Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Романов, Ординарные полукаскады и их эргодические свойства, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 92–96

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 85.141.216.7
10 октября 2014 г., 21:08:43

Зап. научн. сем. ПОМИ, **333** (2006), 62–65. [**6**] С. В. Кисляков, Н. Г. Сидоренко, Сибирск. матем. ж., **29**:3 (1988), 64–77. [**7**] A. Pełczyński, K. Senator, Studia Math., **84**:2 (1986), 169–215. [**8**] В. А. Солонников, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27** (1972), 194–210.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова
e-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию 1 августа 2012 г.

С.-Петербургский Государственный Политехнический Университет
e-mail: dimax239@bk.ru

Исследовательская лаборатория им. П. Л. Чебышева СПБГУ, Санкт-Петербург
e-mail: dms239@mail.ru

УДК 517.98

Ординарные полукаскады и их эргодические свойства

© 2013. А. В. Романов

Введение. В этой статье эргодические свойства дискретной динамической системы (Ω, φ), порожденной непрерывным преобразованием метрического компакта Ω, формулируются в терминах трех ассоциированных с (Ω, φ) алгебро-топологических объектов. Речь идет об описанных в [1], [2] обволакивающей полугруппе Эллиса $E(\Omega, \varphi)$ и операторной обволакивающей полугруппе Кёлер $\Gamma(\Omega, \varphi)$, а также, о рассмотренной в предшествующей работе автора [3] и связанной с $\Gamma(\Omega, \varphi)$ операторной полугруппе $G(\Omega, \varphi)$. Помимо этого изучаются представляющие самостоятельный интерес зависимости между тремя данными полугруппами. Как показано в [3], топологические характеристики компактных в соответствующих топологиях полугрупп $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$ тесно связаны с эргодическими свойствами полукаскада (Ω, φ). Оказывается, подобного рода связи проявляются особенно ярко для класса дискретных динамических систем, обладающих метризуемой обволакивающей полугруппой $E(\Omega, \varphi)$ и называемых здесь ординарными. Ряд результатов о полугруппах Эллиса подобных систем (причем не только дискретных) можно найти в обзоре [4]. Известно, что ординарными оказываются все слабо почти периодические динамические системы.

Здесь предложено (теорема 4) альтернативное определение ординарности полукаскада (Ω, φ), состоящее в требовании метризуемости индуцированной полугруппы $G(\Omega, \varphi)$. Рассматривается также первоначально введенный Кёлер [2] и изученный в работах [4]–[6] класс так называемых ручных динамических систем (Ω, φ). В разд. 2 представлена иерархическая сводка известных ранее и некоторых новых свойств полукаскада (Ω, φ), формулируемых большей частью в терминах полугрупп $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$.

В то же время главные результаты заметки относятся к слабой* сходимости операторных эргодических средних для ординарных и ручных полукаскадов. Сама идея рассмотрения подобной сходимости в эргодической теории восходит по существу к классической работе Крылова и Боголюбова [7].

1. Предварительные сведения. Пусть φ — непрерывное (не обязательно обратимое) преобразование метрического компакта Ω и (Ω, φ) — соответствующий полукаскад на Ω. Отображение $\varphi\colon \Omega \to \Omega$ порождает линейные сдвиги U и $V = U^*$ в пространстве $X = C(\Omega)$ непрерывных скалярных функций на Ω и в сопряженном пространстве X^* борелевских мер на Ω. Обозначим через $\operatorname{End} X^*$ нормированное пространство ограниченных линейных операторов в X^*. Обволакивающая полугруппа $E(\Omega, \varphi)$ полукаскада (Ω, φ) получается [1] замыканием семейства $\{\varphi^n,\, n \geqslant 0\}$ в отделимой топологии поточечной сходимости пространства всевозможных отображений $\Omega \to \Omega$. Заметим, что хотя в работе [1] рассматриваются обратимые динамические системы, большинство ее результатов справедливо также и в необратимом случае. Полугруппа $\Gamma(\Omega, \varphi)$ представляет собой [2] замыкание множества $\Gamma_0 = \{V^n,\, n \geqslant 0\}$ в слабой* операторной топологии W^*O пространства операторов $\operatorname{End} X^*$. Полугруппа операторов $G(\Omega, \varphi)$ определяется [3] как W^*O-замкнутая выпуклая оболочка множества Γ_0. Множества $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$ компактны в указанных топологиях. Если $A = A(\Omega)$ и $K = K(\Omega)$ — компактные в w^*-топологии пространства $X^* = C^*(\Omega)$ множества вероятностных борелевских мер и мер Дирака $\delta(\omega)$ на Ω, то полугруппу $G(\Omega, \varphi)$ можно интерпретировать как обволакивающую полугруппу действия $W \times A \xrightarrow{V} A$ абелевой полугруппы W неотрицательных финитных числовых последовательностей с единичной суммой и со сверткой в качестве умножения. При этом $V\delta(\omega) = \delta(\varphi\omega)$, $\omega \in \Omega$, так что $PK \subset K$ для всех операторов $P \in \Gamma(\Omega, \varphi)$. Соответствие $V \to \varphi$ индуцирует непрерывный алгебраический гомоморфизм $\pi\colon P \to p$ полугруппы $\Gamma(\Omega, \varphi)$ в полугруппу $E(\Omega, \varphi)$, действие которого понятным образом определяется из соотношения

