УДК 519.17

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ. II

В.Е. Алексеев*[1]*, Д.В. Захарова*[1]*, Д.С. Малышев*[1,2]*,
***Д.Б. Мокеев*[1,2]*, С.В. Сорочан*[1]**

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Н. Новгород

dsmalyshev@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.08.2012

Рассматриваются вопросы асимптотического перечисления наследственных классов графов и их структурного описания, исследуется сложность некоторых задач на таких классах.

Ключевые слова: наследственный класс графов, запрещенный порожденный подграф, фильтрованный класс графов, энтропия, q-граф, энтропийно минимальный класс, граничный класс, минимальный сложный класс, задача о реберном списковом ранжировании, упаковки графов, покрытия графов.

Введение

Цель настоящей статьи, которая является продолжением аналогичной работы [1], – подведение итогов работ в области теории графов, выполненных в течение года коллективом авторов. Исследования велись в разных направлениях, и статья состоит из четырех частей, тематически слабо связанных между собой. Мы не приводим здесь доказательств, развернутое изложение будет дано в отдельных публикациях по каждой теме.

Объединяет части данной статьи то, что в них рассматриваются *наследственные классы графов*, т.е. множества графов, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин. Эквивалентно – это класс, который можно задать запрещенными порожденными подграфами. Если **X** – множество графов, то через *Free* (**X**) обозначается класс всех графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из **X**. Множество графов **Y** является наследственным классом тогда и только тогда, когда **Y**= *Free* (**X**) для некоторого **X**. Если **X** конечно, то **Y**= *Free* (**X**) называется *конечно определенным*. Наследственный класс называется *монотонным*, если он замкнут еще и относительно удаления ребер.

В первой части настоящей статьи вводится понятие *фильтрованного класса графов.* Это семейство классов, занимающее промежуточное положение между семействами всех наследственных и всех монотонных классов. Устанавливаются некоторые свойства фильтрованных классов.

Вторая часть посвящена вопросам асимптотического перечисления наследственных классов графов с раскрашенными ребрами.

В третьей части рассматривается задача о реберном списковом ранжировании. Найдены все граничные классы и все конечно определенные классы для этой задачи. Это первый результат с полным описанием таких классов.

В четвертой части статьи рассматриваются графы, у которых для каждого порожденного подграфа совпадают мощности наименьшего покрытия и наибольшей упаковки 3-путей и 3-циклов. Они интересны тем, что для них отсутствует разрыв двойственности в соответствующих задачах целочисленного линейного программирования, которые поэтому решаются эффективно. Найдены множества запрещенных подграфов для этих классов графов.

В работе использованы следующие обозначения для графов: P_n и C_n – простые путь и цикл с n вершинами; O_n и K_n – пустой и полный графы с n вершинами; $K_n - e$ – результат удаления из K_n произвольного ребра; $K_{p,q}$ – полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле; $Comb_i$ – граф, получающийся добавлением к $K_{2,i}$ ребра, инцидентного обеим вершинам степени i; S_i – граф, получаемый подразбиением каждого ребра графа $K_{1,i}$; Cam_i – граф, получаемый соединением ребрами вершины степени i графа S_i со всеми его листьями; Com_i – граф, получаемый отождествлением одной из концевых вершин пути P_i с вершиной степени i графа $K_{1,i}$; $A(n,k)$ обозначим граф, получающийся из цикла C_n добавлением двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, k – расстояние между вершинами цикла, смежными с добавленными вершинами; $G_1 \oplus G_2$ – объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин; $G_1 \circ G_2$ – результат добавления к сумме $G_1 \oplus G_2$ всех ребер, соединяющих вершины из разных слагаемых.

