

Математическое моделирование движения космического аппарата в окрестности точки L_2 системы Солнце—Земля

Г.К. Боровин¹, И.С. Ильин¹, Г.С. Заславский¹, С.М. Лавренов²,
В.В. Сазонов¹, В.А. Степаньянц¹, А.Г. Тучин¹,
Д.А. Тучин¹, В.С. Ярошевский¹

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

² Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Москва, 101000, Россия

Рассмотрено баллистическое проектирование перелета космического аппарата (КА) в окрестность точки L_2 и последующий выход КА на гало-орбиту. Изложен метод расчета траекторий одноимпульсных перелетов Земля — гало-орбита с использованием и без использования лунного гравитационного маневра. При расчете одноимпульсных траекторий перелетов Земля — гало-орбита применяется алгоритм построения начальных приближений. Указанные приближения строятся путем расчета и анализа изолиний функции от двух переменных. В качестве такой функции рассматривается высота перицентра отлетной орбиты над поверхностью Земли. Аргументами функции являются специальные параметры, характеризующие гало-орбиту. Указанный алгоритм позволяет получить гало-орбиты с заданными геометрическими характеристиками как в плоскости эклиптики, так и в плоскости ей ортогональной. Получены оценки затрат характеристической скорости на поддержание КА на выбранной гало-орбите. Описанная методика была использована для поиска рабочих орбит КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон». Приведены примеры полученных орбит.

Ключевые слова: гало-орбиты, точка L_2 , метод изолиний, «Спектр-РГ», «Миллиметрон».

Введение. Гало-орбиты — семейство условно-периодических пространственных орбит в окрестности коллинеарных точек либрации L_1 , L_2 , L_3 , являющихся решениями круговой ограниченной задачи трех тел. КА, находящийся на гало-орбите, не совершает орбитального движения вокруг точки либрации в общепринятом понимании, но движется по замкнутой периодической траектории, непокидающей окрестности точки либрации.

Работа посвящена описанию алгоритма построения траекторий перелета КА с низкой околокруговой орбиты на гало-орбиту с заданными параметрами около точки L_2 системы Солнце—Земля. Рассмотрены прямые перелеты и перелеты с использованием гравитационного маневра у Луны.

Гало-орбита задается четырьмя параметрами: A — удаление КА от точки L_2 в плоскости эклиптики; B — удаление КА от точки L_2 в плоскости, ортогональной эклиптике; φ_1 — фаза колебательного движения КА в проекции на плоскость эклиптики; φ_2 — фаза колебательного движения КА в проекции на плоскость, ортогональную эклиптике.

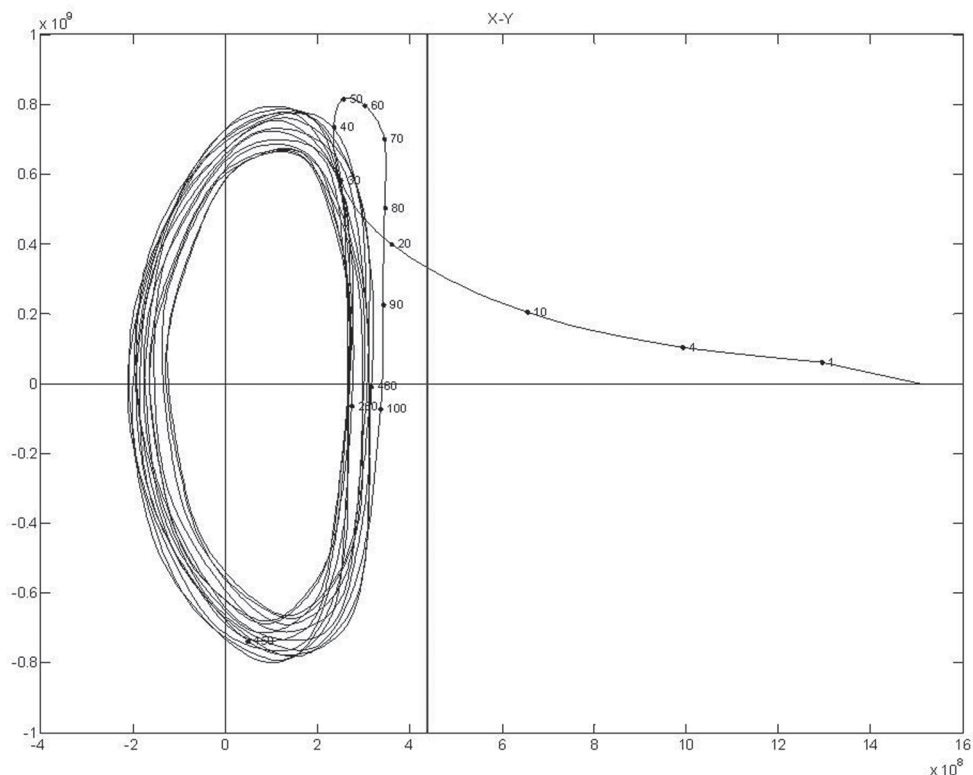


Рис. 1. Перелет без использования гравитационного маневра у Луны: траектория перелета и проекция гало-орбиты вокруг точки L_2 на плоскость OXY вращающейся СК

Пример траектории перелета и полета по гало-орбите показан на рис. 1, где представлена проекция траектории на плоскость OXY вращающейся СК с началом в точке L_2 . Ось OX направлена от точки L_2 к Земле. Ось OZ ортогональна плоскости эклиптики. Ось OY дополняет систему до правой. Цифры, указанные вдоль кривой, — сутки полета. Примерно через 20 сут полета КА выходит из сферы действия Земли, а через 100 сут переходит на гало-орбиту. Траектория полета по гало-орбите приведена с учетом выполнения коррекций удержания. При полете по гало-орбите КА облетает точку L_2 за 180 сут.

Статья содержит четыре раздела. В первом разделе описан метод построения начального приближения для перелета с низкой орбиты

ИСЗ на заданную гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце—Земля без импульса торможения. Описан и развит предложенный М.Л. Лидовым метод построения изолиний функции высоты перицентра от параметров гало-орбиты, позволяющий найти траектории перелета с орбиты ИСЗ на гало-орбиту, которые не требуют импульса торможения в окрестности точки L_2 .

Во втором разделе рассмотрен метод построения начального приближения для траектории одноимпульсного перелета с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки L_2 с использованием гравитационного маневра у Луны. Метод применим как в случае, когда КА после перехода на перелетную траекторию сразу направляется к Луне, так и в случае, когда КА перед перелетом к Луне совершает виток вокруг Земли по высокоэллиптической орбите.

В третьем разделе предложен алгоритм точного расчета параметров траекторий перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту вокруг точки L_2 без использования и с использованием гравитационного маневра у Луны. Входными данными для этого алгоритма служат начальные приближения, рассмотренные в первых двух разделах.

Примеры расчета номинальных траекторий перелета с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки L_2 приведены в четвертом разделе. Представлены траектории перелета, рассчитанные в рамках работ по проектам «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», позволяющие выйти на гало-орбиты с различными геометрическими характеристиками. Также приведен пример расчета траектории перелета на гало-орбиту с использованием гравитационного маневра у Луны.

Периодические орбиты в окрестности коллинеарных точек либрации. Движение в окрестности коллинеарных точек либрации, являющихся решениями ограниченной круговой задачи трех тел, можно рассматривать как совокупность двух осцилляций — в плоскости орбиты меньшего тела вокруг центрального и в плоскости ей ортогональной, а также некоего «гиперболического» поведения. Последнее означает, что осцилляции неустойчивы и даже малые отклонения со временем приведут к уходу от периодической орбиты. Орбиты, описываемые осцилляциями в плоскости орбиты меньшего тела или же в плоскости ей ортогональной, принято классифицировать как плоские или вертикальные орбиты Ляпунова. Частоты этих осцилляций изменяются в зависимости от амплитуды (поскольку задача нелинейна), и при некоторых амплитудах становятся равными — в этом случае говорят о гало-орбите. Если частоты осцилляций в различных плоскостях существенно отличаются, движение является непериодическим, траектория движения называется орбитой Лиссажу. Орбиты Лиссажу являются

квазипериодическими. Подобные орбиты могут существовать как в окрестности вертикальных периодических орбит, так и в окрестности гало-орбит. Примеры орбит, относящихся к вышеописанным классам, представлены на рис. 2.

