

УДК 551.466

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Талипова Т.Г.<sup>1</sup>, Пелиновский Е.Н.<sup>1-3</sup>, Куркина О.Е.<sup>2,3</sup>, Диденкулова И.И.<sup>2,4</sup>,  
Родин А.А.<sup>2,4</sup>, Панкратов А.С.<sup>2</sup>, Наумов А.А.<sup>2</sup>, Гиниятуллин А.Р.<sup>2</sup>,  
Николкина И.Ф.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород, Россия*

<sup>2</sup>*Нижегородский государственный технический университет, Н. Новгород, Россия*

<sup>3</sup>*Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики, Н. Новгород,  
Россия*

<sup>4</sup>*Институт Кибернетики, Таллинский технический университет, Таллин, Эстония*

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы, а также при поддержке грантов МК1440.2012.5, РФФИ 12-05-00472, SF0140007s11, ETF8870 и программы Mobilitas ESF (EMJD270).

### АННОТАЦИЯ

Приведена физико-математическая модель трансформации двумерных нелинейных внутренних волн в природных стратифицированных водоемах. Модель основана на уравнении Кортевега-де Вриза и его обобщениях. Коэффициенты этого уравнения вычисляются по известным вертикальным распределениям плотности жидкости с помощью решения задачи Штурма-Лиувилля на собственные значения. Модель учитывает горизонтальную изменчивость гидрологических полей по

горизонтали и переменность глубины водоема. В качестве примера рассмотрена трансформация уединенной волны (солитона) в двухслойном потоке с уменьшающейся глубиной. Показано, что солитон разрушается в двух критических точках. Одна из них связана с переходом двухслойного потока в однослойный, а вторая – когда толщины слоев сравниваются между собой. Рассчитано изменение амплитуды уединенной волны от толщины нижнего слоя.

### ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные внутренние волны являются неотъемлемой частью волновых движений в стратифицированных средах, и они часто наблюдаются в океанах и морях. Эти волны могут достигать очень больших амплитуд ввиду малой разницы в плотностях соседних слоев, так что архимедовы силы, действующие на частицу жидкости, достаточно малы, чтобы воспрепятствовать передвижению частиц по вертикали. Общие сведения о внутренних волнах в океанах и морях можно найти в книгах (Морозов, 1985; Коняев и Сабинин, 1992; Hutter, 2012). Теоретические модели описания нелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости основаны на уравнениях Эйлера (если вязкостью жидкости пренебрегается) или уравнениях Навье-Стокса с различными аппроксимациями на диссипацию

волновой энергии и эти модели описаны, например, в книгах (Миропольский, 1981; Vlasenko et al., 2005). Особо необходимо отметить, что в реальных природных водоемах вертикальная стратификация плотности воды не является фиксированной и меняется в пространстве. В настоящее время имеются достаточно подробные гидрологические атласы, позволяющие количественно оценивать характеристики вертикальной и горизонтальной изменчивости поля плотности (Boyer et al., 2006).

В течение последних двадцати лет в Институте прикладной физики РАН и в Нижегородском государственном техническом университете развивается физико-математическая модель описания трансформации нелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости с учетом распределения поля плотности в пространстве

и переменности глубины жидкости (Пелиновский и др., 1977, 1994; Holloway et al., 1997, 1999; Галипова и др., 1999; Pelinovsky et al., 2007). Она основана на обобщенном уравнении Кортевега -де Вриза, являющимся в настоящее время эталонным уравнением нелинейной математической физики для описания нелинейных волновых процессов в слабодиспергирующих средах. Наиболее важными особенностями развитой модели является ее применимость к

реальным гидрологическим полям без использования приближения многослойности вод океана или непрерывности вертикального профиля плотности воды. Эта модель сейчас реализована в виде вычислительного комплекса, позволяющего автоматизировать вычисления (Тюгин и др., 2011).

В настоящей работе с помощью данной модели изучается трансформация внутренней волны конечной амплитуды в двухслойном потоке переменной глубины.

