

7. Jorgensen P. L. Life insurance contracts with embedded options: valuation, risk management, and regulation. — J. Risk Finance, 2001, v. 3, № 1, p. 19–30.
8. Avellaneda M., Levy A., Paras A. Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. — Appl. Math. Finance, 1995, v. 2, № 2, p. 73–88.

О. В. Зверев, В. М. Хаметов (Москва, МГИЭМ). Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на компактном $(1, S)$ -рынке.

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}, P)$ задана согласованная случайная последовательность цен $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$, $N_0 \triangleq \{0, 1, \dots, N\}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$S_t = S_{t-1}(1 + \rho_t), \quad S_t|_{t=0} = S_0 > 0, \quad (1)$$

где S_0 — не случайно, $\{\rho_t\}_{t \in N_1}$ — последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин, носитель распределения вероятностей которых равен $[a, b]$, причем $-1 < a < 0 < b < \infty$. Пусть $\{\gamma_t\}_{t \in N_0}$ — одномерная предсказуемая последовательность.

Обозначим $\mathfrak{R}_{N,m}^c$ такое множество мер, эквивалентных базовой мере P , что случайные величины $\{\rho_t\}_{t \geq 1}$ являются относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_{N,m}^c$ независимыми в совокупности и одинаково распределенными. Множество таких $\{\gamma_t\}_{t \in N_0}$, что $\sup_{Q \in \mathfrak{R}_{N,m}^c} M^Q \exp\{-\sum_{i=1}^N (\gamma_i, \Delta S_i)\} < \infty$, обозначим D_1^N . Сужение множества D_1^N на $\{t_1, \dots, t_2\}$ обозначим $D_{t_1}^{t_2}$. Пусть $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^1$ — ограниченная борелевская функция, обозначаемая $\varphi(x)$. Положим $\varphi(S_N) = \varphi(x)|_{x=S_N}$ — платежное обязательство.

О п р е д е л е н и е 1. Меры Q^* назовем *наихудшей*, если выполняется равенство $\sup_{Q \in \mathfrak{R}_{N,m}^c} M^Q \varphi(S_N) = M^{Q^*} \varphi(S_N)$.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (1). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) существует единственная вероятностная мера Q_N^* , являющаяся *наихудшей* мартингальной;
- 2) $\text{supp } Q_N^* = \{a, b\}^N$, причем для любого t выполняется $q^* = Q_N^*(\rho_t = a)$, а $p^* = Q_N^*(\rho_t = b) = 1 - q^*$, где $q^* = b/(b + |a|)$.

Обозначим

$$\bar{V}_t^{mc} \triangleq \text{ess inf}_{\gamma_{t+1} \in D_{t+1}^N} \text{ess sup}_{Q \in \mathfrak{R}_{N,m}^c} M^Q \left[\exp \left\{ \varphi(S_N) - \sum_{i=t+1}^N \gamma_i S_{i-1} \rho_i \right\} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (2)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует такая борелевская функция $\bar{V}_t^{mc}(x)$, что для любого t :

- 1) $\bar{V}_t^{mc} = \bar{V}_t^{mc}(x)|_{x=S_t}$;
- 2) $D_t = \mathbf{R}^1$;
- 3) $\bar{V}_t^{mc}(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \bar{V}_{t-1}^{mc}(x) &= \inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} [\bar{V}_t^{mc}(x(1+a))e^{\gamma x|a|q^*} + \bar{V}_t^{mc}(x(1+b))e^{-\gamma x b p^*}], \\ \bar{V}_t^{mc}(x)|_{t=N} &= e^{\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (3)$$

О п р е д е л е н и е 2. Самофинансирующий портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t \in N_0}$ назовем *минимаксным*, если для любого t

$$\bar{V}_t^{mc} = M^{Q^*} \left[\exp \left\{ \varphi(S_N) - \sum_{i=t+1}^N \gamma_i^* S_{i-1} \rho_i \right\} \middle| \mathcal{F}_t^S \right].$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует самофинансирующий портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t \in N_0}$, причем для любого t :

