

Робастные и адаптивные системы

© 2015 г. М.Г. ЗОТОВ, д-р техн. наук (zotova35@mail.ru)
(Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
“Высшая школа экономики”)

ГРАФИЧЕСКАЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМЫ РОБАСТНОГО КРИТЕРИЯ ХАРИТОНОВА

Приведены построенные на базе робастного критерия Найквиста графический и алгебраический аналоги теоремы Харитонова. Графический аналог отличается от годографа Цыпкина – Поляка.

1. Введение

Для решения задач классической теории управления был создан достаточно обширный аппарат по оценке устойчивости линейных систем. Несмотря на то что они оценивают один и тот же показатель, каждый из них нашел свое исключительное место в решении конкретных задач теории управления. Однако применение частотных критериев устойчивости к решению задач выявило некоторые проблемы их использования. С появлением более сложных объектов управления и повышением требований к качеству управления ими классическая теория оказалась неприменимой. Возникла теория конструирования оптимальных систем, однако и в ней в полной мере не учитывались реалии функционирования систем. Этот пробел начинает закрывать теория робастных систем, в которой весьма важной является проблема робастной устойчивости. Робастная устойчивость гарантирует устойчивость системы в условиях параметрической неопределенности объекта управления. Регулятор, обеспечивающий это свойство, называется робастным. В большинстве случаев робастный регулятор успешно заменяет сложные в эксплуатации адаптивные регуляторы. С появлением направления, связанного с конструированием регуляторов для объектов с неопределенностью встала задача трансформации классических критериев устойчивости к новым условиям их использования. Появился аналог робастного критерия устойчивости Найквиста [1–3]. На основе критерия Михайлова был сформулирован робастный критерий Харитонова [4].

1.1. Графическая форма робастного критерия Найквиста [3]

Пусть неопределенность $\Delta(j\omega)$ удовлетворяет условию

$$(1) \quad |\Delta(j\omega)| \leq \nu |W(j\omega)|$$

при всех ω для некоторой функции $W(s)$, $\sup_{\omega} |W(j\omega)^{-1} \Delta(j\omega)| \leq \nu$.

И пусть все

$$(2) \quad H(s) = H_n(s) + \Delta(s)$$

имеют одинаковое число p неустойчивых полюсов при всех допустимых $\Delta(s)$. Замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда годограф

$$(3) \quad \tilde{H}(j\omega) = \frac{H_n(j\omega) + 1}{|W(j\omega)|} - 1, \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

охватывает круг с центром в точке $(-1, j0)$ и радиусом ν $p/2$ раз против часовой стрелки, не пересекая круга [3]. $H_n(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы при номинальном значении ее параметров.

В сформулированном критерии накладываются жесткие ограничения на реализации $H(s)$: они должны содержать совпадающее число неустойчивых полюсов. Случай расположения полюсов на мнимой оси не рассматривается.

1.2. Алгебраическая форма робастного критерия Найквиста

Если полюсы $H_n(s)$ лежат только в левой полуплоскости, то робастная устойчивость замкнутой системы эквивалентна условию [3]

$$(4) \quad |H_n(j\omega) + 1| > \nu |W(j\omega)|.$$

Условие (4) имеет место, когда полюсы реализаций $H(s)$ находятся только в левой полуплоскости. Жесткие ограничения на реализации $H(s)$ сохраняются.

Как будет показано далее, перечисленные ограничения имеют место и в классическом варианте критерия Найквиста, а приведенные его робастные аналоги лишь их воспроизводят. Классический критерий Найквиста характеризуется сложностью его использования в случаях, когда полюсы разомкнутой системы находятся на мнимой оси и справа от нее.

Отметим, что как и в классической теории управления, для каждого критерия робастной устойчивости со временем найдется область его использования при решении практических и теоретических задач. Разнообразие критериев – положительный фактор. Хронология развития теории робастного управления приведена в [3]. Там же дана большая библиография.

2. Постановка задачи

Пусть характеристический полином реальной системы имеет вид

$$(5) \quad T(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0.$$

Параметры a_i принадлежат некоторому множеству S . Полином называется робастно устойчивым, если он устойчив при любых значениях a_i из множества S . Задача об устойчивости полинома, где параметры a_i задаются интервально, успешно решается с использованием критерия Харитоновна [4]. Ставится задача придать этому критерию более удобные для анализа графическую и алгебраическую формы.