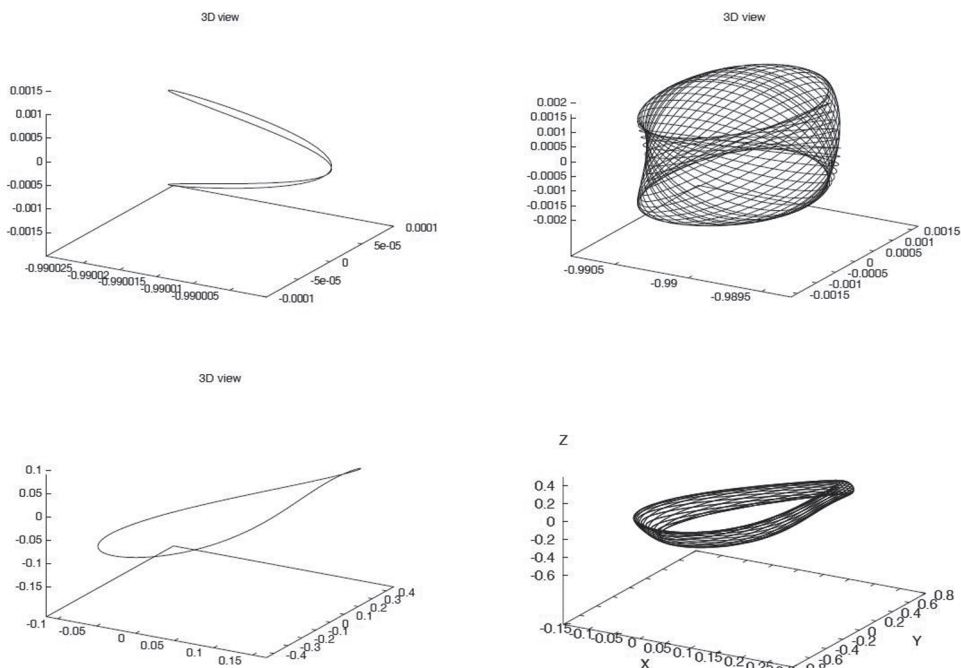


Рис. 2. Примеры орбит в окрестности точки либрации L_1 :
 сверху слева — вертикальная периодическая орбита Ляпунова; сверху справа — квазипериодическая орбита в окрестности вертикальной периодической орбиты — орбита Лиссажу;
 внизу слева — периодическая гало-орбита; внизу справа — квазипериодическая гало-орбита в окрестности гало-орбиты

Первой миссией, отправленной к коллинеарным точкам либрации системы Солнце—Земля в окрестности точки либрации, стал запуск аппарата ISEE-3 к точке L_1 в 1978 г. Траектория движения этого КА такова, что гравитационные воздействия Земли и Солнца на аппарат имеют одинаковый порядок и описание движения в рамках задачи двух тел с учетом возмущений от третьего тела невозможно. В этом случае ограниченная задача трех тел является приемлемой моделью для баллистического проектирования миссии. В рамках данной модели была показана роль точек либрации, позволяющих получить достаточно сложную и эволюционирующую траекторию движения аппарата в системе Солнце—Земля—Луна с минимальными затратами топлива. Во многом благодаря этой миссии использование динамики коллинеарных точек либрации стало рассматриваться как реальная инженерная методика.

Аппарат для исследования комет и солнечного ветра ISEE-3 был первым КА, выведенным на квазипериодическую гало-орбиту. Он вышел на траекторию прямого перелета к точке L_1 системы Солнце—Земля, совершил несколько оборотов на гало-орбите в ее окрестности, затем был переведен в окрестность точки L_2 . После выполнения гравитационных маневров у Луны аппарат был направлен на сближение с кометой Якобини—Циннер. Гало-орбита в окрестности точки L_2 имела небольшой выход из плоскости эклиптики, составлявший 1,2 тыс. км.

Следующая миссия, использовавшая гало-орбиту — космическая обсерватория SOHO, совместный проект ЕКА и НАСА, направленный на изучение Солнца. Аппарат был выведен на гало-орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце—Земля, схожую с орбитой аппарата ISEE-3. Период орбиты составил 178 сут. Точное выведение на гало-орбиту привело к минимальным расходам топлива на коррекцию, что позволило на шесть лет продлить научную программу.

Большой интерес для анализа представляет траектория космического аппарата WIND (функционирует по настоящее время), запущенного к точке L_1 системы Солнце—Земля 1 ноября 1994 г. для изучения солнечного ветра. Первые три года аппарат находился на высокоэллиптической геоцентрической орбите и совершал гравитационные маневры у Луны таким образом, что линия апсид его орбиты оставалась параллельной направлению от Земли на Солнце. Кроме того, в этот период был сделан один виток вокруг точки L_1 системы Солнце—Земля. Далее, в рамках расширенной миссии, КА WIND вышел на так называемые «лепестковые орбиты» — орбиты с большим (более 1,5 млн км) удалением от Земли в направлении оси Z и эволюционирующим наклоном относительно плоскости эклиптики. Также аппарат совершил облет точки L_2 . Данная орбита уникальна, она обеспечила проведение запланированных научной программой измерений в широкой окрестности околоземного пространства.

Первым аппаратом, использовавшим орбиту Лиссажу, стал КА НАСА ACE, запущенный к точке либрации системы Солнце—Земля в 1997 г. Выведение на орбиту и ее поддержание потребовали коррекций: коррекции удержания необходимо было производить с периодичностью 8 нед, коррекции, изменяющие геометрию орбиты для поддержания угла КА—Солнце—Земля — раз в 3–6 мес. Период орбиты составил 178 сут, аппарат функционирует по настоящее время.

В 2001 г. на орбиту Лиссажу в окрестности точки L_2 системы Солнце—Земля была выведена космическая обсерватория НАСА —

КА WMAP. Перелет был осуществлен с использованием гравитационного маневра у Луны. В том же году к точке L_1 системы Солнце—Земля был запущен КА Genesis, также использовавший орбиту Лиссажу.

В 2009 г. на высокоамплитудную орбиту Лиссажу в окрестности точки L_2 системы Солнце—Земля были выведены КА «Гершель» и «Планк» ЕКА. После перехода на орбиту с траектории перелета КА «Планк» исполнил маневр перехода на орбиту Лиссажу с меньшей амплитудой, в то время как Гершель остался на высокоамплитудной орбите.

Удобство использования гало-орбит для размещения на них космических телескопов и других аппаратов для астрофизических исследований обусловлено следующим фактором: данные орбиты сохраняют свою пространственную ориентацию относительно Солнца и Земли. Исследуемые в настоящей работе гало-орбиты располагаются в окрестности коллинеарной точки либрации L_2 , удаленной от Земли на расстояние порядка 1,5 млн км. В этом случае пространственная конфигурация орбиты позволяет экранировать антенну от солнечного и отраженного от Земли излучения при условии поддержания постоянной ориентации аппарата. В то же время, вращаясь вместе с Землей вокруг Солнца, аппарат за год совершает оборот на 360° , что позволяет наблюдать любые объекты Вселенной, расположенные вблизи плоскости эклиптики.

Кроме того, как будет показано далее, гало-орбиты являются энергетически выгодными: возможен безымпulsive переход на подобную орбиту с геоцентрической отлетной траектории, а суммарные коррекции для поддержания орбиты так же невелики.

Начальное приближение для траектории прямого одноимпульсного перелета с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки L_2 . Приближенное описание прямых одноимпульсных перелетов (без гравитационного маневра у Луны) с околокруговой орбиты ИСЗ на заданную гало-орбиту использует метод изолиний функции высоты перицентра от параметров гало-орбиты, предложенный в [5]. В данной работе этот метод распространен на случай перелета с гравитационным маневром у Луны. Движение КА рассматривается во вращающихся системах координат: в системе $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре Земли O и в системе $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом O' в точке либрации L_2 (рис. 3). При этом $x_1 = \xi_1 - |OO'|$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$.

Зависимость координат ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 от времени определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Ce^{\lambda t} + De^{-\lambda t}, \\ \xi_2 &= -k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (Ce^{\lambda t} - De^{-\lambda t}), \\ \xi_3 &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\omega_1 = n_1 \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{9B_L^2 - 8B_L - B_L} + 2)} \approx 0,035384 \frac{\text{рад}}{\text{сут}},$$

$$\omega_2 = n_1 \sqrt{B_L} \approx 0,034148 \frac{\text{рад}}{\text{сут}},$$

$$\lambda = n_1 \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{9B_L^2 - 8B_L + B_L} - 2)} \approx 0,042734 \frac{\text{рад}}{\text{сут}},$$

$$k_1 = \frac{1}{2(\lambda / n_1)} \left[\left(\frac{\lambda}{n_1} \right)^2 - 2B_L - 1 \right] \approx -0,54525,$$

$$k_2 = \frac{1}{2(\omega_1 / n_1)} \left[\left(\frac{\omega_1}{n_1} \right)^2 + 2B_L + 1 \right] \approx 3,1873,$$

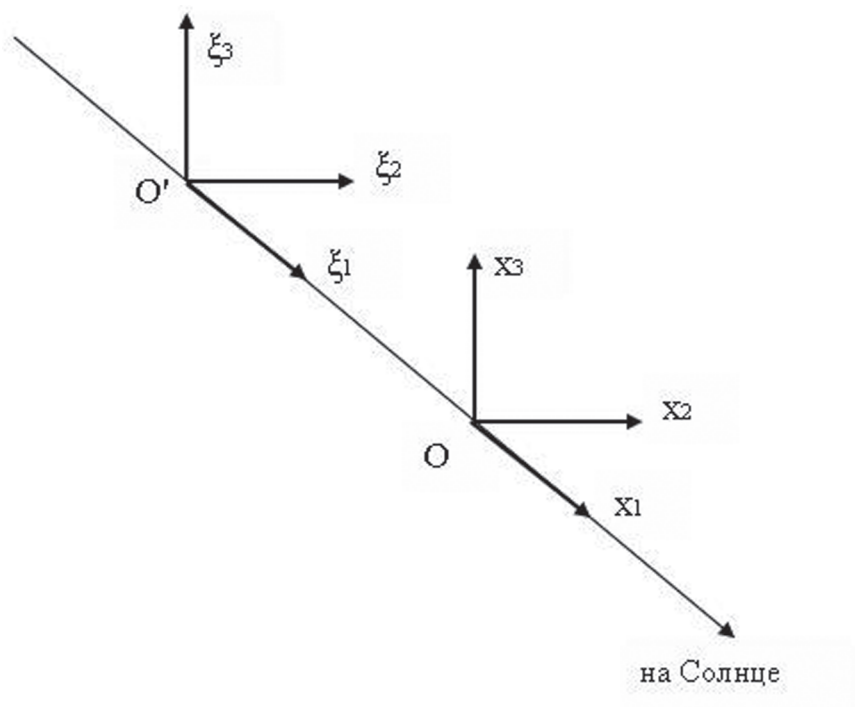


Рис. 3. Системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $O'\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\mu' = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu},$$

$$B_L = \left(\frac{1 - \mu'}{r_{L1}^3} + \frac{\mu'}{r_L^3} \right) a_1^3,$$

где μ_1, μ — массы Солнца и Земли; a_1 — астрономическая единица; r_{L1}, r_L — расстояния от точки L_2 до Солнца и Земли; n_1 — средняя угловая скорость орбитального движения Земли; $A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$ — постоянные интегрирования.