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОСНОВАННАЯ НА ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

Наиболее строго, обобщенное (иногда говорят расширенное) уравнение Кортевега – де Вриза с использованием асимптотической процедуры выведено в работе (Пелиновский и др., 2000; Grimshaw et al., 2002). Здесь мы приведем основные уравнения модели в приближении Буссинеска (когда изменения плотности по вертикали достаточно малы – типичное приближение для природных водоемов) в пренебрежении вязкими процессами, а также не будем учитывать фоновые течения. В частности, если нет изменения характеристик среды по горизонтали, основным уравнением для двумерного волнового потока в стратифицированной жидкости является 1+1 уравнение Гарднера или уравнение Кортевега-де Вриза со смешанной (квадратично-кубической) нелинейностью

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\alpha \eta + \alpha_1 \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где  $\eta(x,t)$  – волновая функция, входящая в вертикальное смещение изопоикн (поверхности равной плотности  $\zeta(x,y,t)$ ).

$$\zeta(x, y, t) = \eta(x, t)\Phi(y). \quad (2)$$

Здесь  $x$  – горизонтальная и  $y$  – вертикальная координаты,  $t$  – время,  $\Phi(y)$  – модовая функция, являющаяся решением задачи Штурма-Лиувилля с нулевыми граничными условиями на собственные значения

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{N^2(y)}{c^2} \Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(-H) = 0, \quad (3)$$

где  $H$  – глубина слоя воды (отсюда видно, что начало координат связывается с водной поверхностью),  $N(y)$  – частота Вэйсяля-Брента (плаучести), определяемая через вертикальное распределение плотности жидкости  $\rho_0(y)$

$$N(y) = \sqrt{\frac{g d \rho_0}{\rho_0 dy}}, \quad (4)$$

$g$  – ускорение силы тяжести и  $c$  – собственное значение задачи Штурма – Лиувилля. Легко

показать, что краевая задача (3) имеет дискретный спектр различающихся собственных значений (Миропольский, 1981), на чем мы не останавливаемся. В рамках данной модели каждая мода внутренних волн распространяется независимо, так что мы не будем использовать индекс для выбора определенной моды. Напомним, что собственное значение  $c$  определяет физическую скорость распространения длинных внутренних волн малой амплитуды. Фактически, уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью  $c$ , так что координата  $x$  есть  $x - ct$ . Отметим также, что мы используем условие нормировки на функцию  $\Phi(y)$ :  $\Phi_{\max} = 1$ , так что функция  $\eta(x,t)$  описывает вертикальное смещение изопоикны в максимуме моды.

Коэффициенты уравнения (1) называются соответственно коэффициентами квадратичной и кубической нелинейности и дисперсии; они определяются через вертикальное распределение плотности воды

$$\alpha = \left( \frac{3c}{2} \right) \frac{\int_0^0 (d\Phi / dy)^3 dy}{\int_{-H}^0 ((d\Phi / dy)^2 dy)} \quad (5)$$

$$\alpha_1 = \frac{3c}{2} \frac{\int [3(dT / dy) - 2(d\Phi / dy)^2] (d\Phi / dy)^2 dy}{\int (d\Phi / dy)^2 dy} - \frac{3c}{2} \frac{\int \{ \alpha^2 (d\Phi / dy)^2 - \alpha [5(d\Phi / dy)^2 - 4dT / dy] d\Phi / dy \} dy}{\int (d\Phi / dy)^2 dy}, \quad (6)$$

$$\beta = \left( \frac{c}{2} \right) \frac{\int_{-H}^0 \Phi^2 dy}{\int_{-H}^0 (d\Phi / dy)^2 dy}. \quad (7)$$

Здесь функция  $T$  есть нелинейная поправка к модальной функции  $\Phi$ , определяемая уравнением

$$\frac{d^2T}{dy^2} + \frac{N^2(y)}{c^2}T = -\frac{\alpha}{c} \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{3}{2} \frac{d}{dy} \left[ \left( \frac{d\Phi}{dy} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Уравнения модели достаточно громоздки, однако вычисление всех коэффициентов по реально заданному распределению плотности воды в настоящее время не представляет трудностей, и оно автоматизировано, например, в вычислительном комплексе (Тюгин и др., 2011).

На практике, как уже говорилось, необходимо учитывать переменность глубины бассейна, а также изменчивость плотности по горизонтали. Если изменения по трассе достаточно плавные, так что можно пренебречь отражением волновой энергии, то аналогично (1) можно вывести уравнение Гарднера с переменными коэффициентами (Holloway et al., 1997, 1999)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left( \frac{\alpha(x)Q(x)}{c^2(x)} \xi + \frac{\alpha_1(x)Q^2(x)}{c^2(x)} \xi^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\beta(x)}{c^4(x)} \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} = 0, \quad (9)$$

где

$$\eta(s, x) = Q(x)\xi(s, x), \quad (10)$$

$$Q(x) = \sqrt{\frac{(Mc^3)_0}{Mc^3}}, \quad M(x) = \int_{-H(x)}^0 \left( \frac{d\Phi}{dy} \right)^2 dy. \quad (11)$$

$$s(x, t) = \int \frac{dx}{c(x)} - t. \quad (12)$$

Здесь индекс 0 в  $Q(x)$  соответствует начальному значению параметров.