3. Решение задачи

3.1. Критерии Найквиста и Михайлова

Для решения поставленной задачи используется робастный критерий Найквиста [3], но он предварительно модифицируется так, чтобы избавиться от присущих ему перечисленных в разделе 1 недостатков. Применяемый способ для начала продемонстрируем на обычных классических неробастных критериях. Как известно, критерий Найквиста оперирует передаточной функцией разомкнутой системы $H_H(s) = M_H(s)/N_H(s)$. По годографу $H_H(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, системы в разомкнутом состоянии и количеству лежащих в правой полуплоскости корней полинома $N_H(s)$ определяется, является ли характеристический полином замкнутой системы $T_H(s) = N_H(s) + M_H(s)$ полиномом Гурвица. В соответствии со сказанным на рис. 1,а приведена схема системы со звеном коррекции в прямой цепи. На рис. 1,б приведена вспомогательная схема, в которой передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$(6) \quad H_H^*(s) = \frac{M_H^*(s)}{N_H^*(s)} = \frac{T_H(s) - D(s)}{D(s)},$$

здесь $D(s)$ – полином той же степени, что и $T_H(s)$. Схемы на рис. 1 имеют совпадающие характеристические полиномы, когда системы замкнуты, но имеют и существенные различия, что поясняется далее.

Для упрощения решения вопроса об устойчивости в замкнутом состоянии примем, что передаточная функция разомкнутой вспомогательной системы, т.е. полинома $D(s)$, имеет корни только в левой полуплоскости. Из рассмотрения исчезают случаи, когда полюсы передаточной функции разомкнутой системы лежат на мнимой оси и справа от нее. В этом случае определить количество оборотов годографа $H_H(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, иногда бывает сложно. Для решения же вопроса об устойчивости системы в замкнутом состоянии для вспомогательной схемы необходимо ответить лишь на вопрос: охватывает ли годограф $H_H^*(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, точку с координатами $(-1, j0)$. Если не охватывает, то системы на рис. 1,а и б в замкнутом состоянии устойчивы. По

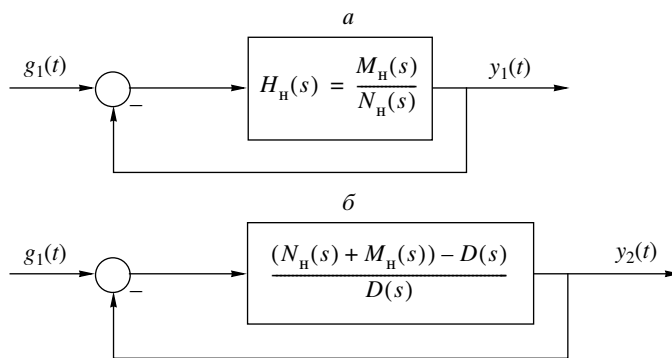


Рис. 1. а – Схема со звеном в прямой цепи, б – вспомогательная схема со звеном в прямой цепи.

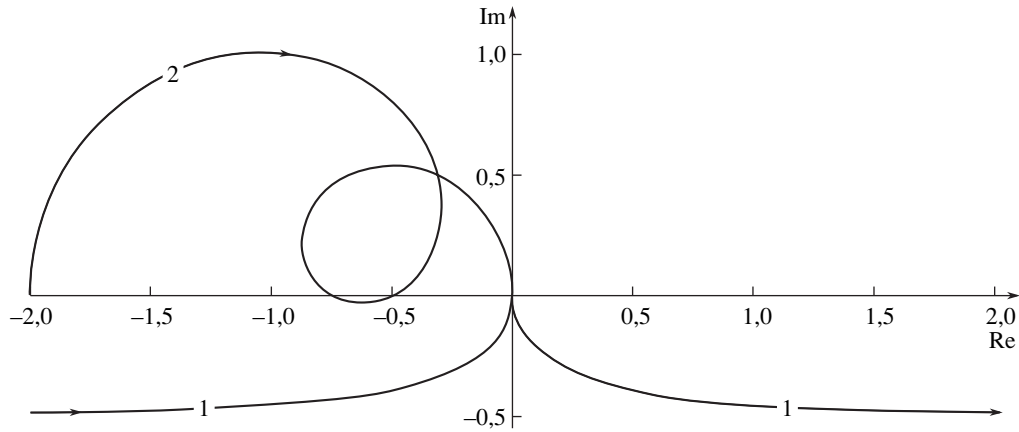


Рис. 2. 1 – Годограф функции $H_n(j\omega)$, 2 – годограф функции $H_n^*(j\omega)$.