Фильтрованные классы графов

Класс графов **X** называется *монотонным*, если любой подграф графа из **X** принадлежит **X**. Всякий монотонный класс является наследственным. Монотонные классы образуют континуальное семейство, замкнутое относительно объединений и пересечений, то есть решетку множеств. То же относится к наследственным классам. Привлечение понятий монотонного и наследственного классов позволяет формулировать проблемы достаточно общего характера и получать соответствующие результаты. Много примеров этого можно найти в исследованиях сложности «неподдающихся», «труднорешаемых» задач на графах (называемых в теории сложности вычислений NP-полными). Для одних классов удается найти полиномиальные алгоритмы, для других – доказать NP-трудность той или иной задачи. При рассмотрении семейств всех монотонных или всех наследственных классов можно осмысленно ставить вопрос о выявлении границы между «простыми» и «сложными» случаями (проблема демаркации). При этом обнаруживается, что ответить на некоторые вопросы для наследственных классов значительно труднее, чем для монотонных. Это естественно, поскольку семейство наследственных классов значительно шире семейства монотонных. Например, известны полные описания множества граничных классов (эти классы играют важную роль в решении проблемы демаркации) в семействе монотонных классов для некоторых задач (см., например, [2]), но до недавнего времени ни для одной задачи не удавалось найти полного описания граничных классов, и даже объем полученного недавно описания всех таких классов для некоторой задачи свидетельствует о существующих трудностях. В связи с этим и другими аналогичными проблемами может представлять интерес рассмотрение промежуточных между монотонными и наследственными семейств классов графов. Здесь мы определяем одно такое семейство и устанавливаем некоторые его свойства.

Пересечением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф

$$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Класс графов назовем *фильтрованным*, если он замкнут относительно пересечений.

Теорема 1. *Всякий фильтрованный класс графов является наследственным.*

В качестве примера наследственного, но не фильтрованного класса можно привести класс всех кодвудольных графов (графов, у которых множество вершин можно разбить на две клики).

Теорема 2. *Всякий монотонный класс графов является фильтрованным.*

Примером фильтрованного, но не монотонного класса может служить класс всех полных графов.

Пересечение двух фильтрованных классов, очевидно, – тоже фильтрованный класс. Для объединения это может быть не так. Рассмотрим, например, множество **X**, состоящее из графов C_4, $2K_2$, O_4 и всех их порожденных подграфов, и множество **Y**, состоящее из графов $C_3 \oplus K_1$, $K_2 \oplus 2K_1$, O_4 и их порожденных подграфов. Нетрудно проверить, что оба множества – фильтрованные классы, но их объединение таким не является, так как пересечение графов C_4 и $C_3 \oplus K_1$ (с одинаковыми множествами вершин) дает граф $P_3 \oplus K_1$, не принадлежащий ни **X**, ни **Y**. Таким образом, в отличие от монотонных и наследственных классов, семейство всех фильтрованных классов не образует решетку множеств.

Как и всякий наследственный класс, фильтрованный класс может быть описан множеством запрещенных подграфов (минимальных по отношению «быть порожденным подграфом» графов, не принадлежащих данному классу). Алгебраическая природа фильтрованных классов допускает альтернативное описание порождающим множеством относительно операции пересечения графов. Иногда такое описание оказывается более простым, чем описание запрещенными подграфами. Например, для класса k-раскрашиваемых графов (который является фильтрованным при любом k) при $k \geq 3$ в настоящее время нет полного описания множества запрещенных подграфов. В то же время легко найти его порождающее множество: оно состоит из полных k-дольных графов и из полных k-дольных графов с одним удаленным ребром.

Следующее семейство играет важную роль в теории наследственных классов. Класс $\mathbf{K}^i\mathbf{O}^j$ состоит из всех графов, у которых множество вершин можно разбить на i клик и j независимых множеств. Это семейство содержит классы полных графов $(i=1, j=0)$, пустых графов $(i=0, j=1)$, двудольных графов $(i=0, j=2)$, k-раскрашиваемых графов $(i=0, j=k)$, расщепляемых графов $(i=1, j=1)$.

