УДК 519.17

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О РАСКРАСКЕ В ОДНОМ КЛАССЕ ГРАФОВ

Д.С. Малышев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Н. Новгород

dsmalyshev@rambler.ru

Поступила в редакцию 26.02.2014

Показывается, что задача о раскраске полиномиально разрешима в классе графов $Free(\{claw, bull\})$.

Ключевые слова: задача о раскраске, наследственный класс, полиномиальный алгоритм.

Введение

Классом графов называется произвольное множество обыкновенных графов, т.е. неориентированных непомеченных графов без петель и кратных рёбер. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Эквивалентно – это класс, который можно задать запрещёнными порождёнными подграфами. Если $\mathbf{X}$ – множество графов, то через $Free(\mathbf{X})$ обозначается класс всех графов, не содержащих порождённых подграфов, изоморфных графам из $\mathbf{X}$. Множество графов $\mathbf{Y}$ является наследственным классом тогда и только тогда, когда $\mathbf{Y} = Free(\mathbf{X})$ для некоторого $\mathbf{X}$, а сам $\mathbf{X}$ называется *множеством запрещённых порождённых подграфов*.

Хроматическим числом графа называется наименьшее число цветов, необходимое для раскрашивания его вершин так, чтобы соседние вершины имели бы разные цвета. *Задача о раскраске* для заданного графа и натурального числа состоит в том, чтобы определить, не больше ли хроматическое число этого графа, чем заданное число. Данная задача является NP-полной в классе всех графов и остаётся таковой даже при значительных сужениях этого множества графов. Известен сложностной статус задачи о раскраске в совокупности классов $\{Free(\{H\}) : |V(H)| \leq 4\}$ кроме трёх случаев [1]. В работе [2] рассматривалось семейство $\{Free(\{H_1, H_2\}) : H_1, H_2$ – связные графы с не более чем пятью вершинами$\}$, и для всех его классов, кроме тринадцати, был определён сложностной статус задачи о раскраске. Одним из этих тринадцати классов является $Free(\{claw, bull\})$, где $claw$ – граф с четырьмя вершинами и тремя рёбрами, инцидентными общей вершине, $bull$ – граф с вершинами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и рёбрами $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_5)$. В этой работе показывается, что задача о раскраске полиномиально разрешима для его графов.

Вспомогательные результаты

Через $G_1 \oplus G_2$ обозначается объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин.

Лемма 1. Любой связный граф из класса $Free(\{claw, bull\})$ принадлежит множеству $Free(\{C_4 \oplus K_1, C_5 \oplus K_1, ...\})$.

Доказательство. Пусть G – связный граф из класса $Free(\{claw, bull\})$, содержащий порождённый подграф $C_n \oplus K_1$, где $n \geq 4$. Рассмотрим кратчайший порождённый путь P, соединяющий изолированную вершину подграфа $C_n \oplus K_1$ с его циклом. Пусть x – вершина P, имеющая соседа в цикле C_n и не принадлежащая этому циклу (такая вершина единственна). Если вершина x смежна сразу со всеми вершинами C_n, то некоторые два её соседа из C_n, она сама и её сосед в пути P порождают подграф, изоморфный $claw$. Поэтому x не является смежной сразу со всеми вершинами C_n. Ясно, что если $(x, y), y \in V(C_n)$, то x смежна хотя бы с одним соседом (в C_n) вершины y. Нетрудно видеть, что граф G содержит $bull$ в качестве порождённого подграфа (порождён x, тремя её последовательными вершинами из C_n и некоторой вершиной пути P – соседом x). Поэтому G не может содержать порождённого подграфа $C_n \oplus K_1$ при $n \geq 4$.

Из леммы 1 следует, что в произвольном связном графе из $Free(\{claw, bull\})$ любой цикл длины не менее чем 4 доминирует все вершины. Для наследственного класса $\mathbf{X}$ и целого неотрицательного числа k через $[\mathrm{X}]_k$ обозначается множество графов, из которых удалениями не более чем k вершин можно получить граф из $\mathbf{X}$.

Лемма 2 [2]. Пусть $\mathbf{X}$ – наследственный класс с полиномиально разрешимой задачей о раскраске, для которого задача распознавания принадлежности графа решается за полиномиальное время и при некотором p справедливо включение $\mathrm{X} \subseteq Free(\{O_p\})$. Тогда для любого фиксированного k задача о раскраске полиномиально разрешима и в классе $[\mathrm{X}]_k$.

Лемма 3. Задача о раскраске для класса $Free(\{claw, bull\})$ полиномиально сводится к той же задаче для класса $Free(\{claw, bull, C_4, C_5\})$.