числу оборотов годографа $H_n^*(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, вокруг точки $(-1, j0)$ можно легко определить число корней характеристического полинома замкнутой системы, расположенных в правой полуплоскости. Существенное различие схем на рис. 1: решение вопроса об устойчивости замкнутых систем с использованием вспомогательной схемы инвариантно относительно расположения корней полинома $N_n(s)$. Сказанное поясним на примере.

Пример 1. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид

$$H_n(s) = \frac{M_n(s)}{N_n(s)} = \frac{s(s+1)}{(s^2+1)(s-1)}.$$

Используя критерий Найквиста, определить, является ли система в замкнутом состоянии устойчивой.

На рис. 2 приведен годограф $H_n(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$ (кривая 1). Определить по нему, поворачивается ли он вокруг точки $(-1, j0)$ на π радиан или не поворачивается, – задача не из простых. На том же рисунке приведен (кривая 2) годограф

$$\begin{aligned} H_n^*(j\omega) &= \frac{(N_n(j\omega) + M_n(j\omega)) - D(j\omega)}{D(j\omega)} = \\ &= \frac{((j\omega^2 + 1)(j\omega - 1) + j\omega(j\omega + 1)) - (j\omega + 1)^3}{(j\omega + 1)^3}, \quad \omega = 0, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо, чтобы годограф $H_n^*(j\omega)$ вокруг точки $(-1, j0)$ не поворачивался, но он повернулся на π радиан по часовой стрелке. Значит, характеристический полином замкнутой системы имеет один корень в правой полуплоскости. Действительно,

$$T_n(s) = (s^2 + 1)(s - 1) + s(s + 1) = (s^2 + 0,4534s + 2,2056)(s - 0,4534).$$

Из сказанного следует: для ответа на вопрос об устойчивости приведенной на рис. 1, а схемы годограф Найквиста целесообразнее строить, исполь-

зую вспомогательную схему на рис. 1,б, особенно если полюсы разомкнутой системы располагаются на мнимой оси.

Отметим, что классический критерий Найквиста обладает важным свойством: по нему можно исследовать устойчивость систем с обратной связью на основе экспериментально снятых частотных характеристик звеньев, образующих контур. Однако экспериментальное определение частотных характеристик разомкнутых систем с полюсами в правой полуплоскости и на мнимой оси представляет большую проблему. В случае расположения корней полинома $N_H(s)$ на мнимой оси и справа от нее целесообразнее использовать критерий Михайлова, но обычно масштаб при его построении выбирается с трудом. Заметим, что от этого недостатка легко избавиться, исследуя годограф $T_H(j\omega)/D(j\omega)$. Критерию Харитонова присущи также недостатки его классического аналога, т.е. критерия Михайлова. Выбор масштаба построения годографов, а их четыре, как уже было сказано, сложен. Обычно определяют корни полиномов Харитонова.

3.2. Модифицированный робастный критерий Найквиста

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$(7) \quad H(s) = (M_H(s) + \delta_1(s))/(N_H(s) + \delta_2(s)),$$

где $\delta_1(s)$ и $\delta_2(s)$ – неопределенности. Необходимо найти условия, при которых характеристический полином замкнутой системы $T(s) = N_H(s) + M_H(s) + \delta(s)$ имеет корни только в левой полуплоскости, $\delta(s) = \delta_1(s) + \delta_2(s)$. Для решения задачи обобщим изложенный в подразделе 3.1 подход. Рассмотрим вспомогательную схему, имеющую в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$(8) \quad H^*(s) = \frac{T(s) - D(s)}{D(s)} = \frac{T_H(s) - D(s)}{D(s)} + \frac{\delta(s)}{D(s)} = H_H^*(s) + \Delta(s),$$

$$H_H^*(s) = \frac{T_H(s) - D(s)}{D(s)}.$$

Системы с передаточными функциями $H^*(s)$ и $H(s)$ имеют в замкнутом состоянии совпадающие характеристические полиномы $T(s)$. Главное отличие в передаточных функциях $H^*(s)$ и $H(s)$ заключается в полиномах знаменателя. У передаточной функции $H^*(s)$ расположение корней полинома $D(s)$ можно выбрать произвольно, в том числе только в левой полуплоскости. У передаточной функции $H(s)$ корни полинома $N_H(s) + \delta_2(s)$ в общем случае могут быть и на мнимой оси, что существенно усложняет решение задачи, если оно вообще возможно.