$$P\delta(\omega) = \delta(p\omega), \qquad \omega \in \Omega, \tag{1}$$

и оказывается эпиморфизмом.

Определение 1. Полукаскад (Ω, φ) называется *ординарным*, если его обволакивающая полугруппа $E(\Omega, \varphi)$ метризуема.

Определение 2 (см. [4]). Скажем, что динамическая система (Ω, φ) *не хаотична*, если каждое замкнутое полуинвариантное ($\varphi\Theta \subset \Theta$) множество $\Theta \subset \Omega$ содержит траекторию $o(\omega)$, $\omega \in \Theta$, устойчивую по Ляпунову относительно полукаскада (Θ, φ).

Здесь и далее $o(\omega) = \{\varphi^n\omega,\, n \geqslant 0\}$ для $\omega \in \Omega$. Понятие ручной динамической системы изначально вводилось [2] следующим образом.

Определение 3. Полукаскад (Ω, φ) называем *ручным*, если для любой непрерывной функции $x \in X$ и произвольной подпоследовательности $\{n(k)\}$ натурального ряда справедливо соотношение

$$\inf_a \Bigl\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n(k)} \Bigr\|_X = 0,$$

где $x_m(\omega) = x(\varphi^m\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ и нижняя грань берется по финитным вещественным последовательностям $a = \{a_k\}$ с $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = 1$.

Обозначим через Π_1 совокупность преобразований компакта Ω, принадлежащих первому из расширяющихся классов Бэра, а через Π_b множество всех борелевских отображений $p\colon \Omega \to \Omega$.

Пусть G_0 — выпуклая оболочка множества Γ_0 в $\operatorname{End} X^*$. Сеть операторов $T_\alpha \in G_0$ называется *эргодической*, если $T_\alpha(I-V) \xrightarrow{W^*O} 0$, $I = \mathrm{id}$. Соответственно определяются эргодические последовательности операторов $T_n \in G_0$. Последовательность средних Чезаро $V_n = \frac{1}{n}(I + V + \dots + V^{n-1})$ эргодична, так как $V_n(I-V) = n^{-1}(I - V^n)$, $\|V^n\| = 1$. Отметим, что W^*O-сходимость эргодических сетей операторов T_α равносильна сходимости для произвольных функций $x \in X$ эргодических средних $T_\alpha^* x \to z$, $z \in X^{**}$, в w^*-топологии пространства $X^{**} = C^{**}(\Omega)$. Для эргодических последовательностей подобная сходимость эквивалентна поточечной сходимости на компакте Ω, но в общем случае может быть сильнее.

2. Классификация свойств компактных полукаскадов. Рассмотрим следующие классы D1–D6 свойств полукаскада (Ω, φ), связанных, в основном, с рассматриваемой задачей о слабой* сходимости эргодических средних.

D1: (a1) компакт $E(\Omega, \varphi)$ метризуем;

(b1) система (Ω, φ) не хаотична;

(c1) компакт $G(\Omega, \varphi)$ метризуем.

D2: (a2) компакт $G(\Omega, \varphi)$ есть пространство Фреше–Урысона;

(b2) $\operatorname{card} G(\Omega, \varphi) = \aleph$.

D3: (a3) полукаскад (Ω, φ) представляет собой ручную систему;

(b3) компакт $E(\Omega, \varphi)$ есть пространство Фреше–Урысона;

(c3) $\operatorname{card} G(\Omega, \varphi) \leqslant \aleph$;

(d3) $E(\Omega, \varphi) \subset \Pi_1$;

(e3) $E(\Omega, \varphi) \subset \Pi_b$.

D4: (a4) операторы $T \in G(\Omega, \varphi)$ определяются своими значениями на мерах Дирака $\delta \in K(\Omega)$.