Таким образом, разработанная модель позволяет учесть реальное распределение плотности воды по вертикали и горизонтали, а также переменность глубины бассейна. При этом задача Штурма-Лиувилля (3) должна решаться в каждой точке по трассе распространения, в результате все коэффициенты уравнения Гарднера становятся переменными по горизонтали. Именно поэтому уравнение (9) и называется уравнением Гарднера с переменными коэффициентами. Наконец важно

отметить, что уравнение (9) имеет два закона сохранения потоков массы и энергии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(s, x) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t, x) dt, \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2(s, x) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2(t, x) dt, \quad (14)$$

которые могут быть использованы для контроля вычислений.

В данной работе будут исследованы волны в двухслойном потоке. В этом случае все коэффициенты вычисляются явно (Kakutani and Yamasaki, 1978)

$$c = \sqrt{\frac{g\Delta\rho}{\rho} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}, \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{3c}{2} \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2}, \quad (16)$$

$$\alpha_1 = -\frac{3c}{8h_1^2 h_2^2} (h_1^2 + h_2^2 + 6h_1 h_2), \quad (17)$$

$$\beta = \frac{ch_1 h_2}{6}, \quad (18)$$

где  $h_1$  – толщина верхнего слоя,  $h_2(x)$  – переменная толщина нижнего слоя,  $\Delta\rho/\rho$  – скачок плотности на границе раздела слоев. Как видим, все коэффициенты знакоопределенные, за исключением коэффициента квадратичной нелинейности, который положителен, если граница раздела слоев находится ближе ко дну, и отрицателен в противоположном случае. Аналогично вычисляется коэффициент усиления

$$Q(x) = \sqrt{\frac{c_0^3}{c^3(x)} \frac{h_1^{-1} + h_2^{-1}(0)}{h_1^{-1} + h_2^{-1}(x)}}. \quad (19)$$

### УЕДИНЕННЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ (СОЛИТОНЫ)

Уравнение Гарднера (1) имеет стационарные решения в виде уединенных волн (солитонов)

$$\eta(x, t) = \frac{A}{1 + B \operatorname{ch}(\gamma(x - Vt))}, \quad (20)$$

$$A = \frac{6\beta\gamma^2}{\alpha}, \quad B^2 = 1 + \frac{6\alpha_1\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \quad V = \beta\gamma^2, \quad (21)$$

где  $\gamma$  есть произвольный параметр, характеризующий обратную ширину солитона. Другим свободным параметром является фаза солитона (его местоположение), которую мы здесь

не рассматриваем. Амплитуда волны, или экстремум функции (20), равна

$$a = \frac{A}{1 + B}. \quad (22)$$

*Солитон Кортевега – де Вриза.* В случае, когда кубическая нелинейность отсутствует ( $\alpha_1 = 0$ ), решение (21) переходит в солитон Кортевега – де Вриза

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{\alpha a}{12\beta}} \left( x - \frac{\alpha a}{3} t \right) \right]. \quad (23)$$

Важно подчеркнуть, что полярность солитона определяется знаком коэффициента квадратичной нелинейности. Таким образом, если граница раздела находится ближе ко дну, чем к поверхности, то солитон представляет собой гребень. В противоположном случае солитон представляет собой впадину. В этом принципиальное отличие внутренних волн от поверхностных волн в однородной жидкости, когда солитон имеет только положительную полярность. Приведем также значения массы солитона

$$M_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta dx = \sqrt{\frac{48\beta a}{\alpha}} \text{sign}(\alpha), \quad (24)$$

и его энергии

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2}{2} dx = \sqrt{\frac{16\beta a^3}{3\alpha}}. \quad (25)$$

Масса и энергия солитона уравнения Кортевега – де Вриза являются монотонными функциями его амплитуды.