Формулы (1) представляют собой общее решение линеаризованных уравнений, описывающих малые колебания КА в окрестности точки L_2 [1].

Наличие слагаемого $De^{-\lambda t}$, затухающего с ростом t , позволяет КА, находящемуся на гало-орбите в начальный момент времени, удаляться от точки L_2 на значительное расстояние. Поэтому в рамках задачи трех тел существует семейство орбит (орбиты перелета), которые, с одной стороны, достаточно близко подходят к Земле (в начальный момент времени), а с другой стороны, некоторое время являются гало-орбитами (спустя 100 сут после отлета от Земли). На этом свойстве основан метод построения начального приближения для траекторий перелета с низкой орбиты ИСЗ на заданную гало-орбиту в окрестности точки L_2 без импульса торможения.

Определим $x_1^* = -\theta r_L$. Выбором θ в интервале $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$ можно удовлетворить следующим условиям. Если траектория начинается в окрестности Земли и является асимптотической к условно-периодической орбите, расположенной в достаточно малой окрестности L_2 , то такая траектория обязательно пересечет плоскость $x_1 = x_1^*$. При этом характеристики траектории для $|x_1| < |x_1^*|$ должны удовлетворительно описываться решениями задачи двух тел, а при $|x_1| > |x_1^*|$ линейным приближением (рис. 4).

Асимптотическое приближение к условно-периодической орбите в рамках такого приближения определяется условием $C = 0$. За счет выбора D обеспечивается сопряжение гало-орбиты с орбитой ИСЗ.

Пусть начало отсчета выбрано так, что при $t = t_0$ выполняется равенство: $x_1 = x_1^*$. Тогда из первого уравнения системы (1) находим

$$D = x_1^* + r_L - A \cos \varphi_1. \quad (2)$$

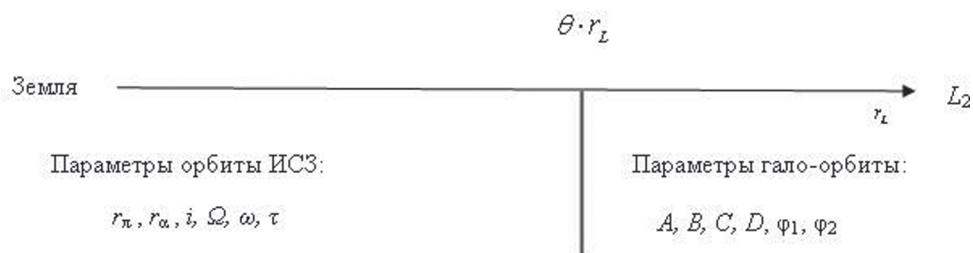


Рис. 4. Переход от параметров геоцентрической орбиты перелетной траектории к параметрам гало-орбиты

Тем самым, при $t = 0$ координаты x_1, x_2, x_3 и скорости $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}$ оказываются однозначными функциями четырех параметров: $A, B, \varphi_1, \varphi_2$. Переходя к невращающейся СК, определим зависимости элементов геоцентрической орбиты $v_\pi, \omega, \Omega, i, r_\pi, \tau$ от этих параметров, выделим траектории одноимпульсного перелета условием на расстояние перицентра:

$$r_\pi = R_E + h = r_\pi^*,$$

где R_E — экваториальный радиус Земли; h — заданная высота орбиты ИСЗ.

Таким образом, множество орбит перелета определяется зависимостями элементов геоцентрической орбиты $v_\pi, \omega, \Omega, i, r_\pi$ и τ от параметров A, B, φ_1 и φ_2 гало-орбиты при условии, что расстояние перицентра r_π равно заданной величине. При фиксированных A и B в плоскости φ_1, φ_2 строится изолиния:

$$r_\pi(\varphi_1, \varphi_2) = r_\pi^*.$$

Рассмотрим алгоритм вычисления r_π по заданным фазам φ_1 и φ_2 . Сначала вычисляется вектор состояния КА в инерциальной СК, полученной фиксацией осей вращающейся СК на фиксированный момент времени t в зависимости от параметров: A, B, φ_1 и φ_2 . Введем следующие обозначения:

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)^T$ — вектор состояния КА в момент времени $t = 0$ во вращающейся СК с центром в L_2 ;

$(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$ — вектор состояния КА в момент времени $t = 0$ в невращающейся геоцентрической эллиптической СК $Ox_1x_2x_3$, ось Ox_1 которой направлена на Солнце в момент времени t_0 .

Координаты и компоненты вектора скорости КА во вращающейся СК с центром в L_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 D &= r_L + x_1^* - A \cos \varphi_1, \\
 \xi_1 &= r_L + x_1^*, \quad \dot{\xi}_1 = -\omega_1 A \sin \varphi_1 - \lambda D, \\
 \xi_2 &= -k_2 A \sin \varphi_1 - k_1 D, \quad \dot{\xi}_2 = -k_2 \omega_1 A \cos \varphi_1 + k_1 \lambda D, \\
 \xi_3 &= B \cos \varphi_2, \quad \dot{\xi}_3 = -\omega_2 B \sin \varphi_2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

а в невращающейся геоцентрической эллиптической СК по формулам

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \xi_1 - r_L, \quad \dot{x}_1 = \dot{\xi}_1 - n_1 x_2, \\
 x_2 &= \xi_2, \quad \dot{x}_2 = \dot{\xi}_2 + n_1 x_1, \\
 x_3 &= \xi_3, \quad \dot{x}_3 = \dot{\xi}_3.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Далее по вектору $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ вычисляются элементы орбиты и в том числе расстояние перицентра r_π .

Рассмотрим функцию $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$, которая заданным значениям $\varphi_1, \varphi_2, \theta_A = \frac{A}{r_L}$ и $\theta_B = \frac{B}{r_L}$ сопоставляет расстояние перицентра r_π в соответствии с вышеописанным алгоритмом.

Алгоритм построения изолинии функции высоты перицентра от параметров гало-орбиты в фазовой плоскости φ_1, φ_2 состоит из двух этапов: поиска начальной точки изолинии и расчета изолинии по начальной точке.

Поиск начальной точки изолинии выполняется сканированием в интервалах $0^\circ \dots 360^\circ$ по параметру φ_1 и $-180^\circ \dots 180^\circ$ по параметру φ_2 . При фиксированном значении φ_2 вычисляются значения $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$, для значений φ_1 из указанного интервала. Если выполняется условие

$$\left(f(\varphi_1 - h_{\varphi_1}, \varphi_2, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^* \right) \left(f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^* \right) \leq 0, \tag{5}$$

то искомое значение φ_1^* лежит в интервале от $\varphi_1 - h_{\varphi_1}$ до φ_1 . Для нахождения φ_1^* с требуемой точностью используется метод бисекции [6].

Рассмотрим алгоритм расчета следующей точки изолинии при известной текущей точке. Основной принцип алгоритма состоит в том, что если известна точка (φ_1, φ_2) , принадлежащая изолинии, то ищется точка пересечения изолинии с прямой, параллельной оси φ_1 на плоскости φ_1, φ_2 и проходящей через точку начала поиска $(\varphi_{1+s}, \varphi_{2+s})$, либо точка пересечения изолинии с прямой, параллельной оси φ_2 и также проходящей через точку начала поиска (рис. 5).

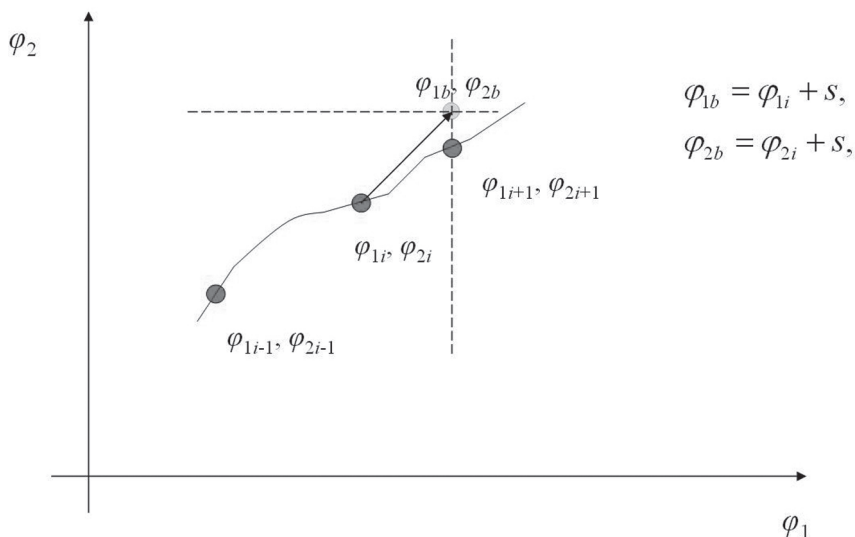


Рис. 5. Поиск точек изолинии

Входной информацией этого алгоритма является точка, принадлежащая изолинии $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$ и шаг поиска h_φ . Случай поиска второй точки изолинии от случая поиска третьей и последующих точек отличается выбором параметра s :

$$s = \begin{cases} h_\varphi, & \text{если } i = 1; \\ h_\varphi \frac{h_g}{\sqrt{(\varphi_{1,i} - \varphi_{1,i-1})^2 + (\varphi_{2,i} - \varphi_{2,i-1})^2}}, & \text{если } i > 1, \end{cases}$$

где $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}), (\varphi_{1,i-1}, \varphi_{2,i-1})$ — точки, принадлежащие изолинии, $h_g = 1^\circ$. С использованием параметра s и последней известной точки изолинии $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$ устанавливается точка начала поиска $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b}) = (\varphi_{1+i}, \varphi_{2+s})$ и ищется пересечение изолинии с отрезком на плоскости φ_1, φ_2 , соединяющим точки $(\varphi_{1b} - jh_\varphi, \varphi_{2b})$ и $(\varphi_{1b} + jh_\varphi, \varphi_{2b})$ при $j = 1, 2, \dots, N$. Этот отрезок проходит через точку начала поиска, параллелен оси φ_1 , а длина его увеличивается с увеличением индекса j . Для этого ищется такое значение $j = 1, 2, \dots, N$, при котором выполняется условие:

$$(f(\varphi_{1b} - jh_\varphi, \varphi_{2b}, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*)(f(\varphi_{1b} + jh_\varphi, \varphi_{2b}, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*) \leq 0. \quad (6)$$

Если значение j найдено, ищется такое значение φ_1^* , чтобы точка $(\varphi_1^*, \varphi_{2b})$ принадлежала изолинии. Для этого используется алгоритм, реализующий метод бисекции.