1)

$$\gamma_t^*(x) = \frac{1}{x(b+a)} \ln \frac{\bar{V}_t^{mc}(x(1+b))}{\bar{V}_t^{mc}(x(1+a))};$$

2) β_t^* удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\beta_t^* = \beta_{t-1}^* - S_{t-1} \Delta \gamma_t^*, \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*;$$

3) капитал X_t^* портфеля π^* допускает представление $X_t^* = \ln \bar{V}_t^{mc}$, причём:i) $X_t^*|_{t=N} = \varphi(S_N) Q^*$ -п. н.;ii) $X_t^* = X_0^* + \sum_{i=1}^t \gamma_i^* S_{i-1} \rho_i$.**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда решение рекуррентного соотношения (3) имеет вид

$$\ln \bar{V}_t^{mc}(x) = \sum_{i=0}^{N-t} \varphi(x(1+a)^i (1+b)^{N-t-i}) C_{N-t}^i (q^*)^i (p^*)^{N-t-i}.$$

З а м е ч а н и е 1. Можно выбрать β_0^* равным $\ln \bar{V}_0^{mc}$, а $\gamma_0^* = 0$.**З а м е ч а н и е 2.** Решение рекуррентного соотношения (3) совпадает с известной формулой, приведенной в [1, с. 744].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Теория. Т. 2. М.: Фазис, 1998, 544 с.
2. Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008, 496 с.
3. Бояринцева Н. С., Хаметов В. М. Новая теорема о представлении мартигалов (Дискретное время). — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 1, с. 40–54.

И. А. И л ь и ч е в а (Москва, ИМБ РАН). **Двойные спирали нуклеиновых кислот: роль неоднородности распределения конформационной энтропии вдоль нуклеотидной последовательности в регуляции передачи информации.**

Две однотипные полимерные молекулы — двойные спирали ДНК и РНК — могут передавать генетическую информацию при помощи принципиально одинакового триплетного кода. Структуры мономерных фрагментов этих молекул различаются лишь одной гидроксильной группой: на месте 2-дезоксид- β -D-рибофуранозы ДНК в РНК находится β -D-рибофураноза.

Небольшая замена приводит к принципиальным различиям в конформационной динамике этих молекул. Для структуры двойной спирали ДНК характерна высокая конформационная подвижность. Основные конформационные движения в ДНК — это псевдповращение в цикле 2-дезоксид- β -D-рибофуранозы (N \leftrightarrow S-переходы), которое сопряжено с изменениями ориентации *syn* \leftrightarrow *anti* нуклеотидных оснований вокруг гликозидной связи; VI \leftrightarrow VII переходами в 3'-концевой области динуклеотидов и α \leftrightarrow γ -переходами в 5'-концевой области. В заметной степени интенсивность всех этих движений модулируется нуклеотидной последовательностью. В отличие от ДНК, в двойной спирали РНК псевдповращение в цикле β -D-рибозы выражено существенно слабее, как и три остальных конформационных перехода, а модуляция конформационной динамики последовательностью нуклеотидов практически не заметна.

Именно эти отличия структурной динамики в двойных спиралях ДНК и РНК, по нашему мнению, оказались решающими в эволюционном отборе. Они привели к подавляющему преимуществу использования живыми организмами именно ДНК в

ТОМ

18

Выпуск

1

ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция «Финансовая и страховая математика»

Секция «Прикладная вероятность и статистика»

1 – 8

V

•

2011

**ВОСЕМНАДЦАТАЯ ВСЕРОССИЙСКАЯ ШКОЛА-КОЛЛОКВИУМ
ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ**

**ДВЕНАДЦАТЫЙ ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ**
Весенняя сессия. Научные доклады. Часть I

16 – 23

X

•

2010

**ОДИННАДЦАТАЯ ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ**

**РЕГИОНАЛЬНЫЙ МАКРОСИМПОЗИУМ
«НАСУЩНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ НА КУБАНИ»**
Осенняя сессия. Научные доклады. Часть III

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА

2011