D5: (a5) выпуклое множество операторов $G(\Omega, \varphi)$ есть симплекс Шоке.

D6: (a6) операторы $P \in \Gamma(\Omega, \varphi)$ определяются своими значениями на мерах Дирака;

(b6) функция $\pi \colon \Gamma(\Omega, \varphi) \to E(\Omega, \varphi)$, определенная формулой (1), инъективна;

(c6) $\operatorname{ex} G = \Gamma$;

(d6) $\operatorname{ex} \Gamma = \Gamma$.

Здесь $\Gamma = \Gamma(\Omega, \varphi)$, $G = G(\Omega, \varphi)$ и $\operatorname{ex}(\,\cdot\,)$ обозначает совокупность крайних точек для множеств в $\operatorname{End} X^*$. Часть свойств динамической системы (Ω, φ), входящих в классы D1, D3 и D6, рассматривалась ранее в [4]–[6]. Хотя эти работы посвящены обратимым динамическим системам, переход к необратимому случаю оказывается в необходимых ситуациях чисто техническим. Свойства (c6), (d6) обсуждались в [3]. Топологический компакт обладает свойством Фреше–Урысона, если операция замыкания множеств в нем определяется на языке последовательностей. Свойство (a5) означает [8], что конус в пространстве $\operatorname{End} X^*$ с основанием $G(\Omega, \varphi)$ является векторной структурой. Если выполнено условие (b6), то определенная соотношением (1) функция $\pi \colon \Gamma(\Omega, \varphi) \to E(\Omega, \varphi)$ представляет собой одновременно гомеоморфизм и алгебраический изоморфизм, что позволяет отождествить полугруппы $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $E(\Omega, \varphi)$.

Теорема 4. *Свойства полукаскада (Ω, φ) внутри каждого из классов* D1, D2, D3, D6 *попарно эквивалентны.*

Таким образом, любое из свойств (b1), (c1) можно принять за альтернативное определение ординарности, а каждое из свойств (b3), (c3), (d3) или (e3) вполне характеризует ручные системы (Ω, φ). Подчеркнем, что эквивалентности (a1) $\Longleftrightarrow$ (b1) и (a3) $\Longleftrightarrow$ (b3) $\Longleftrightarrow$ (c3) $\Longleftrightarrow$ (d3) установлены в [4]–[6], а (b6) $\Longleftrightarrow$ (c6) $\Longleftrightarrow$ (d6) получены в [3]. Как видим, полукаскад (Ω, φ) является ручным точно тогда, когда его обволакивающая полугруппа $E(\Omega, \varphi)$ состоит из борелевских преобразований. Значит, если эта полугруппа содержит преобразования, не входящие в первый класс Бэра, то она содержит и преобразования, не являющиеся борелевскими.

Таким образом, можно говорить о классах $\mathscr{D}1$–$\mathscr{D}6$ полукаскадов (Ω, φ), обладающих любым из (эквивалентных) свойств, входящих соответственно в классы D1–D6. Известно (см. [4]), что класс $\mathscr{D}3$ ручных динамических систем не совпадает с классом $\mathscr{D}1$ ординарных систем.

Теорема 5. *Справедливы включения* $\mathscr{D}1 \subset \mathscr{D}2 \subset \mathscr{D}3 \subset \mathscr{D}6$ *и* $\mathscr{D}1 \subset \mathscr{D}4 \subset \mathscr{D}5 \subset \mathscr{D}6$.

Итак, в ординарном случае выпуклое компактное подмножество $G(\Omega, \varphi)$ линейного пространства $\operatorname{End} X^*$ является симплексом Шоке и любой оператор $T \in G(\Omega, \varphi)$ определяется своими значениями на мерах Дирака $\delta(\omega)$, $\omega \in \Omega$. В случае ручного полукаскада (Ω, φ) совокупность крайних точек множества $G(\Omega, \varphi)$ совпадает с множеством $\Gamma(\Omega, \varphi)$. Импликация (a3) $\Longrightarrow$ (b6) была установлена еще в [2]. Класс ординарных полукаскадов $\mathscr{D}1$ достаточно обширен, ибо состоит из всех дискретных компактных динамических систем, не хаотичных в смысле определения 2. С другой стороны, известен пример [4] минимального дистального каскада на двумерном торе, не входящего даже в наиболее широкий из рассмотренных выше класс $\mathscr{D}6$.