Если значение индекса j , при котором выполняется условие (6), не найдено, ищется точка пересечения изолинии с отрезком, который про-

ходит через точку начала поиска и параллелен оси φ_2 . Этот отрезок соединяет точки $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} - jh_\varphi)$ и $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} + jh_\varphi)$. При этом ищется значение индекса $j = 1, 2, \dots, N$, для которого выполняется следующее условие:

$$(f(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} - jh_\varphi, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*)(f(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} + jh_\varphi, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*) \leq 0. \quad (7)$$

Если найдено значение j , при котором выполняется условие (7), то методом бисекции ищется значение φ_2^* , при котором точка $(\varphi_{2b}, \varphi_2^*)$ принадлежит изолинии. Если значение j , при котором выполняется условие (7), не найдено, работа алгоритма завершается с отрицательным кодом ответа: точка изолинии не найдена. В результате вычислительных экспериментов установлено, что значение N целесообразно принять равным 4. Процесс построения изолинии завершается, если выполнено условие замыкания изолинии

$$\sqrt{(\varphi_{1,i} - \varphi_{1,1})^2 + (\varphi_{2,i} - \varphi_{2,1})^2} < \varepsilon_\varphi^{\text{stop}} \quad (8)$$

или получен отрицательный код ответа от алгоритма поиска следующей точки.

На рис. 6 показан пример расчета изолиний функции высоты перицентра для гало-орбит, у которых $\theta_B = 0,1$, а θ_A принимает следующие значения: 0,180, 0,185, 0,190, 0,195, 0,200. Каждой паре значений θ_A и θ_B соответствуют две замкнутых изолинии в верхней и нижней части изображения. Меньшему значению θ_A соответствует изолиния меньшего размера.

Далее, при расчете начального приближения для траектории перелета по построенным изолиниям для фиксированной высоты перицентра согласно функции $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$, и заданной дате старта КА с орбиты выведения определяются элементы отлетной геоцентрической орбиты. Каждой точке изолинии соответствует какая-либо отлетная орбита. Для экономии характеристической скорости, расходуемой на переход с орбиты выведения на орбиту перелета, из рассчитанного множества выбираются те траектории перелета, наклонение которых соответствует наклонению орбиты выведения.

В табл. 1 приведены примеры найденных начальных приближений траектории перелета на гало-орбиту с заданными параметрами θ_A и θ_B . Таблица содержит дату и время старта с геоцентрической низкой околокруговой орбиты, параметр гало-орбиты θ_A , координаты и скорости КА после приложения импульса перехода на траекторию перелета, величину импульса, время перелета от момента старта с опорной орбиты

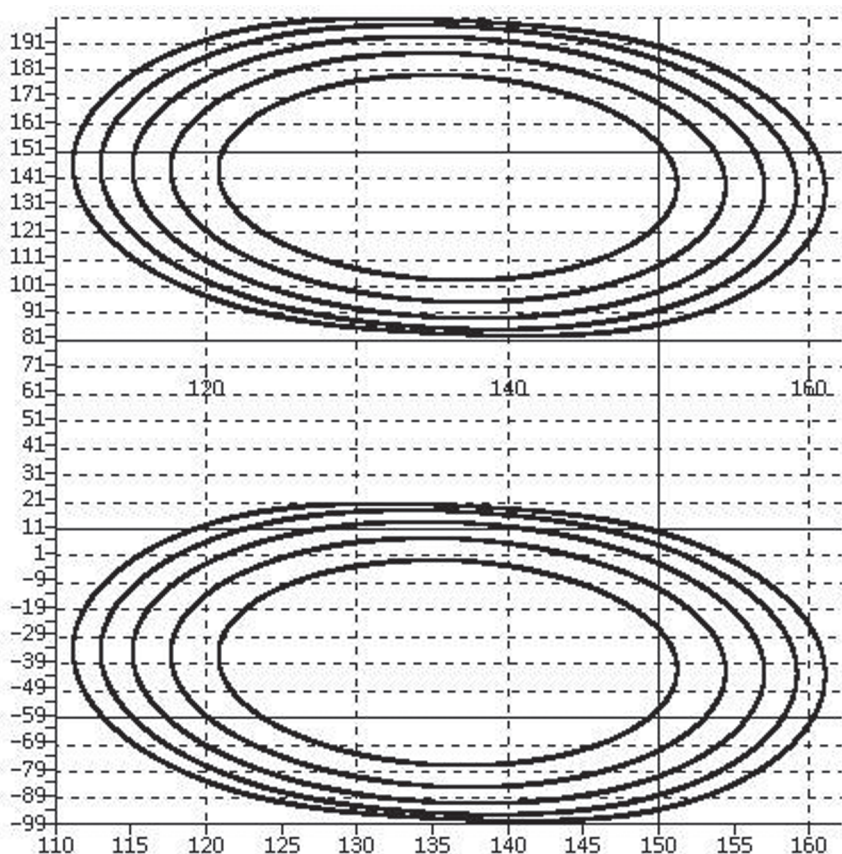


Рис. 6. Пример расчета изолиний: $\theta_A = 0,18 \dots 0,20$; $\theta_B = 0,1$

до перехода на гало-орбиту, параметр перехода из геоцентрической СК в СК с центром в точке L_2 . Параметр θ_B принят равным 0,1 для всех рассматриваемых вариантов.

Таблица 1

Начальные приближения траектории перелета для различных значений параметра θ_A в рамках окна старта 30.12.2014

t , ДМВ	θ_A	φ_1 , град	φ_2 , град	ΔV , м/с	i , град	ω , град
16:22:04	0,200	157,5857	-11,66129	3128,164	51,468	307,09
16:28:59	0,195	155,4032	-11,35459	3129,120	51,472	308,823
16:36:44	0,190	152,7965	-11,06733	3127,542	51,467	310,773
16:59:44	0,185	122,433	111,8391	3122,277	51,473	316,459
16:48:26	0,180	127,8207	109,6844	3121,603	51,464	313,632

Начальное приближение для траектории одноимпульсного перелета с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки L_2 с использованием гравитационного маневра у Луны. Известно, что на гало-орбиты со значением параметра θ_A , меньшим 0,17, невозможно перелететь по схеме одноимпульсного перелета, без дополнительных маневров КА [7]. В [8, 9] для достижения гало-орбит с меньшими значениями параметра θ_A предложено использовать гравитационный маневр у Луны и рассмотрена схема запуска, которая предполагает сближение с Луной не сразу после старта с Земли, а после предварительного полета по сильно вытянутой орбите с низким перигеем и расстоянием в апогее, большим радиуса лунной орбиты.

Предложенный ниже алгоритм построения начального приближения применим как в случае, когда КА после перехода на перелетную траекторию сразу направляется к Луне, так и в случае, когда КА перед перелетом к Луне совершает виток вокруг Земли по сильно вытянутой орбите. Для ускорения поиска интервалов времени, в которых возможен перелет с гравитационным маневром, используется условие на угол между направлениями от Земли на Солнце и Луну.

Очевидно, что для того, чтобы использовать гравитационный маневр у Луны для перелета на гало-орбиту, Луна и Солнце должны быть расположены определенным образом. Это расположение можно описать углом между направлениями от Земли на Луну и Солнце. Условие перелета Земля — гало-орбита с гравитационным маневром у Луны выполняется раз в месяц. Под моментом перехода на гало-орбиту понимается момент времени, в который КА пересечет плоскость, ортогональную направлению Земля — Солнце, и удаленную от центра Земли на расстояние $(1 - \theta)r_L$, где, $\theta = \frac{17}{24}$, r_L — расстояние от Земли до точки L_2 .

На рис. 7 показана зависимость угла между направлениями от Земли на Луну и Солнце от времени. Красным цветом отмечены интервалы времени, в которые возможен переход на гало-орбиту с использованием гравитационного маневра у Луны. Из этого графика видно, что моменты перехода на перелетную к L_2 траекторию (на гало-орбиту) с использованием гравитационного маневра у Луны следует искать на интервалах времени, когда значение угла между направлениями от Земли на Луну и Солнце не превосходит 45° .

Рассмотрим обобщение метода построения изолиний на случай использования гравитационного маневра у Луны. Начальные этапы построения изолинии функции высоты перицентра выполняются аналогично расчету в случае отсутствия гравитационного маневра у Луны.

