ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ШТРАФОВ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ НАЧИСЛЕНИЕМ ПРОЦЕНТОВ

ЛЮДМИЛА БОРИСОВА
НИУ-ВШЭ, факультет логистики, доцент, к.э.н.

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня практически невозможно обеспечить конкурентоспособность бизнеса в логистике без достижения приемлемой эффективности соответствующих цепей поставок. Это справедливо и для тех звеньев, которые соотносятся с процессами обслуживания заказов, когда можно снижать издержки за счет оптимального выбора порядка реализации имеющихся заказов [1, 2]. Для современных цепей поставок за пределами РФ стратегии или правила, позволяющие снижать издержки обслуживания заказов (с учетом порядка их выполнения), нуждаются в пересмотре: чтобы повысить эффективность таких звеньев поставок, формат рассматриваемых моделей надо соотносить с требованиями анализа и учета денежных потоков, которые представляют соответствующие издержки. В частности потребуется учитывать, что тарифы или весомость штрафов изменяются со временем, поэтому при определении суммарных наращенных издержек следует использовать схему непрерывных процентов (а не схему простых процентов, которая соотносится с традиционными моделями сетей обслуживания).

Учет соответствующих положений финансового менеджмента и финансового анализа, разумеется, отразится на алгоритме нахождения наилучшего решения, определяющего порядок реализации заказов, при котором суммарные штрафы будут минимальными.

Новый формат оптимизационной модели такого типа с учетом указанной особенности функций штрафов анализировался в [3], где был рассмотрен случай, когда тарифы штрафов увеличиваются со временем, причем с учетом схемы непрерывных процентов. Показано, что для таких моделей алгоритм минимизации суммарных штрафов требует, чтобы были найдены показатели специального вида. В частности, оказалось, что такие показатели, в отличие от традиционных моделей (при учете издержек по схеме простых процентов, когда тарифы штрафов остаются постоянными), зависят от видов законов распределения вероятностей случайных затрат времени на реализацию заказов. Обратим внимание на то, что для классических моделей, когда начисление издержек соответствовало схеме простых процентов, такая зависимость отсутствовала.

Установленная зависимость существенно усложняет процедуру оптимизации стратегий обслуживания, в частности на практике может оказаться, что у менеджера нет требуемых статистических данных для принятия решений. Кроме того, даже при наличии требуемой статистической информации указанная зависимость усложняет процедуры оптимизации.

> ПРЕБЫВАНИЕ В ПОРТФЕЛЕ ЛЮБОГО НЕОБСЛУЖЕННОГО ЗАКАЗА ВЛЕЧЕТ ДЕНЕЖНЫЕ ПОТЕРИ, КОТОРЫЕ ОБЫЧНО НАЗЫВАЮТ ШТРАФАМИ.

Можно ли упрощать соответствующие процедуры оптимизации, делая их приемлемыми для практики? В [5] было показано, что в некоторых ситуациях это возможно. Конкретнее, это такие ситуации, когда распределение вероятностей случайных затрат времени на выполнение заказов является экспоненциальным или геометрическим. Ниже представлен более общий результат, который можно использовать на практике, не привязываясь к конкретному закону распределения вероятностей для указанных случайных величин. Будет доказано, что при любых таких законах распределения в практических ситуациях менеджер все-таки может использовать простой

АННОТАЦИЯ

Обсуждаются возможности использования приближенных подходов к снижению штрафов при обслуживания пакета заказов за счет выбора порядка их выполнения. Разработка таких подходов обусловлена необходимостью упрощения указанных процедур в задачах этого типа, чтобы при оптимизации учитывать изменение тарифов штрафов, наращиваемых по схеме непрерывных процентов. Доказано, что на практике для нахождения наилучшего решения реальных задач такого типа можно использовать традиционный для сетей обслуживания алгоритм выбора, который был разработан для моделей с постоянными тарифами штрафов. Простота такого алгоритма, в свою очередь, существенно упростит указанные процедуры оптимизации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Обслуживание портфеля заказов, минимизация штрафов, оптимальные правила и их модификации, приближенные подходы к оптимизации.