Солитон Гарднера. Поскольку для волн в двухслойном потоке  $\alpha_1 < 0$ , то  $0 < B < 1$ . В результате, существует только одно семейство солитонов, полярность которых по прежнему определяется знаком коэффициента квадратичной нелинейности. Форма солитона для  $\alpha = 1$  и  $\alpha_1 = -1$  показана на рис. 1. Для малых амплитуд ( $B \rightarrow 1$ ), солитон (21) трансформируется в солитон Кортевега – де Вриза (23). Возрастая, амплитуда волны приближается к максимальной величине

$$a_{cr} = \frac{\alpha}{|\alpha_1|}. \quad (26)$$

В этом пределе ( $B \rightarrow 0$ ), ширина солитона стремится до бесконечности, и солитон становится так называемым «толстым» или «столообразным» солитоном. Приведем здесь также значения массы и энергии солитона уравнения Гарднера

$$M_s = 4\sqrt{\frac{6\beta}{|\alpha_1|}} \text{arcth}\left(\sqrt{\frac{1-B}{1+B}}\right), \quad (27)$$

$$E_s = \frac{\alpha\sqrt{6\beta|\alpha_1|}}{\alpha_1^2} \left\{ 2\text{arcth}\left(\sqrt{\frac{1-B}{1+B}}\right) - \sqrt{1-B^2} \right\}. \quad (28)$$

Масса и энергия этого солитона возрастают с увеличением его амплитуды и в пределе толстого солитона стремятся к бесконечности пропорционально его ширине.

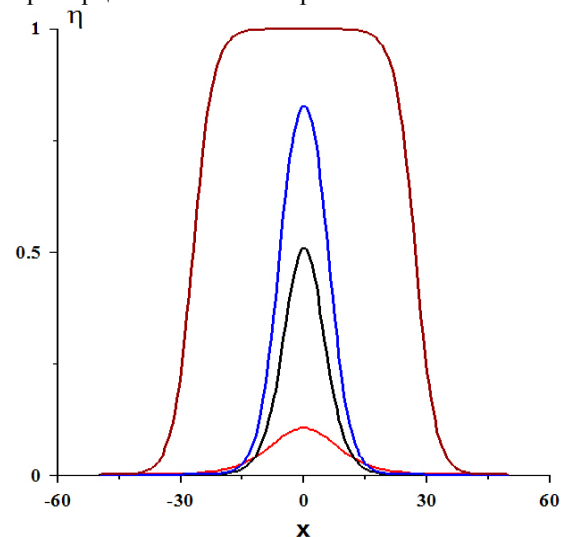


Рис.1 Солитоны уравнения Гарднера в двухслойном потоке

### АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ СОЛИТОНА ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ПОТОКЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Если глубина потока меняется очень медленно, то волна локально является стационарной и описывается решениями, приведенными в выше. Изменения параметров солитона можно найти, используя асимптотическое решение уравнения Гарднера с переменными коэффициентами (9). Легко показать, что амплитуда солитона находится из сохранения второго (энергетического) интеграла (14), означающего сохранение потока энергии. В виду ограниченности солитона в пространстве и отсутствия отражения волны от откоса, очевидно, что второй интеграл сводится к сохранению энергии солитона в пространстве. Поэтому мы можем работать сразу с энергетическими характеристиками солитона в соответствии с формулами (25) и (28). Рассмотрим здесь трансформацию солитона малой амплитуды в рамках уравнения Кортевега – де

Вриза. Учитывая выражения для коэффициентов уравнения Кортевега – де Вриза (16) и (18) из интеграла (25) находим искомую формулу для амплитуды солитона

$$\frac{a(x)}{a_0} = \left[ \frac{h_{20}}{h_2(x)} \right]^{2/3} \left[ \frac{h_1 - h_2(x)}{h_1 - h_{20}} \right]^{1/3}. \quad (29)$$

где  $a_0$  – амплитуда солитона в точке с глубиной  $h_{20}$ . Пусть, например, солитон движется в жидкости с монотонно убывающей глубиной, при этом начальная толщина нижнего слоя превышает толщину верхнего слоя. В этом случае солитон имеет отрицательную полярность (впадина). Он существует до тех пор, пока толщины слоев не сравниваются, и в критической точке обращается в нуль, как и коэффициент квадратичной

нелинейности. Характер изменения амплитуды солитона зависит от величины параметра  $q = h_1/h_{20} < 1$ . Исследуя на экстремум функцию (29), легко найти глубину, когда амплитуда солитона достигает максимума

$$h_2^* = 2h_1. \quad (30)$$

Величина максимального усиления солитона есть

$$\frac{a_*}{a_0} = \left(\frac{h_{20}}{2h_1}\right)^{2/3} \left(\frac{h_1}{h_{20} - h_1}\right)^{1/3}. \quad (31)$$

Итак, если  $h_{20} < 2 \cdot h_1$  ( $q > 0.5$ ), то амплитуда солитона только затухает при приближении к критической точке. Если же начальная толщина нижнего слоя достаточно большая, то амплитуда солитона сначала возрастает, достигая экстремального значения (31), а затем убывает до нуля. На рис. 2 приведена зависимость максимального коэффициента усиления от параметра  $q$ . Усиление возрастает, если глубина нижнего слоя существенно превышает глубины верхнего слоя.