3.2.1. Графическая форма модифицированного робастного критерия Найквиста

Согласно робастному критерию Найквиста из подраздела 1.1 для случая, когда $D(s)$ имеет корни только в левой полуплоскости, сформулируем: пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид (8), т.е. тот же, что

и (2), и пусть неопределенность $\Delta(s)$ в (8) удовлетворяет условию

$$(9) \quad |\Delta(j\omega)| = \left| \frac{\delta(j\omega)}{D(j\omega)} \right| \leq \nu |W(j\omega)|.$$

Согласно критерию из подраздела 1.1 замкнутая система робастно устойчива, т.е. устойчив полином $T(s)$, тогда и только тогда, когда годограф

$$(10) \quad \tilde{H}^*(j\omega) = \frac{H_{\text{н}}^*(j\omega) + 1}{|W(j\omega)|} - 1 = \frac{\frac{T_{\text{н}}(j\omega) - D(j\omega)}{D(j\omega)} + 1}{|W(j\omega)|} - 1 = \frac{T_{\text{н}}(j\omega)}{D(j\omega)|W(j\omega)|} - 1, \\ \omega = 0, \dots, \infty,$$

не охватывает (полином $D(s)$ имеет только корни из левой полуплоскости) и не пересекает круг с центром в точке $(-1, j0)$ и радиусом ν .

3.2.2. Алгебраическая форма модифицированного робастного критерия Найквиста

Сформулированный в подразделе 3.2.1 критерий из-за наличия у полинома $D(s)$ только корней из левой полуплоскости равнозначен выполнению соотношения (4) [3]:

$$(11) \quad |H_{\text{н}}^*(j\omega) + 1| = |T_{\text{н}}(j\omega)/D(j\omega)| > \nu |W(j\omega)|.$$

Из соотношений (9) и (11) следует, что

$$(12) \quad \left| \frac{T_{\text{н}}(j\omega)}{D(j\omega)} \right| > \left| \frac{\delta(j\omega)}{D(j\omega)} \right|, \text{ или } \left| \frac{\delta(j\omega)}{T_{\text{н}}(j\omega)} \right| < 1.$$

Если условие (12) выполняется, то полином $T(s) = T_{\text{н}}(s) + \delta(s)$ имеет корни только в левой полуплоскости. Никаких ограничений на местоположение корней реализаций полинома $N_{\text{н}}(s) + \delta_2(s)$ в отличие от приведенной в подразделе 1.2 алгебраической формы робастного критерия Найквиста не накладывается.

Отметим, что так как полиномы $T_{\text{н}}(s)$ и $D(s)$ в (10) имеют одинаковую степень и корни только из левой полуплоскости, то годограф $T_{\text{н}}(j\omega)/(D(j\omega)|W(j\omega)|)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, поворачивается вокруг начала координат на нуль градусов, а годограф $\tilde{H}^*(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, точку $(-1, j0)$ не охватывает.

Подведем итог. В классическом робастном критерии Найквиста передаточная функция разомкнутой системы задается в виде $H(s) = \frac{M_{\text{н}}(s)}{N_{\text{н}}(s)} + \Delta(s)$. Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф функции

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{H_{\text{н}}(j\omega) + 1}{|W(j\omega)|} - 1 = \frac{N_{\text{н}}(j\omega) + M_{\text{н}}(j\omega)}{N_{\text{н}}(j\omega)|W(j\omega)|} - 1, \quad \omega = 0, \dots, \infty, \\ |\Delta(j\omega)| \leq \nu |W(j\omega)|,$$

охватил круг радиуса ν с центром в точке $(-1, j0)$ $p/2$ раз против часовой стрелки, не пересекая его. При этом должно выполняться ограничение: все реализации $H(s)$ должны иметь одинаковое число p правых полюсов.

В модифицированном робастном критерии Найквиста передаточная функция разомкнутой системы задается в виде $H^*(s) = \frac{M_H(s) + \delta_1(s)}{N_H(s) + \delta_2(s)}$. Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф функции

$$\tilde{H}^*(j\omega) = \frac{T_H(j\omega)}{D(j\omega) |W(j\omega)|} - 1 = \frac{N_H(j\omega) + M_H(j\omega)}{D(j\omega) |W(j\omega)|} - 1, \quad \omega = 0, \dots, \infty,$$

$$\left| \frac{\delta_1(j\omega) + \delta_2(j\omega)}{D(j\omega)} \right| \leq \nu |W(j\omega)|,$$

не охватывал и не пересекал круг радиуса ν с центром в точке $(-1, j0)$. Никаких ограничений на расположение полюсов реализаций функции $H^*(s)$ не накладывается. Они могут находиться даже на мнимой оси.