Пусть $\mathbf{X}_n$ – множество всех графов из класса $\mathbf{X}$ с множеством вершин $\{1,2,\ldots,n\}$. В работе [3] получено асимптотическое выражение для логарифма числа графов в этом множестве для любого наследственного класса $\mathbf{X}$:

$$\log_2 |\mathbf{X}_n| = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{c(\mathbf{X})} + o(1)\right),$$

где $c(\mathbf{X})$ – наибольшее значение величины $i+j$, при котором в классе $\mathbf{X}$ содержится класс $\mathbf{K}^i\mathbf{O}^j$ (называемое *рангом класса* $\mathbf{X}$). Нетрудно доказать, что при $i \geq 1$ и любом j замыкание множества $\mathbf{K}^i\mathbf{O}^j$ относительно пересечений графов совпадает с классом всех графов. Отсюда следует

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– фильтрованный класс,* $\mathbf{Y}$ *– полное множество запрещенных подграфов для* $\mathbf{X}$*. Тогда* $c(\mathbf{X}) = \min_{G\in Y}(\chi(G)-1)$, *где* χ *– хроматическое число.*

Величина $h(\mathbf{X}) = 1 - \dfrac{1}{c(\mathbf{X})}$ называется *энтропией наследственного класса* $\mathbf{X}$. Она является предельным «коэффициентом сжатия» при кодировании графов из любого наследственного класса $\mathbf{X}$ с ненулевой энтропией, поскольку самое экономное двоичное представление графа с n вершинами из $\mathbf{X}$ асимптотически использует $\dfrac{n^2 h(\mathbf{X})}{2}$ бит [3].

Энтропийно минимальные классы цветных графов

При изучении областей значений энтропии целесообразно рассматривать обобщения обыкновенных графов – ориентированные и цветные графы. Напомним, что *ориентированным* называется граф с ориентированными ребрами, а *цветным* – граф с раскрашенными ребрами (более конкретно, *q-графом* называется граф, каждое ребро которого покрашено в один из q цветов множества цветов Q). Для данных типов графов удается обнаружить принципиально новое явление – существование бесконечного множества точек сгущения энтропии классов из таких графов [4], в то время как в случае обыкновенных графов такая точка единственна.

С целью более детального изучения классов графов с заданным значением энтропии недавно было введено понятие *энтропийно минимального класса графов* как наследственного класса, не содержащего собственных наследственных подклассов с тем же значением энтропии. Все энтропийно минимальные классы обыкновенных графов были найдены и описаны в [3]. Именно, каждый такой класс, отличный от множества всех графов, совпадает с классом $\mathbf{K}^i\mathbf{O}^j$ при некоторых i и j. Обыкновенные графы можно рассматривать как 2-графы, поскольку каждое ребро любого такого графа можно покрасить в первый цвет и добавить несколько ребер до полного графа, покрашенных во второй цвет. Оказывается, что справедлива

Теорема 4. *Все энтропийно минимальные классы обыкновенных графов с произвольно раскрашенными в q цветов ребрами являются также и энтропийно минимальными классами q-графов при любом* $q > 2$.

Каждый q-граф имеет следующее матричное представление. Рассмотрим произвольное разбиение множества вершин текущего графа на такие части $V_1, V_2, \ldots, V_k$, что для любых двух подмножеств V_i и V_j цвет каждого ребра $(x, y) \subseteq V_i \times V_j$ принадлежит некоторому подмножеству $Q_{i,j} \subseteq Q$. Элементы соответствующей матрицы – множества цветов $Q_{i,j}$. Поскольку разбиение на подмножества не единственно, то и матричных представлений может быть несколько. При $q = 2$ упомянутые выше классы энтропийно минимальных обыкновенных графов описываются матрицами, у которых все множества, стоящие на диагонали, имеют мощность 1, а все остальные – мощность 2.