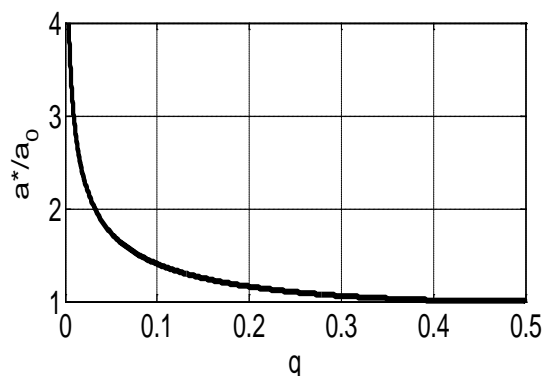


Рис.2 Зависимость максимального коэффициента усиления от параметра  $q$

В критической точке в рамках асимптотического подхода амплитуда солитона обращается в нуль. На самом деле, при этом длина солитона резко возрастает, и нарушается условие медленности изменения параметров солитона. Поведение солитона в критической точке (без относительно к данной задаче) было исследовано в работах (Knickerbocker and Newell, 1980; Талипова и др., 1997). Солитон не разрушается полностью, и из него в дальнейшем рождается солитон противоположной полярности (гребень).

На рис. 3 приведена зависимость амплитуды внутренней волны в двухслойном потоке от глубины нижнего слоя, построенная по формуле (29).

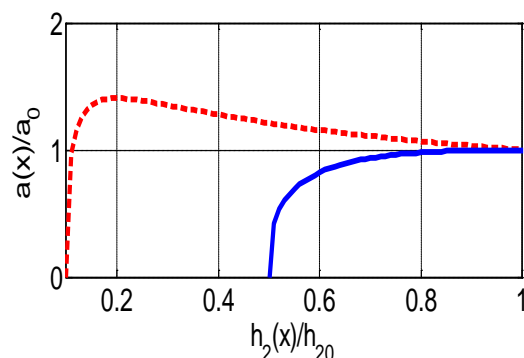


Рис.3 Изменение амплитуды внутренней волны в двухслойном потоке переменной глубины с узким верхним слоем (штриховой линией отмечен случай  $h_1/h_{20} = 0.1$ , а сплошной  $h_1/h_{20} = 0.5$ )

В случае же, если начальная толщина нижнего слоя меньше толщины верхнего слоя, то солитон изначально имеет положительную полярность (гребень) и по мере уменьшения глубины амплитуда солитона только возрастает (рис. 4). На последней стадии, когда  $h_2 \rightarrow 0$ , амплитуда солитона растет как  $h_2^{-2/3}$

$$\frac{a(x)}{a_0} \approx \left[\frac{h_{20}}{h_2(x)}\right]^{2/3} \left[\frac{h_1}{h_1 - h_{20}}\right]^{1/3}. \quad (32)$$

Уже из этой формулы видна слабая зависимость амплитуды солитона от отношения  $h_{20}/h_1$ , которая и заметна на рис. 4. Отметим также отличие в законах изменения амплитуд внутреннего и поверхностного солитона, для поверхностных волн  $a \sim h^{-1}$  (Пелиновский, 1996).

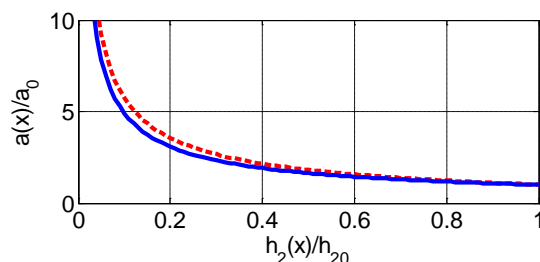


Рис.4 Изменение амплитуды внутренней волны в двухслойном потоке переменной глубины с малой толщиной нижнего слоя (штриховой линией отмечен случай  $h_1/h_{20} = 2$ , а сплошной  $h_1/h_{20} = 6$ )

В точке, когда  $h_2 = 0$ , двухслойный поток трансформируется в однослойный, и внутренние волны при этом невозможны. Физически это связано с разрушением солитона в переходной зоне (по аналогии с поверхностными волнами такую