3.3. Графическая форма критерия Харитонова

Теперь обратимся к случаю, когда коэффициенты полинома $T(s)$ заданы интервально:

$$(13) \quad T(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0 =$$

$$= (s^n + a_{n-1}^0(1 \pm \delta_{n-1})s^{n-1} + \dots + a_2^0(1 \pm \delta_2)s^2 + a_1^0(1 \pm \delta_1)s + a_0^0(1 \pm \delta_0)) =$$

$$= (s^n + a_{n-1}^0s^{n-1} + \dots + a_2^0s^2 + a_1^0s + a_0^0) +$$

$$+ (\pm a_{n-1}^0\delta_{n-1}s^{n-1} \pm \dots \pm a_2^0\delta_2s^2 \pm a_1^0\delta_1s \pm a_0^0\delta_0) = T_H(s) + \delta(s).$$

Здесь a_i^0 – номинальное значение параметра, $\pm a_i^0\delta_i$ – пропорциональная номинальному значению величина отклонения, $(a_i^0 - a_i^0\delta_i \leq a_i \leq a_i^0 + a_i^0\delta_i, a_i^0 - a_i^0\delta_i > 0)$, δ_i – коэффициент пропорциональности, $\delta(s)$ – полином отклонения, $\deg(\delta(s)) \leq \deg(T_H(s))$. В статье принято, что единичный коэффициент при s^n разбросов не имеет.

С учетом (13) перепишем соотношение (8) в виде

$$(14) \quad H^*(s) = \frac{T_H(s) - D(s)}{D(s)} + \frac{\pm a_{n-1}^0\delta_{n-1}s^{n-1} \pm \dots \pm a_2^0\delta_2s^2 \pm a_1^0\delta_1s \pm a_0^0\delta_0}{D(s)} =$$

$$= H_H^*(s) + \Delta(s).$$

Часто величины δ_i совпадают. В этом случае соотношение (14) будет иметь вид

$$(15) \quad H^*(s) = \frac{T_H(s) - D(s)}{D(s)} + \delta \frac{\pm a_{n-1}^0s^{n-1} \pm \dots \pm a_2^0s^2 \pm a_1^0s \pm a_0^0a_0}{D(s)} =$$

$$= H_H^*(s) + \Delta(s).$$

Примем, что частотная неопределенность (9) удовлетворяет соотношению

$$(16) \quad |\Delta(j\omega)| = \left| \frac{\delta(j\omega)}{D(j\omega)} \right| \leq \left| \frac{\delta^\chi(j\omega)}{D(j\omega)} \right|,$$

где $\delta^\chi(s)$ – полином Харитонова, $\nu = 1$. В Приложении показано, что соотношения $|\delta^\chi(j\omega)/D(j\omega)|$ для всех полиномов Харитонова совпадают. Отметим, что соотношение (16) всегда имеет место, так как полиномы Харитонова $\delta^\chi(s)$ строятся по интервальному полиному отклонения $\delta(s)$. Концы

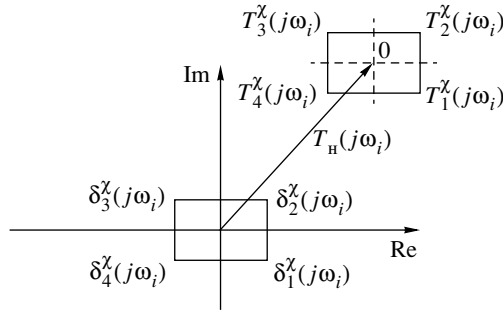


Рис. 3. Месторасположение точек годографов $T_l^x(j\omega_i)$ и $\delta_l^x(j\omega_i)$ ($l = \overline{1,4}$).

векторов $\text{Re } \delta(j\omega_i) + j\text{Im } \delta(j\omega_i)$ всегда находятся внутри прямоугольника, расположенного в начале координат рис. 3.

Согласно модифицированному робастному критерию Найквиста из подраздела 3.2.1 замкнутая система устойчива, т.е. устойчив интервальный полином

$$T(s) = T_H(s) + (\pm a_{n-1}^0 \delta_{n-1} s^{n-1} \pm \dots \pm a_2^0 \delta_2 s^2 \pm a_1^0 \delta_1 s \pm a_0^0 \delta_0)$$

тогда и только тогда, когда годограф

$$(17) \quad \tilde{H}^*(j\omega) = \frac{T_H(j\omega)}{D(j\omega) |\delta^x(j\omega)/D(j\omega)|} - 1, \quad \omega = 0, \dots, \infty,$$

не охватывает и не пересекает круг единичного радиуса ($\nu = 1$) с центром в точке $(-1, j0)$. Заметим, что так как полиномы $T_H(s)$ и $D(s)$ имеют одинаковые степени и корни только из левой полуплоскости, то годограф $\tilde{H}^*(j\omega)$ точку $(-1, j0)$ не охватывает, т.е. слова “не охватывает” в формулировке критерия можно опустить. Соотношение (17) следует из (10). Рассмотрим пример 2.

