi(x, r_k)] = f(x^*),$$

где x^* – минимальная точка функции $f(x)$ при наличии ограничений.

Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ ($r_k \rightarrow 0$)

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} \varphi(x_k^*, r_k) = f(x^*), \quad f(x_k^*) \rightarrow f(x^*),$$

$$r_k \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x_k^*)} \rightarrow 0.$$

Очевидно, что если функция $f(x)$ выпукла, а функция $c_j(x)$ при $j=1, \dots, n$ вогнута, то функция $\varphi(x, r)$ при наличии ограничений имеет единственный минимум. Выбор начального значения r может оказаться важным с точки зрения сокращения числа итераций при минимизации функции $\varphi(x, r)$. Если сначала r выбрано очень малым, для того, чтобы функция $\varphi(x, r)$ мало отличалась от функции $f(x)$, то метод будет сходиться очень быстро. Однако такой выбор может привести к серьезным осложнениям при вычислениях. Для малых r функция $\varphi(x, r)$ будет быстро меняться в окрестности минимума, что может вызвать затруднения при использовании градиентного метода. Слишком большое значение r может привести к тому, что штрафная функция $P(x)$ в уравнении станет доминирующей. Поэтому «разумный» выбор начальной точки очень важен. Для многих задач «разумным» значением для начальной точки является значение $r_0 = 0$. Более рациональный подход состоит в том, чтобы понять, что если начальная точка x будет лежать вблизи минимума функции

$$\varphi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)} = f(x) + rP(x),$$

то градиент функции $\varphi(x, r)$ будет мал:

$$\nabla \varphi(x, r) = \nabla f(x) + r \nabla P(x).$$

Квадрат нормы этого вектора

$$\nabla f(x)^T \nabla f(x) + 2r \nabla f(x)^T \nabla P(x) + r^2 \nabla P(x)^T \nabla P(x)$$

и минимум будет достигнут при

$$r = \frac{-\nabla f(x)^T \nabla P(x)}{\nabla P(x)^T \nabla P(x)}.$$

Метод Флетчера-Ривса основан на том, что для квадратичной функции n переменных n одномерных поисков вдоль взаимно сопряженных направлений позволяют найти минимум. Функция $f(x)$, зависящая от N -мерного вектора переменных x , называется сепарабельной, если она представляется в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из N переменных. Таким образом,

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i).$$

Записывая для удобства $f_i^{(k)} = f_i(x_i^{(k)})$, можно следующим образом представить выражение для аппроксимирующей функции:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K_1} \lambda_1^{(k)} f_1^{(k)} + \sum_{k=1}^{K_2} \lambda_2^{(k)} f_2^{(k)} + \dots + \sum_{k=1}^{K_N} \lambda_N^{(k)} f_N^{(k)},$$

где

$$x_i = \sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)}, i = 1, \dots, N,$$

причем при всех $i=1, \dots, N$

$$\sum_{k=1}^{K_i} \lambda_i^{(k)} = 1, \lambda_i^{(k)} \geq 0, k = 1, \dots, K_i, \lambda_i^{(i)} \lambda_i^{(j)} = 0, i > j + 1$$

$$i = 1, 2, \dots, K_i - 1.$$

Рассмотрим функцию, описанную выражением $f(x) = a + b^T x + \frac{1}{2} x^T G x$

Одномерный поиск будем вести вдоль направлений, взаимно сопряженных по отношению к матрице G . В качестве первого направления поиска из первой точки x_1 возьмем направление наискорейшего спуска $d_1 = -g_1$, и найдем значение λ_1 , минимизирующее функцию $f(x_1 + \lambda d_1)$. Положим $x_2 = x_1 + \lambda_1 d_1$ и произведем поиск в направлении d_2 , сопряженном направлению d_1 (выберем вектор d_2 как линейную комбинацию векторов d_1 и $-g_2$), и найдем $x_3 = x_2 + \lambda_2 d_2$ минимизацией функции $f(x_2 + \lambda d_2)$. Направление поиска d_3 из точки x_3 выбирается сопряженной направлениям d_1 и d_2 . На $(k+1)$ шаге выбираем d_{k+1} в виде линейной комбинации $-g_{k+1}, d_1, d_2, \dots, d_k$, сопряженной всем направлениям d_1, d_2, \dots, d_k .

Таким образом, $d_{k+1} = -g_{k+1} + \sum_{r=1}^k \alpha_r d_r, k = 1, 2, \dots$

Оказывается, что все α_r равны нулю, за исключением α_k , так что

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \alpha_k d_k \text{ и } \alpha_k = g_{k+1}^2 / g_k^2.$$

Прежде чем перейти к индуктивным рассуждениям, докажем справедливость предыдущих отношений при $k = 1$. Поскольку $f(x_2) = f(x_1 + \lambda_1 d_1)$ является минимумом функции $f(x_1 + \lambda d_1)$ на прямой, то $g_2^T d_1 = -g_1^T d_1 = 0$. Данный результат так же справедлив для квадратичных функций $g_2 = b + Gx_2, g_1 = b + Gx_1$. Тогда, если d_1 и $d_2 = -g_2 + \alpha_1 d_1$ сопряжены, то $d_2^T G d_1 = 0$, т.е. $-g_2^T G d_1 + \alpha_1 d_1^T G d_1$, следовательно, $\frac{(-g_2^T - \alpha_1 g_1^T) G (x_2 - x_1)}{\lambda_1} = 0$,