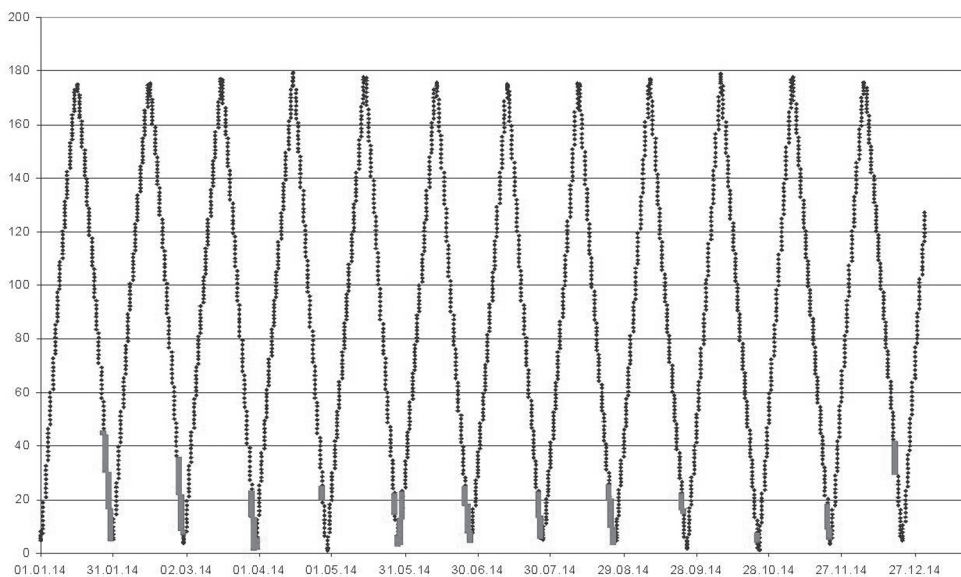


Рис. 7. Угол между направлениями от Земли на Солнце и Луну

Далее для вычисления элементов орбиты, и в том числе расстояния перигея r_{π} по вектору $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ траектория перелета разбивается на три участка:

- от Земли до входа в сферу действия Луны;
- полет в сфере действия Луны;
- полет после выхода из сферы действия Луны до входа в окрестность L_2 .

Для определения момента выхода из сферы действия Луны следует использовать численное интегрирование. При этом расчет вектора состояния КА целесообразно выполнять до достижения расстояния 50 тыс. км от центра Земли. Далее вычисляются оскулирующие элементы орбиты, по ним рассчитывается расстояние перигея.

Основными параметрами, характеризующими гравитационный маневр у Луны, являются Δ_{GAM} — модуль импульса, сообщаемого КА в результате гравитационного маневра, и P_{GAM} — модуль проекции импульса гравитационного маневра на направление скорости КА. Если $P_{\text{GAM}} > 0$, импульс гравитационного маневра направлен на разгон КА, иначе — на торможение.

Параметры Δ_{GAM} и P_{GAM} вычисляются по следующим формулам:

$$\Delta_{\text{GAM}} = |\mathbf{v}_{\text{out}} - \mathbf{v}_{\text{in}}|, \quad P_{\text{GAM}} = \frac{(\mathbf{v}_{\text{out}} - \mathbf{v}_{\text{in}}, \mathbf{v}_{\text{out}})}{|\mathbf{v}_{\text{out}}|},$$

где \mathbf{v}_{in} и \mathbf{v}_{out} — векторы скорости КА в моменты времени входа и выхода из сферы действия Луны соответственно. Если вход в сферу действия Луны не был найден или значение Δ_{GAM} меньше порогового значения, то алгоритм расчета расстояния перицентра возвращает отрицательный код ответа, а значение функции $f(\theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2)$ не определено. Экспериментально было установлено, что пороговое значение целесообразно выбрать равным 100 м/с. Результаты расчетов изолиний могут быть использованы для определения окон стартов на гало-орбиту с использованием гравитационного маневра у Луны. Длительность окна стартов определяется расстоянием, на которое КА удаляется от точки L_2 в плоскости эклиптики. Примеры расчета окон старта на 2014 г. представлены в табл. 2, которая содержит месяц, в котором должен быть совершен перелет, значение параметра θ_A , дату старта и длительность окна стартов. Для некоторых месяцев приведены несколько вариантов перелета, соответствующих различным значениям θ_A .

Изолинии для траекторий перелета на 28 и 29 января 2014 г. показаны на рис. 8 и 9 соответственно.

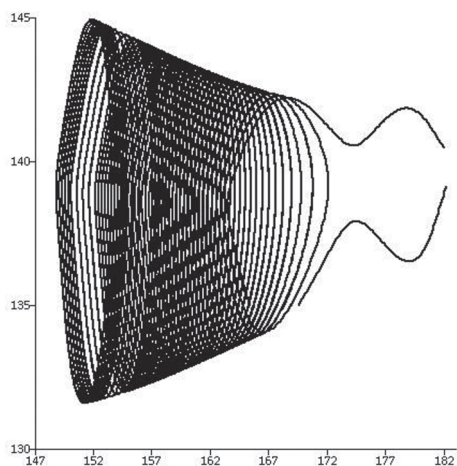


Рис. 8. Изолинии для траекторий перелета на 28 января 2014 г.: $\theta_A = 0,14$, $\theta_B = 0,1$

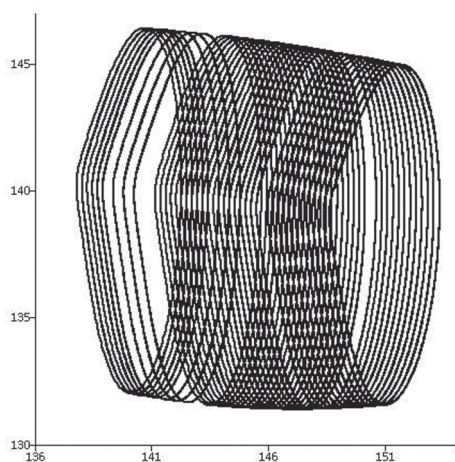


Рис. 9. Изолинии для траекторий перелета на 29 января 2014 г.: $\theta_A = 0,14$, $\theta_B = 0,1$

Даты перелета в окрестность точки L_2 для 2014 г. с использованием гравитационного маневра у Луны

Месяц	θ_A	Дата старта	Продолжительность окна стартов, ч
Январь	0,14	2014/01/28	36
	0,15	2014/01/28	72
Февраль	0,14	2014/02/27	40
	0,15	2014/02/26	48
Март	0,12	2014/03/29	46
Апрель	0,12	2014/04/27	24
Май	0,12	2014/05/29	20
	0,13	2014/05/29	28
	0,14	2014/05/29	36
	0,15	2014/05/29	52
Июнь	0,12	2014/06/25	22
	0,13	2014/06/25	33,5
	0,14	2014/06/25	40,5
	0,15	2014/06/25	60
Июль	0,15	2014/07/25	41
Август	0,14	2014/08/24	14,5
	0,15	2014/08/23	57,5
Сентябрь	0,12	2014/09/22	12,5
Октябрь	0,12	2014/10/23	6
Ноябрь	0,12	2014/11/21	23,5
Декабрь	0,12	2014/12/18	22

Точный Расчет параметров траекторий перелета с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки L_2 . Исходными данными для алгоритма расчета параметров траекторий перелета на гало-орбиту являются θ , θ_A , θ_B , φ_1 , φ_2 , момент времени входа в окрестность точки L_2 и высота перицентра h_{trg} . Следует отметить, что при расчете начальных приближений целесообразно сохранять наклонение и аргумент перицентра перелетной орбиты, что позволит выбирать такие начальные приближения, для которых наклонение в максимальной степени близко к заданному значению, а перицентр располагается в южном полушарии. Под моментом времени входа в окрестность точки L_2 понимается момент времени, когда траектория пересекает плоскость $x_1 = x_1^*$.

При расчете траектории перелета с низкой околокруговой орбиты на гало-орбиту используется модель движения КА, в которой учитываются гравитационное воздействие Земли, Солнца, Луны и планет Солнечной системы, неравномерность вращения Земли, силы давления солнечной радиации, влияние атмосферы Земли [6]. Для определения положения Солнца и планет Солнечной системы используется астрономический ежегодник DE421, разработанный в JPL NASA. Метод интегрирования, применяемый для численного прогноза, — метод Дормана—Принса.

В прямоугольной инерциальной СК J2000 уравнения движения КА записываются в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = -\mu_E \frac{r}{r^3} + C_{\text{ПЗ90-2}}^{\text{J2000}} \left[f_{\text{Земля}}^{\text{грав}} + f_{\text{атм}} \right] + C_{\text{Селенограф}}^{\text{J2000}} \left[f_{\text{Луна}}^{\text{грав}} \right] + \\ + f_{\text{Солнце}} + f_{\text{Луна}} + f_{\text{рад}} + f_{\text{планет}}, \end{cases}$$

где r — вектор положения КА в СК J2000; v — вектор скорости КА в СК J2000; μ_E — гравитационная постоянная Земли; $C_{\text{ПЗ90-2}}^{\text{J2000}}$ — матрица перехода из гринвичской вращающейся СК ПЗ90-2 Земли в СК J2000; $C_{\text{Селенограф}}^{\text{J2000}}$ — матрица перехода из селенографической СК Луны в СК J2000; $f_{\text{Земля}}^{\text{грав}}$ — вектор возмущающих ускорений, вызванных нецентральностью гравитационного поля Земли в гринвичской СК; $f_{\text{Луна}}^{\text{грав}}$ — вектор возмущающих ускорений, вызванных нецентральностью гравитационного поля Луны в селенографической СК; $f_{\text{атм}}$ — вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием атмосферы Земли; $f_{\text{Солнце}}$ — вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием гравитационного поля Солнца в СК J2000; $f_{\text{Луна}}$ — вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием гравитационного поля Луны в СК J2000; $f_{\text{рад}}$ — вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием солнечной радиации; $f_{\text{планет}}$ — вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием гравитационного поля планет Солнечной системы.