ANNOTATION

The possibility of using the approximate approach to reducing the costs of service pack orders by choosing the order of their execution. The development of such approaches is due to the need to simplify the procedures in problems of this type to take into account the change in the optimization of tariff penalties, stackable scheme of continuous interest. It is proved that, in practice, to find the best solutions to real problems of this type can be used for traditional network service selection algorithm that was developed for models with constant rates of fines. Simplicity of this algorithm, in turn, will significantly simplify these procedures optimization.

KEYWORDS

Service portfolio, penalties minimization, optimal rules and their modifications, approximate optimization approaches.

традиционный алгоритм оптимизации без дополнительных модификаций его процедур.

АТРИБУТЫ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МОДЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ШТРАФОВ

Экономический результат обслуживания портфеля заказов можно представлять различными способами. В этой статье анализ проведен для ситуации, когда соответствующий результат представляется на основе понятия сопутствующих издержек или штрафов (применительно к процедурам реализации заказов). В классическом случае модель, которую надо рассматривать, формализуется следующим образом. Пребывание в портфеле любого необслуженного заказа влечет денежные потери, которые обычно называют штрафами. За каждую единицу времени для i-го заказа, который находится в портфеле (и обслуживание которого еще не завершено), величина таких издержек составляет некоторую известную сумму c_i, где c_i — константы, которые называют тарифами для соответствующих штрафов. Как уже было отмечено выше, нас будут интересовать более общие модели. Далее проанализированы модели, в формате которых тарифы штрафов являются не постоянными, а увеличиваются по схеме непрерывных процентов. Поэтому, как и в [3], при постановке задачи принятия решений будем считать, что заданы следующие параметры:

N — число заказов в портфеле;

$M[S_i]$ — математическое ожидание Si, причем принимается, что S_i являются независимыми;

c_i — интенсивность штрафа в начальный момент $t=0$ создания портфеля применительно к i-му заказу;

$c_i(t) = c_i \cdot e^{\delta t}$ — интенсивность штрафов в момент времени t (причем $c_i(0) = 0$);

δ — сила роста в формате схемы непрерывных процентов, которая соответствует ставке наращения r, причем ставка наращения задана в годовых, т.е. $\delta = ln(1+r)$ (см. [7–8]).

$i = (i_1, i_2 \ldots i_N)$ — вектор, который задает очередность выполнения заказов, т.е. i_1 — номер заказа, выполняемого первым, i_2 — вторым и т.д.;

T_i — момент окончания выполнения i-го заказа (момент окончания начисления штрафов по i-му заказу).

Подчеркнем, что сложность процедур нахождения наилучшего решения для моделей такого типа обусловлена следующим. Прежде всего для любого i-го заказа переменную Ti надо рассматривать как случайную величину. Ее распределение вероятностей зависит от целого ряда факторов. К ним относятся: 1) порядок реализации заказов; 2) распределения вероятностей S_i; 3) распределения вероятностей тех S_j, которые при выбранном порядке обслуживания будут закончены ранее i-го заказа. Кроме того, при анализе надо учитывать увеличение интенсивности штрафов во времени. Такая задача оптимизации представляется как задача минимизации суммарных ожидаемых штрафов для всего портфеля заказов. В [3] уже было показано, что указанную задачу можно записать в виде:

$$M(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta} \cdot c_i \cdot (e^{\delta T_i} - 1)) \to \min .$$