3. Эргодические свойства ординарных и ручных полукаскадов. Сформулируем теперь утверждения, относящиеся к эргодическим свойствам полукаскадов указанных типов. Соответствующие доказательства основаны на построениях разд. 2 и результатах работы [3]. Сходимость эргодических операторных сетей T_α в пространстве $\operatorname{End} X^*$ понимается в смысле W^*O-топологии. Обозначим через $\Lambda(\Omega)$ множество эргодических мер полукаскада (Ω, φ). Пару точек $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ называем проксимальной, если $\inf_{n \geqslant 0} \rho(\varphi^n \omega_1, \varphi^n \omega_2) = 0$ для заданной на компакте Ω метрики ρ. Пусть, далее, L — ядро (пересечение всех двусторонних идеалов) полугруппы $G(\Omega, \varphi)$, состоящее из проекторов $Q \in G(\Omega, \varphi)$ со свойством $VQ = Q$.

Теорема 6. *Если полукаскад* (Ω, φ) *ординарен, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *Каждая эргодическая сеть операторов* T_α *содержит сходящуюся подпоследовательность* $T_{\alpha(k)}$. *Все эргодические сети операторов* T_α *сходятся тогда и только тогда, когда для любого* $\omega \in \Omega$ *замыкание траектории* $o(\omega)$ *содержит в себе единственное минимальное множество. Последнее верно с заменой слова «сети» на «последовательности».*

(ii) *Найдется такая сходящаяся эргодическая последовательность операторов* T_n, *что для любого* $\omega \in \Omega$ *меры* $T_n \delta(\omega)$ *слабо* сходятся в* X^* *к эргодической мере* $\mu_\omega \in \Lambda(\Omega)$, *или, другими словами, асимптотическое (относительно* $\{T_n\}$*) распределение всех траекторий динамической системы* (Ω, φ) *определяется эргодическими мерами.*

(iii) *Если отношение проксимальности на* Ω *транзитивно, то все эргодические сети операторов* T_α *сходятся.*

(iv) *Для каждой эргодической сети операторов T_α из поточечной сходимости функциональной сети $T_\alpha^* x$ на компакте Ω для всех непрерывных функций $x \in X$ следует W^*O-сходимость $T_\alpha \to Q$, $Q \in L$.*

На самом деле утверждения (i)–(iii) верны в классе полукаскадов $\mathscr{D}2$, а для справедливости (iv) достаточно свойства (a4). Как показано в [3], для произвольного полукаскада (Ω, φ) сходимость всех эргодических операторных сетей равносильна условию $\operatorname{card} L = 1$.

Теорема 7. *В случае ручного полукаскада (Ω, φ) можно сказать следующее.*

(i) *Минимальный центр притяжения $Z(\Omega, \varphi)$ совпадает с замыканием объединения всех минимальных множеств.*

(ii) *Если замыкание любой траектории $o(\omega)$, $\omega \in \Omega$, содержит единственное минимальное множество, то все эргодические последовательности операторов T_n сходятся и носитель каждой эргодической меры $\mu \in \Lambda(\Omega)$ есть минимальное множество.*

Напомним, что минимальный центр притяжения $Z(\Omega, \varphi)$ динамической системы (Ω, φ) определяется как замыкание объединения носителей всех эргодических мер. Кроме того, отметим в этой связи строгую эргодичность минимальных ручных систем, установленную не так давно в [4], [9], [10]. Подчеркнем, что изложенные результаты нетрудно обобщить на случай динамических систем с непрерывным временем.

Литература

[**1**] R. Ellis, *Lectures on Topological Dynamics*, Benjamin, New York, 1969. [**2**] A. Köhler, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, **95**:2 (1995), 179–191. [**3**] А. В. Романов, Изв. РАН. Сер. матем., **75**:6 (2011), 79–98. [**4**] E. Glasner, Topology Appl., **154**:11 (2007), 2344–2363. [**5**] E. Glasner, M. Megrelishvili, Colloq. Math., **104**:2 (2006), 223–283. [**6**] E. Glasner, Colloq. Math., **105**:2 (2006), 283–295. [**7**] N. Kryloff, N. Bogoliouboff, Ann. of Math., **38**:1 (1937), 65–113. [**8**] Р. Фелпс, *Лекции о теореме Шоке*, Мир, М., 1968. [**9**] W. Huang, Ergodic Theory Dynam. Systems, **26**:5 (2006), 1549–1567. [**10**] D. Kerr, H. Li, Math. Ann., **338**:4 (2007), 869–926.

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: vitkar48@inbox.ru

Поступило в редакцию
31 октября 2011 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 22.04.2013. Дата выхода в свет 20.05.2013. Формат 70×100/16
Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,5 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 181 экз. Заказ 1177. Цена свободная

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6