Алгоритм расчета параметров траекторий перелета на гало-орбиту состоит из следующих этапов.

1. Расчет по начальному приближению вектора состояния на момент входа в окрестность L_2 . Для этого по входным параметрам θ , θ_A , θ_B определяются значения параметров по формулам $x_1^* = \theta r_L$, $A = \theta_A r_L$, $B = \theta_B r_L$, где r_L — расстояние от точки L_2 до Земли. Расчет по формулам (3) и (4) вектора состояния КА $x = (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$ во вращающейся

системе координат, фиксированной на момент времени входа в окрестность точки L_2 . Расчет матрицы $\mathbf{C}_{\text{rot}}^{\text{J2000}}$ перехода из вращающейся системы координат в систему координат J2000 выполняется по формуле

$$\mathbf{C}_{\text{rot}}^{\text{J2000}} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_E & \sin \vartheta_E & 0 \\ -\sin \vartheta_E & -\cos \vartheta_E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_x = \cos \omega_E \cos \Omega_E - \sin \omega_E \sin \Omega_E \cos i_E,$$

$$P_y = \cos \omega_E \sin \Omega_E + \sin \omega_E \cos \Omega_E \cos i_E,$$

$$P_z = \sin \omega_E \sin i_E,$$

$$Q_x = -\sin \omega_E \cos \Omega_E - \cos \omega_E \sin \Omega_E \cos i_E,$$

$$Q_y = -\sin \omega_E \sin \Omega_E + \cos \omega_E \cos \Omega_E \cos i_E,$$

$$Q_z = \cos \omega_E \sin i_E,$$

$$R_x = \sin i_E \sin \Omega_E,$$

$$R_y = -\sin i_E \cos \Omega_E,$$

$$R_z = \cos i_E,$$

где ϑ_E , i_E , Ω_E , ω_E — оскулирующие истинная аномалия, наклонение, долгота восходящего узла, аргумент перицентра орбиты Земли на момент достижения КА точки входа в окрестность L_2 . Расчет вектора состояния КА $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}, \dot{x}_{j1}, \dot{x}_{j2}, \dot{x}_{j3})^T$ в системе координат J2000 на момент времени входа в окрестность точки L_2 с использованием матрицы $\mathbf{C}_{\text{rot}}^{\text{J2000}}$.

2. Определение момента достижения перицентра t_π отлетной траектории и вектора состояния КА $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi1}, x_{\pi2}, x_{\pi3}, \dot{x}_{\pi1}, \dot{x}_{\pi2}, \dot{x}_{\pi3})^T$ на этот момент. Для этого численно интегрируют уравнения движения назад до момента времени, когда оскулирующая истинная аномалия станет равной нулю.

3. Коррекция вектора состояния так, чтобы высота перицентра была заданной.

Вычисление полуоси орбиты a , текущего расстояния перицентра r_π и скорости v_π в перицентре по вектору состояния \mathbf{x}_π .

Вычисление значения полуоси, соответствующей заданной высоте перицентра: $a_1 = a + \frac{1}{2}(h_{\text{irg}} - (r_\pi - R_E))$, где h_{irg} — заданная высота перицентра.

Вычисление скорости в перицентре после коррекции высоты пери-

центра:
$$v_1 = \sqrt{\mu_E \left(\frac{2}{h_{trg} + R_E} - \frac{1}{a_1} \right)}$$
;

Пропорциональная коррекция компонент вектора x_π так, чтобы расстояние было равно $h_{trg} + R_E$, а скорость v_1 .

4. Уточнение вектора скорости $v = (v_x, v_y, v_z)$ так, чтобы параметр C гало-орбиты был обнулен. Начальные значения компонент вектора скорости полагаются равными значениям, полученным на предыдущем этапе. Выполняется итерационный процесс минимизации функции C^2

градиентным методом. Вычисляются производные: $\frac{\partial C^2}{\partial v_x}, \frac{\partial C^2}{\partial v_y}, \frac{\partial C^2}{\partial v_z}$.

При этом на каждом шаге i итерационного процесса проверяется выполнение условия $C_i^2 < C_{i-1}^2$, где C_i^2, C_{i-1}^2 — значения, полученные на текущем и предыдущем шагах. Если это условие не выполняется, компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза. Итерационный процесс завершается, если значение C^2 попало в заданную окрестность нуля или модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины.

5. Уточнение вектора скорости $v = (v_x, v_y, v_z)$ так, чтобы значение параметра B было равно заданной величине $\theta_B r_L$, а параметр C обнулен. Для этого градиентным методом минимизируется функция $(B - \theta_B r_L)^2 + C^2$. На каждом шаге итерационного процесса контролируется выполнение условия $(B_i - \theta_B r_L)^2 + C_i^2 < (B_{i-1} - \theta_B r_L)^2 + C_{i-1}^2$. Если это условие не выполняется, компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза. Если модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины, происходит изменение метода поиска минимума на покоординатный спуск. Если текущему значению вектора скорости соответствует локальный минимум, происходит переход к следующему этапу.

6. Уточнение вектора скорости из условия максимального пребывания в окрестности точки L_2 . Вектор скорости уточняется из условия максимума функции $F_{\Delta t}(v_x, v_y, v_z) = t_{out} L_2 - t_{in} L_2$ — длительности пребывания КА в сфере с центром в точке L_2 и радиусом $r_L \sqrt{(k_2 \theta_A)^2 + \theta_B^2}$. Здесь $t_{in} L_2$ — момент входа КА в окрестность точки L_2 , а $t_{out} L_2$ — момент выхода из этой окрестности.

Максимум ищется градиентным методом с регулируемым шагом. Поправки к вектору скорости вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x^{(i)} \\ \Delta V_y^{(i)} \\ \Delta V_z^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^k} \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_z}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_x} \\ \frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_y} \\ \frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_z} \end{pmatrix},$$

где ΔV_{\max} — максимально допустимое значение поправки. На каждом шаге итерационного процесса контролируется выполнение условия $(F_{\Delta t})_i > (F_{\Delta t})_{i+1}$. Компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза (k увеличивается на 1), если условие не выполняется. Переключение метода поиска максимума на покоординатный спуск происходит в случае, если модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины. Итерационный процесс завершается при достижении локального максимума. Этим завершается работа алгоритма.

Следует отметить, что альтернативным вариантом уточнения вектора скорости является его определение из условия минимизации функционала:

$$F_C(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \left((B(t) - \theta_B r_L)^2 + C(t)^2 \right) dt,$$

где T — интервал осреднения, а значения функций $B(t)$ и $C(t)$ находятся из решения системы (1) относительно этих параметров.

На каждом шаге итерационного процесса контролируется выполнение условия $(\Delta t_{L_2})_i > (\Delta t_{L_2})_{i+1}$. Компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза, если условие не выполняется. Переключение метода поиска максимума на покоординатный спуск происходит в случае, если модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины. Итерационный процесс завершается при достижении локального минимума.

В случае использования гравитационного маневра у Луны в вышеописанном алгоритме интегрирование происходит так же до момента достижения перицентра геоцентрической отлетной орбиты. Следует отметить, что оптимизация гравитационного маневра выполнена на стадии расчета начального приближения.

Примеры рассчитанных траекторий перелета КА с низкой околоземной орбиты на гало-орбиты вокруг точки L_2 . Ниже приведены примеры рассчитанных траекторий перелета, а также примеры гало-орбит, полученных с помощью вышеописанных методов, использование которых в качестве рабочих возможно в проектах «Спектр-РГ» и «Миллиметрон». В работе [6, 10, 11] эти решения описаны более детально, в частности, приведены векторы кинематических параметров КА при переходе последнего на траекторию перелета, представлена импульсная стратегия удержания аппарата на гало-орбите.

Пример траектории перелета КА «Спектр-РГ» с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту вокруг точки L_2 без использования гравитационного маневра у Луны.

Параметры орбиты выведения (дата и время конца активного участка — 2014/12/30 17:13:15.675):

Полуось, тыс. км	6,593857
Эксцентриситет.....	0,002908
Наклонение, град	51,611
Период, мин.....	88,811470
Высота перицентра, тыс. км	0,196545
Высота апоцентра, тыс. км	0,234897
Долгота восходящего узла, град	319,516
Аргумент перицентра, град	65,821

Параметры орбиты перелета (дата и время перехода на траекторию перелета — 2014/12/30 18:17:30.000):

Импульс перехода на траекторию перелета, км/с	3,195
Полуось, тыс. км	715,496123
Эксцентриситет.....	0,990788
Наклонение, град	51,392
Период, сут.....	69,712100
Высота перицентра, тыс. км	0,212908
Высота апоцентра, тыс. км	1418,023065
Долгота восходящего узла, град	319,604
Аргумент перицентра, град	343,572

Начальные условия орбиты перелета (дата и время — 2014/12/30 18:17:30.000):

X	3,992607214
Y	-5,013255978
Z	-1,540951641
VX	6,676870

VY 2,918931
 VZ 8,202774

Примечание. Начальные условия содержат время привязки ДМВ, кинематический вектор состояния в инерциальной СК J2000 с началом в центре масс Земли, компоненты вектора положения в тыс. км, компоненты вектора скорости в км/с.

Импульсы коррекций для удержания КА на гало-орбите приведены в табл. 3.