зону можно назвать зоной наката внутренних волн), где его амплитуда резко возрастает. Этот процесс необходимо исследовать в рамках более полных по нелинейности уравнений. Если амплитуда волны

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная ранее физико-математическая модель трансформации внутренних волн конечной амплитуды в стратифицированной жидкости применена для анализа уединенной волны малой амплитуды (солитона) в двухслойном потоке с уменьшающейся глубиной. Показано существование двух критических точек, в которых солитон разрушается. Первая из них возникает, когда толщины слоев сравниваются между собой,

достаточно мала, то обрушение в зоне наката может и не происходить, и внутренняя волна отражается от откоса (Талипова и Пелиновский, 2011).

и коэффициент квадратичной нелинейности обращается в нуль. В этой точке солитон отрицательной полярности исчезает, и в дальнейшем возникает солитон положительной полярности. Другая критическая точка соответствует превращению двухслойного потока в однослойный. В таком потоке внутренние волны не могут существовать, и волны разрушаются при подходе к этой точке.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Морозов Е.Г. Океанские внутренние волны. – М.: Наука, 1985. – 151 С.
- 2 Коняев К.В., Сабинин К.Д. Волны внутри океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1992. – 272 С.
- 3 Hutter K. Nonlinear internal waves in lakes. – Springer, 2012. – 294 P.
- 4 Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 302 С.
- 5 Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K. Baroclinic tides: Theoretical modeling and observational evidence. – Cambridge University Press, 2005. – 372 P.
- 6 Boyer T.P., Antonov J.I., Garcia H.E. et al. World Ocean Database 2005 // Ed. S.Levitus. NOAA Atlas NESDIS 60. – U.S. Government Printing Office. Wash. D.C., 2006. – 190 P.
- 7 Пелиновский Е.Н., Шаврацкий С.Х., Раевский М.А. Уравнение Кортевега–де Вриза для нестационарных внутренних волн в неоднородном океане // Изв. АН СССР ФАО. –1977.–Т.13.–№ 3.–С.325–328.
- 8 Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г., Степанянц Ю.А. Моделирование распространения нелинейных внутренних волн в горизонтально неоднородном океане // Изв. РАН ФАО. – 1994. – Т. 30. – № 1. – С. 79 – 85.
- 9 Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T., Barnes B. A Nonlinear Model of Internal Tide Transformation on the Australian North West Shelf // Physical Oceanography. – 1997. – Vol. 27. – N 6. – P. 871 – 896.
- 10 Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T. A Generalized Korteweg–de Vries Model of Internal Tide Transformation in the Coastal Zone // Geophys. Res. – 1999. – Vol. 104 (C8). – P. 18333 – 18350.
- 11 Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н. Ламб К., Гимшоу Р., Холловэй П. Эффекты кубической нелинейности при распространении интенсивных внутренних волн. // ДАН. – 1999. – Т. 364. – № 6. – С. 824 – 827.
- 12 Pelinovsky E., Polukhina O., Slunyaev A., Talipova T. Internal solitary waves // Ch. 4. Solitary Waves in Fluids. WIT Press. Southampton. Boston, 2007. – P. 85 – 110.
- 13 Тюгин Д.Ю., Куркина О.Е., Куркин А.А. Программный комплекс для численного моделирования внутренних гравитационных волн в мировом океане // Фундаментальная и прикладная гидрофизика, 2011. –Т. 4. – № 2. – С. 32–44.
- 14 Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е., Лэмб К. Нелинейные внутренние волны в океане, стратифицированном по плотности и течению // Океанология, 2000. – Т. 40. – № 6. – С. 805 – 815.
- 15 Grimshaw R., Pelinovsky E., Poloukhina O. Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface // Nonlinear Processes in Geophysics, 2002. – Vol. 9. – P. 221 – 235.
- 16 Kakutani T. and Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan, 1978. – Vol. 45. – P. 674 – 679
- 17 Knickerbocker C., Newell A. Internal solitary waves near a turning point // Phys. Lett., 1980. – 75A. – P. 326 – 330.
- 18 Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Гримшоу Р. Трансформация солитона через точку нулевой нелинейности // Письма в ЖЭТФ, 1997.– Т. 65. – С.120–125.
- 19 Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: ИПФ РАН,

1996. – 275 С.
- 20 Талипова Т.Г. и Пелиновский Е.Н.  
Трансформация внутренних волн над  
неровным дном: аналитические  
результаты. // Океанология. – 2011. –  
Т. 51. – № 4. – С. 621 – 626.