Пусть M – симметричная матрица, элементами которой являются произвольные непустые подмножества множества Q. Обозначим через $\mathbf{K}(M)$ множество тех q-графов, которые допускают матричное представление M. Пусть N – произвольная подматрица M, получающаяся вычеркиванием из M строки и столбца с одинаковыми номерами. Если для любой такой подматрицы N выполняется неравенство $h(\mathbf{K}(N)) < h(\mathbf{K}(M))$, то матрицу M назовем *энтропийно неприводимой.*

Теорема 5. *Класс* $\mathbf{K}(M)$ *является энтропийно минимальным тогда и только тогда, когда матрица M является энтропийно неприводимой.*

Класс $\mathbf{K}(M)$ – частный случай композиции наследственных классов q-графов, введенной в работе [5], а энтропийно неприводимым матрицам соответствуют классы, названные в [6] правильными регулярными композициями. Полученный результат усиливает результат из [6], где доказано, что правильные регулярные композиции являются минимальными по включению композициями с данным значением энтропии.

«Критические» классы графов в задаче о реберном списковом ранжировании

В этом разделе исследуются элементы границы между «простыми» и «сложными» классами графов для некоторой задачи в семействе наследственных классов графов. Формализуем понятия «простого» и «сложного» класса графов. Пусть Π – какая-либо NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов назовем Π-*простым*, если задача Π для графов из этого класса полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. Далее везде предполагаем справедливость неравенства $P \neq NP$ и не включаем его явно в формулировки полученных результатов.

Естественной идеей решения задачи демаркации является поиск *максимальных* Π-*простых* и *минимальных* Π-*сложных классов*, т.е. тупиковых классов графов соответствующей сложности из рассматриваемой решетки. К сожалению, использование понятия максимального простого класса графов оказывается безрезультатным. Так, В.Е. Алексеев в работе [2] установил, что ни один Π-простой класс не является максимальным простым (правда, в [2] это утверждается только для задачи о независимом множестве, но все рассуждения из данной работы легко переносятся на общий случай). Вместе с тем, до недавнего времени про минимальные сложные классы ничего не было известно. Первый результат о минимальных сложных классах был получен в работе [7]. Там рассматривалась задача распознавания принадлежности наследственному классу графов $\mathbf{X}$ и было доказано, что для любого наследственного класса $\mathbf{X}$ минимальных сложных классов не существует. С другой стороны, в работах [7–10] было показано, что определенные классы графов являются минимальными сложными для некоторых обобщений задач о раскраске – задач о списковом ранжировании (реберного и вершинного вариантов).

Итак, элементы границы между «простыми» и «сложными» элементами решетки наследственных классов существуют не всегда. Это означает существование бесконечных убывающих цепей из Π-сложных случаев. Интуитивно ясно, что пределы этих цепей могут оказаться весьма полезными при анализе сложности задачи Π. Это действительно так. Наследственный класс графов $\mathbf{X}$ называется Π-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ из Π-сложных классов графов, что $\mathbf{X} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным*. Значение этого понятия раскрывает следующая теорема, доказанная в [2].

Теорема 6. *Конечно определенный класс графов является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда он содержит какой-нибудь* Π-*граничный.*

Из теоремы 6 следует, что полная информация о структуре Π-*граничной системы* (т.е. множества всех Π-граничных классов графов) позволяет полностью описать все конечно определенные Π-простые классы. До недавнего времени ни для одной задачи на графах не удавалось получить полного описания всех граничных классов. Такого рода описание для задачи о реберном списковом ранжировании (задачи РСР) стало первым. Постановка данной задачи заключается в следующем.

Заданы граф G с множеством ребер E и множество $\Lambda = \{L(e) : e \in E\}$, где каждое $L(e)$ – конечное множество натуральных чисел (цветов, в которые разрешается покрасить ребро e). Λ-*ранжированием ребер графа* G называется такая раскраска c его вершин, что:

1. $c(e) \in L(e)$ для каждого ребра e;
2. Если $c(e_1) = c(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2, содержит такое ребро e_3, что $c(e_3) > c(e_1)$.