Таблица 3

Импульсы коррекций для удержания КА на гало-орбите

Дата и время	Модуль импульса, м/с	Длительность пребывания в окрестности L_2 , сут
2015/03/10 18:17:30.000	1,382	320,815
2015/05/19 18:17:30.000	0,000	250,815
2015/07/28 18:17:30.000	0,986	309,196
2015/10/06 18:17:30.000	0,106	286,005
2015/12/15 18:17:30.000	0,250	244,981
2016/02/23 18:17:30.000	0,940	343,854
2016/05/03 18:17:30.000	0,000	273,854
2016/07/12 18:17:30.000	0,443	321,295
2016/09/20 18:17:30.000	0,125	301,526
2016/11/29 18:17:30.000	0,125	260,769
2017/02/07 18:17:30.000	0,585	265,156
2017/04/18 18:17:30.000	0,928	273,353
2017/06/27 18:17:30.000	0,484	264,983
2017/09/05 18:17:30.000	0,315	317,444
2017/11/14 18:17:30.000	0,062	282,751
2018/01/23 18:17:30.000	0,269	329,353
2018/04/03 18:17:30.000	0,062	350,850
2018/06/12 18:17:30.000	0,000	280,850
2018/08/21 18:17:30.000	0,515	348,898
2018/10/30 18:17:30.000	0,016	353,104
2019/01/08 18:17:30.000	0,016	313,182
2019/03/19 18:17:30.000	0,179	384,971
2019/05/28 18:17:30.000	0,000	314,971
2019/08/06 18:17:30.000	0,096	333,644
2019/10/15 18:17:30.000	0,062	276,463
2019/12/24 18:17:30.000	0,500	223,935

Дата и время	Модуль импульса, м/с	Длительность пребывания в окрестности L_2 , сут
2020/03/03 18:17:30.000	1,753	266,554
2020/05/12 18:17:30.000	1,225	238,642
2020/07/21 18:17:30.000	1,363	331,460
2020/09/29 18:17:30.000	0,031	347,136
2020/12/08 18:17:30.000	0,016	330,799
2021/02/16 18:17:30.000	0,094	329,177
2021/04/27 18:17:30.000	0,000	259,177
2021/07/06 18:17:30.000	0,500	270,840
2021/09/14 18:17:30.000	0,498	321,713
2021/11/23 18:17:30.000	0,000	251,713
2022/02/01 18:17:30.000	0,635	256,474
2022/04/12 18:17:30.000	0,500	297,291
2022/06/21 18:17:30.000	0,000	227,291

Примечание. Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 4,0 м/с за 7 лет. Расчет импульсов коррекций здесь и далее проводился в предположении идеальной навигации и идеального исполнения маневров.

Проекции траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскости XY и XZ вращающейся СК с началом координат в точке L_2 (размерность — тыс. км) показаны на рис. 10.

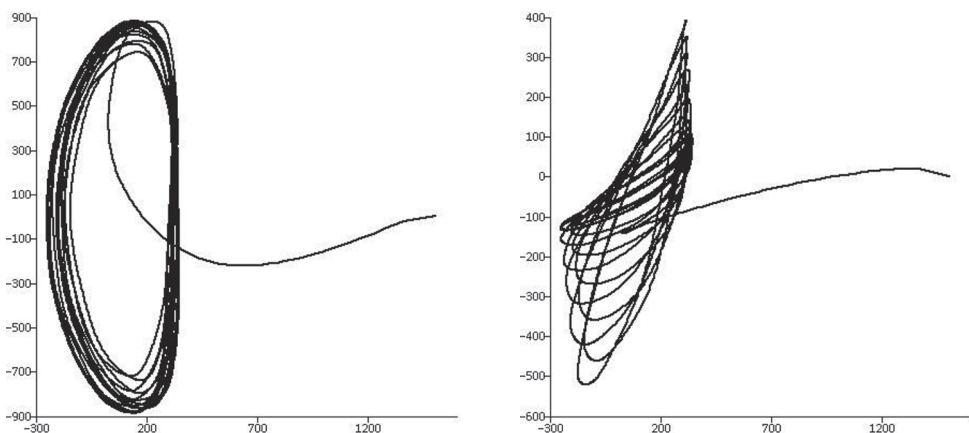


Рис. 10. Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскости XY (слева) и XZ (справа)

Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскость YZ вращающейся СК с началом координат в точке L_2 (размерность — тыс. км) и эволюция параметров орбиты показаны на рис. 11.

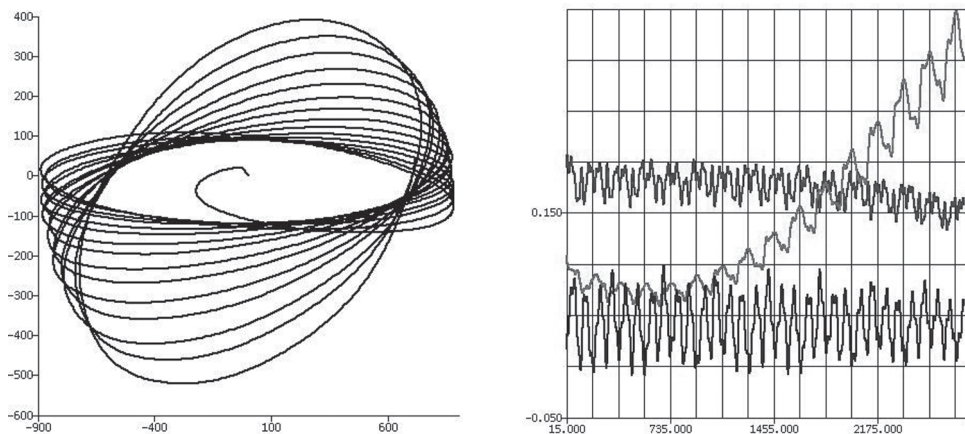


Рис. 11. Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскость YZ (слева), эволюция параметров орбиты θ_A , θ_B и θ_C представленной гало-орбиты (справа)

Пример траектории перелета КА «Миллиметр» с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки L_2 . Данная орбита получила одобрение специалистов АКЦ ФИАН. Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 14,0 м/с за 7 лет. Благодаря выбору достаточно большого значения θ_B при проектировании выход орбиты из плоскости эклиптики составляет более 900 тыс. км, что обеспечивает необходимые условия для выполнения научной программы.

Параметры орбиты выведения приведены ниже (дата и время конца активного участка — 2018/09/15 16:08:31.749):

Полуось, тыс. км	6,587983
Эксцентриситет.....	0,002851
Наклонение, град	51,609
Период, мин.....	88,692813
Высота перигея, тыс. км	0,191067
Высота апогея, тыс. км	0,228626
Долгота восходящего узла, град	198,683
Аргумент перигея, град	84,178

Параметры орбиты перелета (дата и время перехода на траекторию перелета — 2018/09/15 17:05:00.000):

Импульс перехода на траекторию перелета, км/с	3,202
Полуось, тыс. км	712,251380
Эксцентриситет	0,990733
Наклонение, град	51,472
Период, сут	69,238427
Высота перицентра, тыс. км	0,222093
Высота апоцентра, тыс. км	1411,524394
Долгота восходящего узла, град	198,883
Аргумент перицентра, град	312,243

Начальные условия орбиты перелета (время в ДМВ — 2018/09/15 17:05:00.000):

X	-5,119120543
Y	1,515577645
Z	-3,881626760
VX	-6,267933
VY	-6,950327
VZ	5,711508

Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскости XU и XZ вращающейся СК с началом координат в точке L_2 (размерность — тыс. км) показаны на рис. 12.

Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскость YZ вращающейся СК с началом координат в точке L_2 (размерность — тыс. км) и эволюция параметров орбиты показаны на рис. 13.

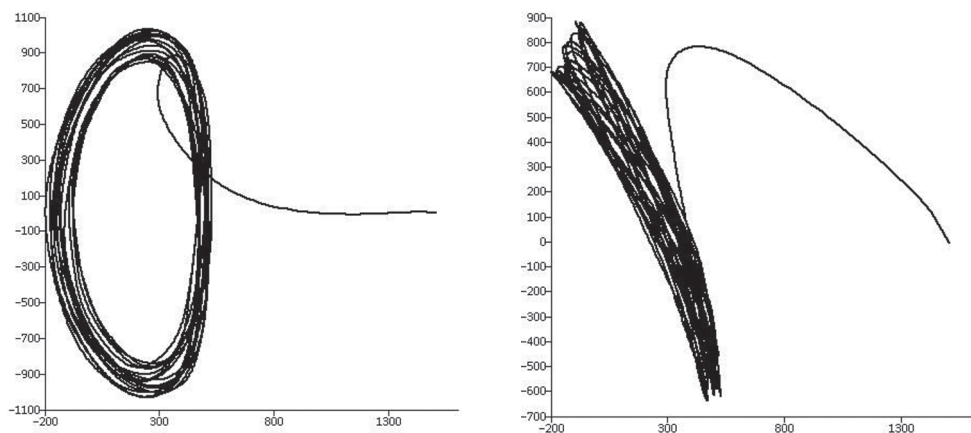


Рис. 12. Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскости XU (слева) и XZ (справа)

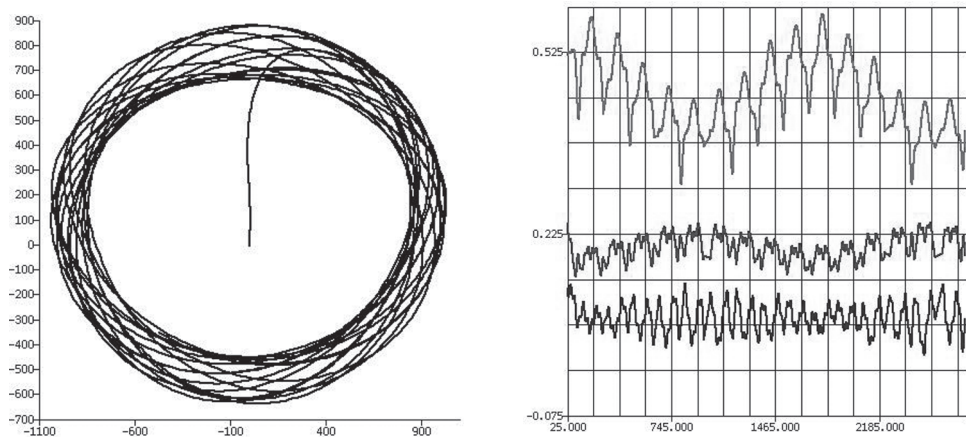


Рис. 13. Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскость YZ (слева) и эволюция параметров орбиты θ_A , θ_B и θ_C представленной гало-орбиты (справа)