Пример 2. Задан номинальный полином шестой степени

$$T_H(s) = s^6 + 14s^5 + 80,25s^4 + 251,25s^3 + 502,72s^2 + 667,25s + 433,5.$$

Неопределенность коэффициентов составляет семь процентов от номинального значения, т.е. $\delta = 0,07$. Определить, является ли интервальный полином устойчивым. Для этой цели построим годограф (17). Для начала найдем входящую в него функцию $\delta^x(j\omega)/D(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \frac{\delta_1^x(s)}{D(s)} = \delta \left. \frac{-a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 - a_2 s^2 - a_1 s + a_0}{D(s)} \right|_{\delta=0,07} = \\ &= \frac{-0,98s^5 + 5,6175s^4 + 17,5875s^3 - 35,1904s^2 - 46,7075s + 30,345}{(s+1)^6}. \end{aligned}$$

На рис. 4,а приведены амплитудно-фазовые характеристики функций $\Delta(j\omega) = \delta_l^x(j\omega)/D(j\omega)$, $l = 1 - 4$, для четырех Харитоновских полиномов. При заданном значении ω обозначены четыре лежащие в вершинах прямоугольника точки. Приведенные на рис. 3,б модули $\Delta(j\omega)$ для всех полиномов

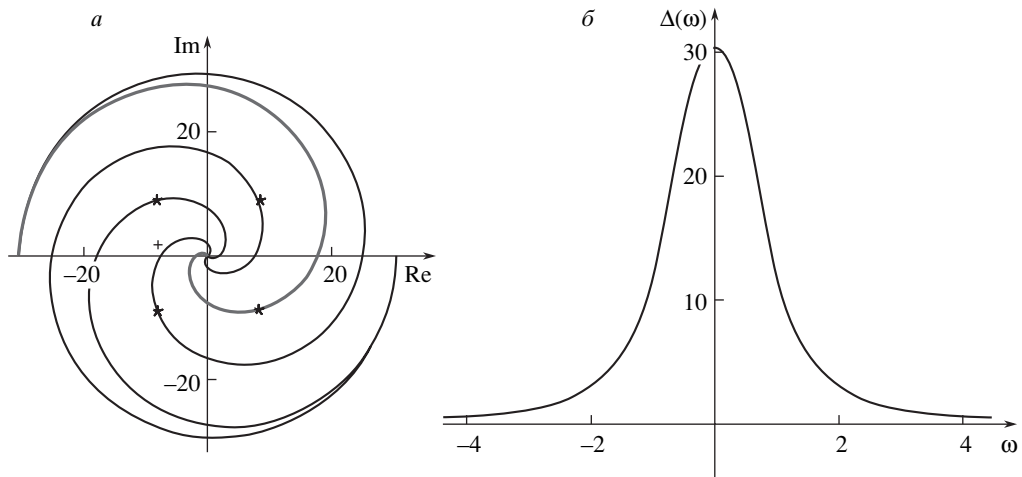


Рис. 4. *a* – Амплитудно-фазовые характеристики функций $\delta_i^x(j\omega)/D(j\omega)$ для четырех Харитоновских полиномов, *б* – зависимость модулей функций $\delta_i^x(j\omega)/D(j\omega)$ от частоты ω .