Откуда $(-g_2^T - \alpha_1 g_1^T)(g_2 - g_1) = 0$. Таким образом, $-g_2^T + \alpha_1 g_1^T = 0$. Из чего следует $\alpha_1 = g_2^2 / g_1^2$, что и требовалось доказать. Это и есть соотношение при $k = 1$. Для доказательства соотношений $d_{k+1} = -g_{k+1} + \alpha_k d_k$ и $\alpha_k = g_{k+1}^2 / g_k^2$ по индукции, полагая, что векторы d_1, d_2, \dots, d_k получены описанным выше способом и являются взаимно сопряженными. Точка $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ является минимумом функции $f(x_k + \lambda d_k)$ на прямой $x_k + \lambda_k d_k$. Тогда $g_{k+1}^T d_k = 0$. Имеем $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k = x_{k-1} + \lambda_{k-1} d_{k-1} + \lambda_k d_k$ и т.д.

Таким образом, $x_{k+1} = x_{j+1} + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i d_i$, при $1 \leq j \leq k-1$, следовательно, $Gx_{k+1} = Gx_{j+1} + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i G d_i$, тогда $g_{k+1}^T = g_{j+1}^T + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i d_i^T G$, при $1 \leq j \leq k-1$, откуда $g_{k+1}^T d_j = g_{j+1}^T d_j + \sum_{i=j+1}^k \lambda_i d_i^T G d_j$.

В результате преобразований получим $g_{j+1}^T d_j = 0$ и из-за взаимной сопряженности $d_i^T G d_j = 0$ при $j < i$. Таким образом, каждое слагаемое в правой части равно нулю. Следовательно, $g_{k+1}^T d_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k-1$ и по причине $g_{k+1}^T d_k = 0$ окончательно получаем $g_{k+1}^T d_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k$. Таким образом, вектор g_{k+1} ортогонален векторам d_1, d_2, \dots, d_k , а так же векторам g_1, g_2, \dots, g_k .

Так как в начале доказательства по индукции было предположено $d_j = -g_j + \alpha_{j-1} d_{j-1}$, то приведенное выше соотношение принимает вид:

$$-g_{k+1}^T g_j + \alpha_{j-1} g_{k+1}^T d_{j-1} = 0,$$

следовательно, $-g_{k+1}^T g_j = 0$, поскольку $g_{k+1}^T d_{j-1} = 0$, таким образом, $g_{k+1}^T g_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k$. Необходимо так же показать, что вектор d_{k+1} , определенный ранее, сопряжен с векторами d_1, d_2, \dots, d_k .

Для $j = 1, 2, \dots, k-1$ имеем $d_{k+1}^T G d_j = -g_{k+1}^T G d_j + \alpha_k d_k^T G d_j = -g_{k+1}^T G d_j$ в силу взаимной сопряженности.

Тогда

$$-g_{k+1}^T G d_j = -g_{k+1}^T G \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\lambda_j} = -g_{k+1}^T \frac{(g_{j+1} - g_j)}{\lambda_j} = 0.$$

Таким образом, $d_{k+1}^T G d_k = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k-1$, и это справедливо для любого α_k так, чтобы выполнялось равенство $d_{k+1}^T G d_k = 0$, а именно: $d_{k+1}^T G d_k = -g_{k+1}^T G d_k + \alpha_k d_k^T G d_k = -g_{k+1}^T \frac{(g_{k+1} - g_k)}{\lambda_k} + \alpha_k (-g_k^T + \alpha_{k-1} d_{k-1}^T) \frac{(g_{k+1} - g_k)}{\lambda_k}$.

Следовательно, $d_{k+1}^T G d_k = \frac{-g_{k+1}^T + \alpha_k g_k^T}{\lambda_k}$ в силу соотношений $g_{k+1}^T d_j = 0$ и $g_{k+1}^T g_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, k$. Направление d_{k+1} будет сопряжено с направлением d_k , если $\alpha_k = g_{k+1}^2 / g_k^2$, что и требовалось доказать.

Из всего этого следует, что направления поиска в методе Флетчера-Ривса являются взаимно сопряженными и в данном методе минимум квадратичной функции n переменных можно найти не более, чем за n шагов. Это значит, что одномерный поиск производится с нужной точностью, и устраняются любые ошибки округления, которые могут возникнуть. Вышеописанный метод будет применим и к неквадратичным функциям, так как если поиск осуществляется вблизи минимума, то можно надеяться на достижение квадратичной сходимости, когда имеет место квадратичная аппроксимация. Флетчер и Ривс полагают, что в этой ситуации каждое n -ное направление поиска должно быть направлением наискорейшего спуска и при построении сопряженных направлений необходимо обнулить поиск и начать заново.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. О градиентных методах решения задач оптимального управления системами, описываемыми параболическими уравнениями. В кн. Оптимальное управление. – М.: Знание. – 197 с. С. 118-143.
2. Ивашов Е.Н., Федотов К.Д. Подсистема автоматизированного проектирования элементов пьезоэлектрических устройств / Вестник машиностроения. – 2014. – №6. – с. 30-36.