Пример траектории перелета с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки L_2 с использованием гравитационного маневра у Луны. Данный вариант перелета не предусматривает предварительный виток на орбите Земли. Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 30,84 м/с за 7 лет. Исходные данные представлены ниже:

θ	0,70833
θ_A	0,12000
θ_B	0,10000
ДМВ достижения L_2	2014/12/19 04:30:00.000
Наклонение	51,410

Параметры орбиты перелета (дата и время прохождения перицентра — 2014/12/02 10:33:29.186)

Полуось, м.....	257873836,1
Эксцентриситет.....	0,973362
Наклонение.....	51,424463
Период, сут.....	15,083710
Высота перицентра, м	491000,0
Высота апоцентра, м	502500399,6
Долгота восходящего узла, град	246,047
Аргумент перицентра, град	347,895
Импульс перехода на орбиту перелета с круговой орбиты, м/с.....	3083,329

Начальные условия орбиты перелета в СК J2000 (время в ДМВ — 2014/12/02 10:33:29.186):

X , м.....-3547748,886
 Y , м.....-5773189,703
 Z , м.....-1126406,678
 VX , м/с 5051,111573
 VY , м/с -4699,712277
 VZ , м/с 8179,775795

Элементы орбиты КА в селеноцентрической СК (время прохождения периселения — 2014/12/05 05:29:17.971)

Полуось, м..... 3551686,5
 Эксцентриситет 4,078134
 Наклонение 32,866578
 Расстояние перицентра, м..... 10932566,5

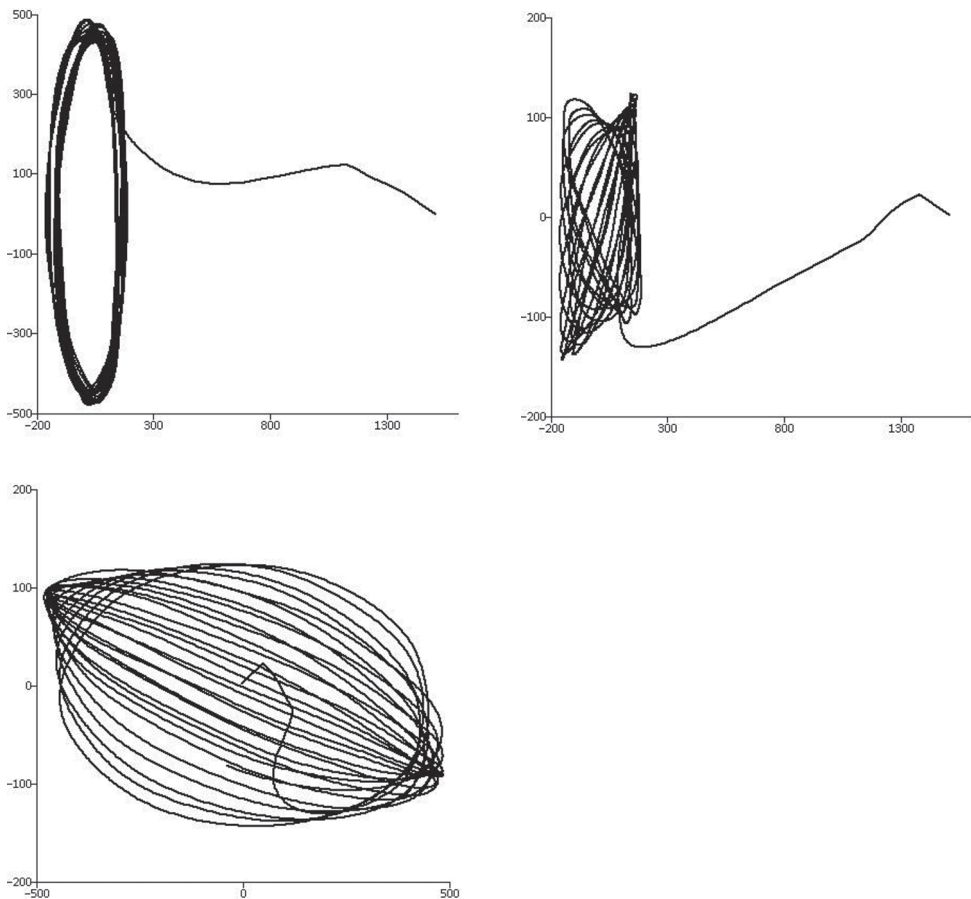


Рис. 14. Проекция траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскости XY (слева вверху), XZ (справа внизу) и YZ (слева внизу)

Параметры гало-орбиты приведены ниже (дата и время входа в окрестность L_2 — 2014/12/14 04:33:19.618)

Параметр А, м	180183389,6
theta А.....	0,120000
Параметр В, м	149996383,9
theta В.....	0,099896
Параметр С, м	-6,0
theta С.....	0,000000
Время пребывания в окрестности радиуса 620759841,0 м.....	162,72 сут

Проекции траектории перелета и полета по гало-орбите на плоскости XY , XZ и YZ вращающейся СК с началом координат в точке L_2 (размерность — тыс. км) показаны на рис. 14.

Заключение. Результатом данной работы является универсальный алгоритм, позволяющий находить гало-орбиты в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце—Земля с заданными геометрическими характеристиками и выполнять расчет траекторий перелета на гало-орбиту с низкой околоземной орбиты. Предложенный алгоритм позволяет проектировать гало-орбиты и перелеты на них для КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон». В проекте «Спектр-РГ» необходимо, чтобы проекция гало-орбиты на плоскость, ортогональную эклиптике, находилась в кольце, нижняя граница которого определена возможностью попадания в тень Земли, а верхняя — потерей радиовидимости с территории России. Из требований научного эксперимента проекта «Миллиметрон» следует, что гало-орбита должна удаляться от плоскости эклиптики более чем на 800 тыс. км. Предложенный алгоритм позволяет находить гало-орбиты и одноимпульсные перелеты на них и в случае, если требуется, чтобы КА находился в близкой окрестности точки L_2 . Если требуется, чтобы гало-орбита в проекции на плоскость эклиптики не удалялась от точки L_2 более чем на 600 тыс. км, необходимо использовать гравитационный маневр у Луны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Маркеев А.П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*. Москва: Наука, 1978.
- [2] Маршал К. *Задача трех тел*. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [3] Farquhar R. W. *The Control and Use of Libration-Point Satellites*. Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, CA, 1968.
- [4] E.Canalias, G.Gomez, M.Marcote, J.J.Masdemont. *Assessment of Mission Design Including Utilization of Libration Points and Weak Stability Boundaries*. Barcellona, Universitat de Barcellona, 2005. URL: <http://www.esa.int/gsp/ACT/doc/ARI/>

ARI%20Study%20Report/ACT-RPT-MAD-ARI-03-4103a-InterplanetaryHighways-Barcelona.pdf

- [5] Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Траектории полета Земля—Луна — гало-орбита в окрестности точки L_2 системы Земля—Солнце. *Космич. исслед.*, 1992, т. 30, № 4, с. 435–454.
- [6] Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. *Баллистическое проектирование траекторий перелета с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце—Земля*. Препринт. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013, № 6. URL: http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_6.pdf
- [7] Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля—Солнце и смежные задачи. *Космич. исслед.*, 1987, т. 25, № 2, с. 163–185.
- [8] Eismont N., Dunham D., Jen S.-C., Farquhar R. Lunar Swingby as a Tool for Halo-Orbit Optimization in Relict-2 Project. *Proceeding of the ESA Symposium on Spacecraft Flight Dynamic*. Germany, 30 September — 4 October, 1991, pp. 435–439.
- [9] Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Характеристики управления при выведении КА в окрестность точки L_2 системы Солнце—Земля с использованием гравитации Луны (Проект «Реликт-2»). *Космич. исслед.*, 1993, т. 31, № 5, с. 3–20.
- [10] Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. *Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце—Земля*. Препринт. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, № 65. URL: http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_65.pdf
- [11] Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. *Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразии ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце—Земля*. Препринт. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, № 66. URL: http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_66.pdf

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Боровин Г.К., Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Математическое моделирование движения космического аппарата в окрестности точки L_2 системы Солнце—Земля. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/1113.html>

Боровин Геннадий Константинович — д-р физ.-мат. наук, заместитель директора по научной работе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: borovin@keldysh.ru

Ильин Иван Сергеевич — аспирант, младший научный сотрудник сектора № 2 отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: is.ilin@physics.msu.ru

Заславский Григорий Симонович — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник сектора № 2 отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: zaslavgs@mail.ru

Лавренов Сергей Михайлович — профессор кафедры «Кибернетика» НИУ ВШЭ.
e-mail: sml@kiam1.rssi.ru

Сазонов Виктор Васильевич — д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник сектора № 2 отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: sazonov@keldysh.ru

Степаньянц Виктор Аркадьевич — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник сектора № 2 отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
e-mail: vic-stepan@rambler.ru

Тучин Андрей Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, заведующий сектором № 2 отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: tag@kiam1.rssi.ru

Тучин Денис Андреевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник сектора № 2 отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: den@kiam1.rssi.ru

Ярошевский Виктор Семенович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник сектора № 2 отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: yarosh@keldysh.ru