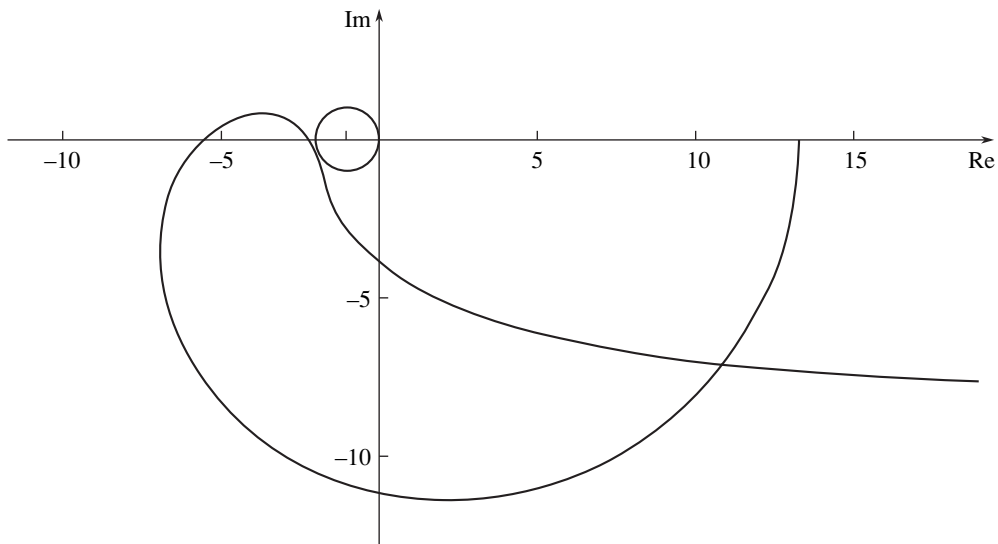


Рис. 5. Годограф функции $\tilde{H}^*(j\omega)$.

Харитонова совпадают. На рис. 5 для рассматриваемого примера приведена амплитудно-фазовая характеристика $\tilde{H}^*(j\omega)$, из которой следует: робастная устойчивость имеет место. По рис. 5 нетрудно определить, на какой процент можно увеличить неопределенность параметров исходного характеристического полинома.

В отличие от классического критерия Харитонова сформулированный критерий позволяет принимать решение, используя лишь один из полиномов Харитонова. Кроме того, по этому полиному легко определить δ – величину

ну возможной неопределенности параметров исходного характеристического полинома.

Если сравнить его с наиболее близким аналогом – критерием Цыпкина – Поляка, то и здесь предлагаемый критерий имеет преимущество. Число свойств, которым должен удовлетворять годограф устойчивой системы, минимальное. Годограф $\tilde{H}^*(j\omega)$ не должен пересекать круг единичного радиуса с центром в точке $(-1, j0)$.

3.4. Алгебраическая форма критерия Харитонова

Из соотношения (12)

$$\left| \frac{T_H(j\omega)}{D(j\omega)} \right| > \left| \frac{\delta^X(j\omega)}{D(j\omega)} \right|$$

или

$$(18) \quad \left| \frac{\delta^X(j\omega)}{T_H(j\omega)} \right| = \left| \frac{\pm a_{n-1}^0 \delta_{n-1}(j\omega)^{n-1} \pm \dots \pm a_2^0 \delta_2(j\omega)^2 \pm a_1^0 \delta_1(j\omega) \pm a_0^0 \delta_0}{s^n + a_{n-1}^0(j\omega)^{n-1} + \dots + a_2^0(j\omega)^2 + a_1^0(j\omega) + a_0^0} \right| < 1,$$

где знак \pm меняется на минус или плюс согласно правилам составления полиномов Харитонова.

Рассмотрим

Пример 3. Для полинома из примера 2 найти допустимый разброс его параметров. Значения параметров δ_i в (18) совпадают. Для исходных данных

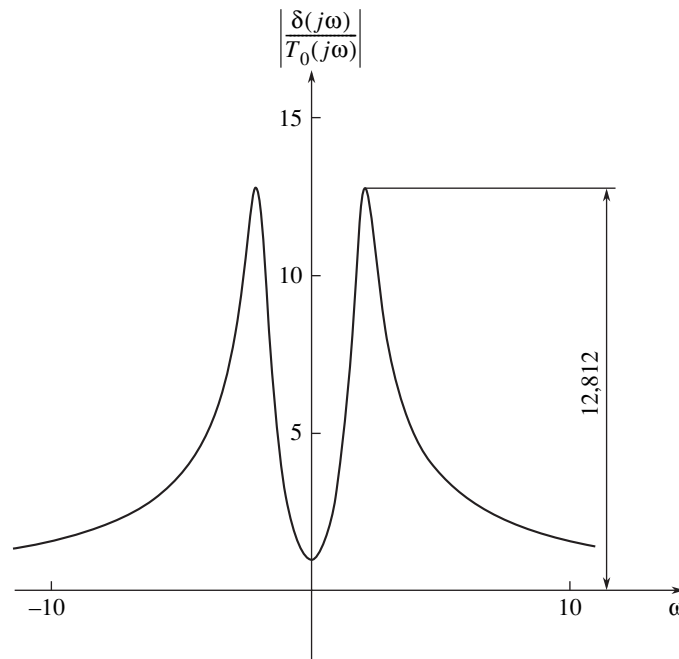


Рис. 6. График модуля функции $\delta_l^X(j\omega)/T_H(j\omega)$.