Задача РСР состоит в том, чтобы по данным G и Λ определить, существует ли Λ-ранжирование ребер графа G. Уточним, что под РСР-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача РСР решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любом множестве Λ.

Наследственным замыканием множества графов называется совокупность всех графов, являющихся порожденными хотя бы одного графа множества. Рассмотрим следующие классы графов:

1. **Clique** – класс полных графов.

2. **Bat** – наследственное замыкание множества графов $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{K_{2,i}\}$.

3. **Comb** – наследственное замыкание множества графов $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{Comb_i\}$.

4. **Star** – наследственное замыкание множества графов $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{S_i\}$.

5. **Camomile** – наследственное замыкание множества графов $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{Cam_i\}$.

6. **Comet** – наследственное замыкание множества графов $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{Com_i\}$.

7. $\widetilde{\mathbf{T}}$ – наследственное замыкание множества графов, каждая компонента связности которых получается добавлением вершины к некоторому пути и ребра, инцидентного добавленной вершине и вершине пути.

8. $\widetilde{\mathbf{D}}$ – наследственное замыкание множества графов, каждая компонента связности которых получается добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и двум последовательным вершинам пути.

9. $\hat{\mathbf{T}}$ – наследственное замыкание множества графов, каждая компонента связности которых получается добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и двум вершинам пути, отстоящим в пути друг от друга на расстояние 2.

10. $\hat{\mathbf{D}}$ – наследственное замыкание множества графов, каждая компонента связности которых получается добавлением вершины к некоторому пути и ребер, инцидентных добавленной вершине и трем последовательным вершинам пути.

Теорема 7. *PCP-граничную систему образуют классы* **Clique**, **Bat**, **Comb**, **Star**, **Camomile**, **Comet**, $\widetilde{\mathbf{T}}$, $\widetilde{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{D}}$.

Теорема 8. *Существует всего 5 конечно оределенных минимальных PCP-сложных классов. Это* **Clique**, **Bat**, **Comb**, **Star**, **Camomile**.

Формулировки теорем 7 и 8 дают окончательные ответы на ряд вопросов, во многом завершая цикл работ [7–11].

Упаковки и покрытия 3-путей и 3-циклов

Пусть **X** – множество графов. **X**-*упаковкой* графа G называется множество его непересекающихся порожденных подграфов, каждый из которых изоморфен какому-нибудь графу из **X**. *Вершинным* **X**-*покрытием* графа G называется множество вершин, после удаления которых получается граф, не содержащий порожденных подграфов, принадлежащих **X**. Граф G называется *кениговым* графом относительно множества **X**, если для любого его порожденного подграфа H наибольшее число подграфов в **X**-упаковке H равно мощности наименьшего вершинного **X**-покрытия H. Класс всех кениговых графов относительно **X** обозначается **K**(**X**). Этот класс при любом **X** является наследственным и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещенных (порожденных) подграфов. Понятие кенигова графа было введено в работе [12], где были также найдены некоторые запрещенные подграфы для класса **K**(P_3) и высказано предположение, что они составляют полное множество минимальных запрещенных подграфов для этого класса. Теперь это предположение доказано.

Для того чтобы сформулировать итоговый результат, необходимо ввести некоторые определения и обозначения.

Операция замены вершины x t-*кликой* состоит в том, что эта вершина удаляется из графа, к нему добавляются t новых вершин, все они попарно соединяются между собой, и каждая из них соединяется ребром с каждой вершиной, с которой была смежна x. Граф, получаемый из графа G заменой некоторых его вершин степени 1 и 2 кликами (возможно, разного размера), назовем 2-*расширением* графа G.