Процедуры оптимизации для целевой функции такого типа (минимизация суммарных штрафов за счет выбора заказов на обслуживание) также анализировались в указанной работе. Там была установлена следующая особенность алгоритма оптимизации для моделей такого типа. Если требуется учитывать наращение штрафов по схеме непрерывного начисления процента, то для нахождения оптимального порядка обслуживания портфеля заказов вместо традиционного $c\mu$-правила необходимо использовать модифицированное $c(mod)\mu(mod)$-правило. Было доказано, что наилучший порядок выполнения заказов определяется следующим образом. Заказы надо упорядочить в очереди так, чтобы убывали величины специальных индексов $I(i)$, которые дополнительно надо сопоставить каждому заказу. При этом было доказано, что соответствующий индекс $I(i)$ применительно к i-му заказу портфеля для такой модели учета штрафов надо определять по формуле

$$I(i) = \frac{c_i \cdot \delta \cdot M(e^{\delta S_i})}{M(e^{\delta S_i}) - 1}.$$

Эта формула для специального индекса $I(i)$, найденная в работе [3], существенно отразилась на алгоритме поиска наилучшего решения. Действительно, из представленного выражения видно, что оптимизацию для таких моделей минимизации штрафов надо начинать с определения специальных показателей $M\ (e^{\delta S_i})$. Для моделей с постоянными штрафами такие процедуры не требовались. Действительно, реализуя процедуры минимизации суммарных штрафов в таких классических моделях, надо было использовать традиционное для сетей обслуживания $c\mu$-правила [1, 2], которое утверждает, что заказы портфеля надо упорядочить по убыванию соотносимых с ними индексов $c_i\mu_i$. Структура последних, как видим, намного проще, чем для указанных индексов $I(i)$, когда учитывается рост тарифов штрафов. При этом показатели $M\ (e^{\delta S_i})$, очевидно, зависят от законов распределения вероятностей для случайных длительностей S_i исполнения заказов [8]. Как их определять в реальных ситуациях, если у менеджера нет информации о типе закона распределения вероятностей для длительностей обслуживания заказов? Можно ли обойтись без дополнительных расчетов указанных модифицированных показателей $I(i)$, ведь формат традиционного для теории сетей обслуживания $c\mu$-правила был намного более удобным: он не требовал такой информации, менеджеру было достаточно знать только оценки первых моментов (средних ожидаемых значений) указанных законов распределения вероятностей.

Как видим, применительно к новому формату оптимизационных моделей указанного выше типа менеджеру важно знать, в каких случаях решение, полученное на основе традиционного варианта $c\mu$-правила (без дополнительных модификаций его процедур) можно использовать в качестве оптимальных рекомендаций, если учитывается наращение издержек по схеме непрерывно начисляемого процента. В работе [5] уже было показано, что это возможно для моделей с экспоненциальным и/или геометрическим законом обслуживания заказов. Ниже будет проведен анализ и представлено доказательство того, что это возможно и для более общих моделей (с произвольными законами распределения обслуживания заказов).

Таким образом, для моделей, которые требуют учета увеличивающегося во времени тарифа штрафов во времени (по представленной выше схеме), при нахождении оптимальной стратегии обслуживания заказов менеджеры смогут использовать рекомендации простого варианта $c\mu$-правила (без дополнительных модификаций его процедур). Это будет обоснованно применительно к ситуациям, когда длительности промежутков времени исполнения заказов представляют собой достаточно малые величины (в формате их измерения в годовых показателях). Покажем, что в формате таких моделей применительно к реальным для практики условиям процедуры вычисления требуемых индексов можно значительно упростить, а оптимальную стратегию обслуживания заказов можно находить на основе простого традиционного варианта $c\mu$–правила.

ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ, МИНИМИЗИРУЮЩЕЙ ШТРАФЫ

Рассмотрим типичный для практики случай. Пусть *Si* имеют произвольные законы распределения вероятностей со средними значениями *M(Si)*. При этом ограничимся анализом ситуации, когда их значения являются достаточно малыми величинами (в формате их представления годовыми показателями). На практике это условие, как правило, соответствует реальным ситуациям для конкретных звеньев цепей поставок в системах логистики, так как при определении указанных выше индексов *I(i)* длительности обслуживания заказов должны измеряться в годах. В то же время в реальных моделях на практике они составляют, как правило, некоторое (небольшое) количество дней или недель, поэтому их ожидаемые значения, но уже представленные в формате их измерения в годах, будут весьма малыми числовыми величинами. Учитывая, что сила роста непрерывных процентов $\delta = \ln(1+r)$, где *r* — годовая ставка наращения [6, 9], в свою очередь, будет измеряться долями единицы, можно воспользоваться тем, что показатель $\delta M(Si)$ может быть величиной весьма малой. В таких ситуациях при нахождении вспомогательного показателя $M(e^{\delta S_i})$, когда требуется реализовать модифицированные процедуры *c(mod)μ(mod)*-правила, можно использовать соответствующее разложение в ряд Тейлора–Маклорена. Это позволит выразить указанные дополнительно требуемые показатели и значения индексов *I(i)* через более простые характеристики, доступные менеджеру: через средние ожидаемые значения затрат времени на обслуживание заказов. В таких ситуациях информация о законах распределения их случайных длительностей обслуживания не потребуется. Можно ожидать, что такой подход к нахождению наилучшего решения существенно облегчит процедуры оптимизации. Покажем, что это действительно имеет место.

В формате рассматриваемой модели с «утяжелением» тарифов штрафов во времени наилучший порядок выполнения заказов портфеля определяется величиной указанного выше специального индекса *I(i)*. Для его определения найдем $M(e^{\delta S_i})$, воспользовавшись следующим разложением в ряд Тейлора–Маклорена [7]: $e^{\delta S_i} = 1 + \delta Si + o(\delta Si)$. Соответственно, для $M(e^{\delta S_i})$ получим приближенное представление:

$$[M(e^{\delta S_i})]^{-1} = 1 - \delta \cdot M(S_i) + O(\delta^2 \cdot M(S_i)^2). \tag{1}$$

Используем (1) в формате процедур нахождения индекса *I(i)* по формулам

$$I(i) = \frac{c_i \cdot \delta \cdot M(e^{\delta S_i})}{M(e^{\delta S_i}) - 1} = \frac{c_i \cdot \delta}{1 - [M(e^{\delta S_i})]^{-1}}. \tag{2}$$

Соотношение (1) подставим в последнее выражение (2) для *I(i)*. При этом получаем следующее приближенное равенство:

$$I(i) = \frac{c_i \cdot \delta}{\delta \cdot M(S_i)} = \frac{c_i}{M(S_i)} = c_i \mu_i.$$

Подчеркнем, что точность расчетов по такой формуле будет обусловлена величиной порядка $O(\delta^2 \cdot M(Si)^2)$. Как уже отмечалось, на практике этого будет достаточно.

Осталось обратить внимание на то, что такое представление индекса *I(i)* характерно именно для традиционного подхода к оптимизации порядка выполнения заказов портфеля, когда тарифы штрафов остаются постоянными, а наращиваемые издержки учитываются по схеме простых процентов. Как видим, если указанная выше точность достаточна, для рассмотренной модели с «утяжелением» тарифов штрафов во времени (на основе схемы непрерывных процентов) портфельные заказы действительно можно упорядочить по убыванию индекса, который находится как произведение *ciμi* (сравните с процедурами формального определения индекса *I(i)* по формуле (2), чтобы отметить существенное упрощение таких процедур). Итак, в анализируемой ситуации, несмотря на увеличение тарифов штрафов во времени, можно пользоваться традиционным для сетей обслуживания *cμ*-правилом.

ПРИМЕР

Выбирая порядок исполнения заказов (и их сравнения с формальным подходом), воспользуемся бизнес-кейсом, рассмотренном в [3]. Так будет удобнее иллюстрировать процедуры реализации представленного выше приближенного подхода к нахождению наилучшего решения.