соотношение (18) будет иметь вид

$$\left| \frac{\delta^X(j\omega)}{T_H(j\omega)} \right| = \left| \delta \frac{-14(j\omega)^5 + 80,25(j\omega)^4 + 251,25(j\omega)^3 - 502,72(j\omega)^2 - 667,25(j\omega) + 433,5}{s(j\omega)^6 + 14(j\omega)^5 + 80,25(j\omega)^4 + 251,25(j\omega)^3 + 502,72(j\omega)^2 + 667,25(j\omega) + 433,5} \right| < 1.$$

На рис. 6 при значении $\delta = 1$ приведен график этой функции. Находим наибольшее значение δ , при котором выполняется неравенство (18), $\delta = 1/12,812 = 0,078$. Это есть верхняя граница робастности исследуемого полинома.

4. Заключение

1. Предложена отличная от классической интерпретация критерия Найквиста.

2. На основе п. 1 модифицирован робастный критерий Найквиста.

3. На базе модифицированного критерия Найквиста построены графический и алгебраический аналоги критерия Харитонована.

Основное отличие модифицированных критериев Найквиста от классических аналогов заключается в их инвариантности от местоположения в комплексной плоскости полюсов передаточной функции системы в разомкнутом состоянии.

Графический аналог критерия Харитонована для своего построения в комплексной плоскости использует в отличие от критерия Харитонована лишь один из полиномов Харитонована и в этом схож с критерием Цыпкина – Поляка, но факт устойчивости или неустойчивости определяется лишь одним параметром: пересекает или не пересекает годограф круг единичного радиуса с центром в точке $(-1, j0)$. Величина робастности характеризуется одним числом.

Алгебраический аналог критерия Харитонована выражается простым алгебраическим соотношением (18), которое может быть положено в основу построения алгоритма повышения степени робастности оптимальных систем за счет корректировки параметров регулятора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что $|\delta^X(j\omega)/D(j\omega)|$ для всех полиномов Харитонована совпадает. Рассмотрим интервальный полином (13):

$$\begin{aligned} T(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0 = \\ &= (s^n + a_{n-1}^0(1 \pm \delta_{n-1})s^{n-1} + \dots + a_2^0(1 \pm \delta_2)s^2 + a_1^0(1 \pm \delta_1)s + a_0^0(1 \pm \delta_0)) = \\ &= (s^n + a_{n-1}^0s^{n-1} + \dots + a_2^0s^2 + a_1^0s + a_0^0) + \\ &+ (\pm a_{n-1}^0\delta_{n-1}s^{n-1} \pm \dots \pm a_2^0\delta_2s^2 \pm a_1^0\delta_1s \pm a_0^0\delta_0) = T_H(s) + \delta(s). \end{aligned}$$

В (13) коэффициенты a_i заданы интервально $a_i^0 - a_i^0\delta_i \leq a_i \leq a_i^0 + a_i^0\delta_i$, что соответствует записи $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$. На рис. 3 для некоторого ω_i приведены четыре соответствующие полиномам Харитонована $T_l^X(j\omega_i)$ ($l = \overline{1, 4}$) точки.

Как известно, эти точки расположены в вершинах прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат. Обозначена также точка, соответствующая полиному $T_n(j\omega_i)$. Очевидно, что полиномам Харитонова $\delta_l^x(j\omega_i)$ ($l = \overline{1,4}$) на рис. 3 соответствуют также четыре точки. Они расположены в вершинах того же прямоугольника, в котором точка 0 совпадает с началом координат. Видно, что значения $|\delta_l^x(j\omega_i)|$ ($l = \overline{1,4}$) инвариантны относительно l . Точки $\delta_l^x(j\omega_i)/D(j\omega_i)$ ($l = \overline{1,4}$) от точек $\delta_l^x(j\omega_i)$ ($l = \overline{1,4}$) отличаются тем, что модули точек $\delta_l^x(j\omega_i)$ ($l = \overline{1,4}$) умножаются, а фазы сдвигаются на одну и ту же величину, обусловленную функцией $D(j\omega_i)$. На рис. 4,а такие функции приведены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и аперриодичности линейных систем // АиТ. 1990. № 9. С. 45–54.
Polyak B. T., Tsyupkin Ya. Z. Frequency Criteria of Robust Stability and Aperiodicity of Linear Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 9. Part 1. P. 1192–1200.
2. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастный критерий Найквиста // АиТ. 1992. № 7. С. 25–31.
Polyak B. T., Tsyupkin, Ya. Z. Robust Nyquist Criterion // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 7. Part 1. P. 25–31.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
4. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Диффер. уравнения. 1978. Т. 1. Вып. 11. С. 2086–2088.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 19.04.2012