Обозначим через **A** множество, состоящее из трех графов $K_1 \circ P_4$, $K_1 \circ (K_1 \oplus P_3)$, $K_2 \circ O_3$. Введем также обозначения для некоторых бесконечных множеств графов:

B – множество всех циклов, длина которых не кратна 3;

C – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 3, двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, причем расстояние между этими вершинами цикла должно быть не кратно 3;

D – множество всех графов, которые можно получить добавлением к циклу, длина которого кратна 3, двух вершин, не смежных между собой, одна из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла, а другая – с тремя подряд идущими вершинами цикла, причем расстояние между добавленными вершинами должно быть сравнимо с 1 по модулю 3;

E – множество всех графов, которые можно получить из циклов длиной, кратной 3, путем замены 2-кликами трех вершин цикла, разбивающих цикл на отрезки, длина каждого из которых не меньше 4 и сравнима с 1 по модулю 3.

В мультиграфах, фигурирующих в формулировках двух приводимых ниже теорем, допускаются петли.

Теорема 9. *Следующие утверждения равносильны для графа G*:

1) *G – кенигов граф*;

2) *G не содержит порожденных подграфов из множества* $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C} \cup \mathbf{D} \cup \mathbf{E}$;

3) *G является 2-расширением некоторого мультиграфа.*

Аналогичные результаты получены для множества $\{P_3, C_3\}$. Граф, получаемый двойным подразбиением каждого ребра графа *H*, назовем 2-*подразбиением H*.

Теорема 10. *Следующие утверждения для графа G эквивалентны*:

1) $G \in \mathbf{K}(P_3, C_3)$;

2) *G не содержит порожденных подграфов* K_4, $K_4 - e$, C_n, $n \equiv 1,2\ (mod\,3)$, $A(n,k)$, $n \equiv 0\ (mod\,3)$, $k \equiv 1,2\ (mod\,3)$;

3) *G является 2-подразбиением некоторого мультиграфа.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 11-01-00107-а и 12-01-00749-а, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.», номер ГК 16.740.11.0310 и 2012-1.1.-12-000-1055-033, лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0057.

Список литературы

1. Алексеев В.Е., Замараев В.А., Захарова Д.В., Малышев Д.С., Мокеев Д.Б. Некоторые результаты о наследственных классах графов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 6. С. 169–173.

2. Alekseev V.E. On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. 2004. V. 132. P. 17–26.

3. Алексеев В.Е. Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. 1992. Т. 4. № 2. С. 148–157.

4. Алексеев В. Е., Сорочан С.В. Об энтропии наследственных классов цветных графов // Дискретная математика. 2000. Т. 12. № 2. С. 99–102.

5. Сорочан С.В. Об энтропии композиций наследственных классов цветных графов // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2002. Т. 9. № 1. С. 59–83.

6. Сорочан С.В. О регулярных композициях наследственных классов цветных графов // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 79–104.

7. Малышев Д.С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. № 6. С. 43–51.

8. Малышев Д.С. Последовательные минимумы решетки наследственных классов графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 4. С. 70–76.

9. Малышев Д.С. Минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Дискетный анализ и исследование операций. 2011. Т. 17. № 1. С. 133–136.

10. Малышев Д.С. Анализ сложности задачи о реберном списковом ранжировании для наследственных классов графов с не более чем тремя запретами // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. № 1. С. 74–96.

11. Малышев Д.С., Алексеев В.Е. Граничные классы для задач о списковом ранжировании относительно лесов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. № 6. С.61–70.

12. Алексеев В.Е., Мокеев Д.Б. Кёниговы графы относительно 3-путей // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. № 4. С. 3–14.

SOME RESULTS ON HEREDITARY CLASSES OF GRAPHS. II

V.E. Alekseev, D.V. Zakharova, D.S. Malyshev, D.B. Mokeev, S.V. Sorochan

The problems of asymptotic enumeration and structural description of hereditary graph classes are considered. The complexity of some problems on such graph classes is studied.

Keywords: hereditary graph class, forbidden induced subgraph, filtered graph class, entropy, q-graph, minimum-entropy class, boundary class, minimal hard class, edge list-ranking problem, graph packings, graph coverings.