Пусть компания «АС» имеет 3 заказа, по которым уже наступили сроки штрафных санкций. Однако, работы еще не начались (из-за задержки в поставке спецоборудования). Интенсивности c_i штрафов для этих заказов составляют 1% от контрактной цены заказа. Контракты учитывают «утяжеление» нагрузки штрафов по схеме непрерывно начисляемого процента с силой роста δ=0,2 (т.е. 20% годовых). Прибыли по заказам и ожидаемые длительности их обслуживания приведены в таблице. Требуется определить такой порядок выполнения заказов, который обеспечит минимальный ожидаемый размер суммарных штрафных санкций по всему портфелю заказов. Подчеркнем, что в этом примере, в отличие от аналогичной модели, которая была рассмотрена в [3], принимаем, что менеджер не имеет данных о типе законов распределения вероятностей *Si*, поэтому при анализе порядка выполнения заказов нельзя найти указанные выше индексы *I(i)* в явном виде по формуле (2). Для решения требуется: 1) использовать приближенный подход к оптимизации стратегии обслуживания заказов (по формуле (1)); 2) дать иллюстрацию возможности оптимизации по традиционному *cμ*-правилу.

Атрибуты портфеля заказов

Заказ №	*M(Si)*, сутки	*Pi*, тыс. руб.	*ci*, тыс. руб.	Индекс *ci/M(Si)*
1	10	180	1,8	0,18
2	7,5	100	1,0	0,1(3)
3	15	240	2,4	0,16

Решение

1. В первом случае для нахождения индексов *I(i)* надо предварительно оценить показатели $[M(e^{\delta S_i})]^{-1}$. Это сделаем на основе формулы (1), что и требуется условиями этого примера. Затем, подставляя такие выражения в формулу (2), найдем приближенные значения указанных индексов. При δ =0,2 по данным табл. 1 находим (с точностью до 10–4) эти индексы:

1) по заказу № 1:

$$[M(e^{\delta S_1})]^{-1} = 1 - 0{,}2 \cdot \frac{10}{365} = 0{,}9945 \text{ и } I(1) = \frac{c_1 \cdot \delta}{1 - [M(e^{\delta S_1})]^{-1}} = \frac{1{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}0055} = 65{,}69;$$

2) по заказу № 2:

$$[M(e^{\delta S_2})]^{-1} = 1 - 0{,}2 \cdot \frac{7{,}5}{365} = 0{,}9959 \text{ и } I(2) = \frac{c_2 \cdot \delta}{1 - [M(e^{\delta S_2})]^{-1}} = \frac{1 \cdot 0{,}2}{0{,}0041} = 48{,}66;$$

3) по заказу № 3:

$$[M(e^{\delta S_3})]^{-1} = 1 - 0{,}2 \cdot \frac{15}{365} = 0{,}9918 \text{ и } I(3) = \frac{c_3 \cdot \delta}{1 - [M(e^{\delta S_3})]^{-1}} = \frac{2{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}0082} = 58{,}47.$$

Упорядочим анализируемые заказы по убыванию найденных индексов *I(i)*. Получаем, что наилучший порядок выполнения рассматриваемых заказов для минимизации суммарных штрафов задается вектором (1; 3; 2).

2. Проиллюстрируем, что для нахождения наилучшего решения достаточно было использовать традиционные для сетей обслуживания индексы $c_i\mu_i = ci/M(Si)$ и упорядочить заказы портфеля по их убыванию. Расчеты приведены в дополнительном столбце табл. 1 (столбец «Индекс $c_i/M(S_i)$»), причем наилучший порядок выполнения этих заказов останется тем же: (1; 3; 2). Итак, оптимальное решение действительно можно найти, пользуясь cμ-правилом. Простоту и эффективность соответствующих процедур в этом случае отметьте сами.