Доказательство. Пусть G – связный граф из $Free(\{claw, bull\})$, содержащий цикл C_n, где $n \in \{4,5\}$. По лемме 1 данный цикл доминирует все вершины графа *G*. Обозначим через H подграф *G*, получающийся удалением всех вершин цикла C_n. Покажем, что $H \in Free(\{O_3\})$. Предположим противное: H содержит три попарно несмежных вершины x, y, z. Пересечение окрестности каждой из них с C_n – неединичная совокупность последовательных вершин цикла. Не существует вершины C_n, смежной сразу со всеми тремя вершинами x, y, z (иначе $G \in Free(\{claw, bull\})$). Через $N'(x), N'(y), N'(z)$ обозначим пересечения окрестностей вершин x, y, z с C_n, через S обозначим набор $(|N'(x)|, |N'(y)|, |N'(z)|)$. Будем считать, что $|N'(x)| \leq |N'(y)| \leq |N'(z)|$ (это никак не уменьшает общности).

Пусть $n = 4$. Среди элементов набора S есть хотя бы одна двойка и одновременно нет тройки и четвёрки, двух четвёрок (иначе цикл имеет вершину, смежную с x, y, z одновременно). Остаётся три случая – $S = (2,2,2)$, $S = (2,2,3)$, $S = (2,3,3)$. Нетрудно проверить, что в каждом из этих случаев граф G содержит $claw$ или $bull$ в качестве порождённого подграфа.

Пусть $n = 5$. Среди элементов набора S нет двоек (иначе $G \notin Free(\{bull\})$), нет пятёрок и двух четвёрок (иначе $G \notin Free(\{claw\})$). Остаётся два случая – $S = (3,3,3)$, $S = (3,3,4)$. В обоих этих случаях $G \notin Free(\{claw, bull\})$.

Итак, обе возможности $n = 4$ и $n = 5$ приводят к противоречию. Поэтому $H \in Free(\{O_3\})$. Задача о раскраске полиномиально разрешима в классе $Free(\{O_3\})$ (поскольку она эквивалентна задаче о максимальном паросочетании для дополнительных графов), и поэтому по лемме 2 она полиномиально разрешима для связных графов из $Free(\{claw, bull\}) \setminus Free(\{C_4, C_5\})$. Тем самым, имеет место обозначенное в формулировке леммы сведение.

Основной результат

Граф называется *циркулярным*, если он является графом пересечений дуг окружности. Циркулярный граф называется *правильным циркулярным*, если в некотором его представлении через пересечение дуг окружности ни одна из дуг не содержит целиком другую дугу. Минимальное множество запрещённых порождённых подграфов для класса правильных циркулярных графов известно и полностью описано в [3].

Теорема 1. Задача о раскраске полиномиально разрешима в классе $Free(\{claw, bull\})$.

Доказательство. Множество $Free(\{claw, bull, C_4, C_5, C_6 \oplus K_1, C_7 \oplus K_1, ...\})$ состоит только из правильных циркулярных графов. В этом можно убедиться, рассмотрев множество запрещённых порождённых подграфов для класса правильных циркулярных графов [3]. Задача раскраске полиномиально разрешима в классе правильных циркулярных графов [4]. Отсюда и из лемм 1, 3 следует полиномальная разрешимость задачи о раскраске в классе $Free(\{claw, bull\})$.

Исследование осуществлено в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013–2014 гг., проект № 12-01-0035. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-1148.2013.1 и гранта РФФИ 14-01-00515-а.

Список литературы

1. Lozin V.V., Malyshev D.S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Applied Mathematics (submitted).
2. Malyshev D.S. The coloring problem for classes with two small obstructions // [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1307/02778v1.
3. Lin M.C., Szwarcfiter J.L. Characterizations and recognition of circular-arc graphs and subclasses: A survey // Discrete Mathematics. 2009. V. 309. № 18. P. 5618–5635.
4. Bhattacharya B., Hell P., Huang J. A linear algorithm for maximum weight cliques in proper circular arc graphs // SIAM J. Discrete Mathematics. 1996. V. 9. № 2. P. 274–289.

POLYNOMIAL-TIME SOLVABILITY OF THE COLORING PROBLEM IN SOME GRAPH CLASS

D.S. Malyshev

The coloring problem is shown to be polynomial-time solvable for the graph class $Free(\{claw, bull\})$.

Keywords: coloring problem, hereditary class, polynomial-time algorithm.

References

1. Lozin V.V., Malyshev D.S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Applied Mathematics (submitted).

2. Malyshev D.S. The coloring problem for classes with two small obstructions // [Ehlektronnyj resurs]. Rezhim dostupa: http://arxiv.org/abs/1307/02778v1.

3. Lin M.C., Szwarcfiter J.L. Characterizations and recognition of circular-arc graphs and subclasses: A survey // Discrete Mathematics. 2009. V. 309. № 18. P. 5618–5635.

4. Bhattacharya B., Hell P., Huang J. A linear algorithm for maximum weight cliques in proper circular arc graphs // SIAM J. Discrete Mathematics. 1996. V. 9. № 2. P. 274–289.