Представленное здесь решение было найдено *при отсутствии информации о типе законов распределении вероятностей* для длительностей обслуживания заказов. Подчеркнем, что, как и ожидалось (в соответствии с приведенным в этой статье обоснованием), найденный приближенным методом порядок выполнения заказов совпадает с порядком их выполнения по традиционному cμ-правилу. Этот пример иллюстрирует, что на практике при малых значениях $M(S_i)$ (применительно к формату их измерения в годах) менеджер действительно может использовать традиционный вариант оптимального *cμ*-правила, найденного в теории сетей обслуживания для определения наилучшего порядка выполнения заказов. При этом необходимость расчетов специальных модифицированных показателей по введенным в [3] индексам *I(i)* отпадает: менеджер будет избавлен от такой дополнительной вычислительной нагрузки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье доказано, что при решении реальных задач, связанных с выбором порядка реализации портфеля заказов, в практических ситуациях (когда требуется учитывать «утяжеление» тарифов штрафов или издержек во времени в формате анализируемых цепей поставок) для нахождения наилучшего решения можно использовать простой и традиционный для теории сетей обслуживания алгоритм оптимизации, который был разработан для моделей с постоянными тарифами штрафов: при выборе оптимального порядка обслуживания заказов в указанных ситуациях можно использовать традиционное правило оптимизации, называемое оптимальным *cμ*-правилом. Такая возможность обоснованна в формате ситуаций, когда математические ожидания длительностей обслуживания заказов представляют достаточно малые величины (при их измерении в годовых показателях). Поскольку такое условие для современных цепей поставок, как правило, выполняется (указанные длительности измеряются сутками (неделями) и поэтому в годовом представлении их значения достаточно малы), то можно отметить, **что привлекательность для менеджеров представленного здесь нового приближенного подхода к оптимизации издержек обслуживания дополнительно обусловливается следующим**:

- не потребуются дополнительные расчеты, связанные с необходимостью нахождения специальных усредненных показателей для интенсивностей выполнения заказов при учете непрерывных процентов;
- не потребуются дополнительные усилия:
  — на реализацию процедур усреднения показателей тарифов штрафов (при представлении издержек на основе штрафов, учитываемых по схеме непрерывно начисляемого процента);
  — на реализацию процедур усреднения показателей контрактных сумм для портфеля заказов (когда экономический результат представлен на их основе с учетом схемы непрерывно начисляемого процента);
  — на поиск специальных модифицированных индексных показателей, по которым определяется очередность выполнения имеющихся заказов.

Представленный пример проиллюстрировал эффективность таких решений. **Можно надеяться, что разработанный подход к оптимизации решений при выборе порядка исполнения заказов поможет практикующим менеджерам повысить эффективность работы отдельных звеньев цепей поставок.**

Библиографический список:

1. *Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. — М.: Мир, 1993 г. — 336 с.*
2. *Бродецкий Г.Л. Имеющиеся резервы снижения издержек обслуживания заказов в цепях поставок // Логистика сегодня. — 2009. — № 6.*
3. *Бродецкий Г.Л. Новый формат стратегий минимизации издержек обслуживания заказов при увеличении тарифов штрафов во времени // Логистика. — 2011. № 2.*
4. *Бродецкий Г.Л. Учет рисков потерь дохода при обслуживании заказов в цепях поставок и непрерывном начислении процента // Проблемы анализа рисков. — 2012. — № 1. — С. 42–48.*
5. *Борисова Л.А., Бродецкий Г.Л. Простое правило минимизации издержек обслуживания портфеля заказов при непрерывном начислении процентов // Логистика сегодня. — 2013. — № 5.*
6. *Ковалев В.В. Финансовый анализ. — М.: Финансы и статистика, 1997. — 512 с.*
7. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1974. — 831 с.*
8. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — Киев: Наукова думка, 1978. — 583 с.*
9. *Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник. — М.: Дело, 2007. — 400 с.*