Действия коммутативной унипотентной группы на многообразиях флагов и нильпотентные умножения

Ростислав Девятов*

3 декабря 2011 г.

1 Введение

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$, $P \subseteq G$ — параболическая подгруппа. Обозначим аддитивную группу поля через $\mathbf{G}_a$. Пусть $m = \dim G/P$. Наша цель — классифицировать $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на *обобщенном многообразии флагов* G/P с открытой орбитой с точностью до сопряжения автоморфизмами G/P. Многообразие G/P не меняется при факторизации G (и одновременно P) по конечной центральной подгруппе, поэтому далее будем считать, что центр G тривиален.

Вопрос о существовании таких действий был решен в работе [1], и там же был поставлен вопрос о классификации таких действий для грассманианов. Действия на проективном пространстве были ранее классифицированы в работе [2]. Из результатов [1] следует, что локально транзитивные действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на многообразии G/P существуют тогда и только тогда, когда существует такая полупростая связная алгебраическая группа $\widetilde{G}$ и ее параболическая подгруппа Q, что $G/P \cong \widetilde{G}/Q$ и унипотентный радикал группы Q коммутативен. При этом $\widetilde{G}$ может быть выбрана как $(\mathrm{Aut}(G/P))^\circ$. Если $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(s)}$ — разложение на простые компоненты, $P^{(i)} = P \cap G^{(i)}$, то (см. [3, Глава 4, §15.4, теорема 2]) группа $\widetilde{G} = (\mathrm{Aut}(G/P))^\circ$ имеет столько же простых компонент в разложении, $\widetilde{G} = \widetilde{G}^{(1)} \times \ldots \times \widetilde{G}^{(s)}$, и $\widetilde{G}^{(i)}/Q^{(i)} \cong G^{(i)}/P^{(i)}$, где $Q^{(i)} = Q \cap \widetilde{G}^{(i)}$. Это позволяет сформулировать ответ в терминах простых групп G, $\widetilde{G}$ и их параболических подгрупп P и Q. Максимальные параболические подгруппы находятся во взаимно-однозначном соответствии с простыми корнями, будем упорядочивать простые корни как в [4], и параболическую группу, соответствующую простому корню α_i, обозначим через P_i.

Теорема 1. *[1, Theorem 1] Если G — простая алгебраическая группа, $P \subset G$ — параболическая подгруппа, и многообразие флагов G/P допускает локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$, где $m = \dim G/P$, то $G/P \cong \widetilde{G}/Q$, где $\widetilde{G} = (\mathrm{Aut}(G/P))^\circ$ и $Q \subset \widetilde{G}$ — параболическая под-*

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда Саймонса

группа, и имеет место одна из следующих возможностей:

G	P	$\widetilde{G}$	Q
PSp_{2l}	P_1	PSL_{2l}	P_1
SO_{2l+1}	P_l	PSO_{2l+2}	P_{l+1}
типа G_2	P_1	SO_7	P_1
PSL_{l+1}	P_i *(i любое)*	PSL_{l+1}	P_i
SO_{2l+1}	P_1	SO_{2l+1}	P_1
PSp_{2l}	P_l	PSp_{2l}	P_l
PSO_{2l}	P_1	PSO_{2l}	P_1
PSO_{2l}	P_{l-1}	PSO_{2l}	P_{l-1}
PSO_{2l}	P_l	PSO_{2l}	P_l
типа E_6	P_1	*типа* E_6	P_1
типа E_6	P_6	*типа* E_6	P_6
типа E_7	P_7	*типа* E_7	P_7

Поэтому при изучении действий группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на многообразии флагов G/P далее будем считать, что унипотентный радикал группы P коммутативен и $G = (\mathrm{Aut}(G/P))^\circ$.

Все алгебры Ли, возникающие в дальнейшем, являются подалгебрами Ли в касательных алгебрах $\mathfrak{h}$ Ли редуктивных алгебраических групп H. Будем называть алгебру Ли $\mathfrak{a}$ *унипотентной*, если она является касательной алгеброй некоторой унипотентной алгебраической подгруппы, или, что то же, если $\mathfrak{a}$ является подалгеброй в касательной алгебре (некоторой) максимальной унипотентной подгруппы группы H.

Предложение 1. *(см. раздел 3) Пусть G — простая алгебраическая группа, унипотентный радикал ее параболической подгруппы P коммутативен и $G = (\mathrm{Aut}(G/P))^\circ$. Тогда $(\mathbf{G}_a)^m$-действия на однородном пространстве G/P с точностью до G-сопряжения находятся во взаимно-однозначном соответствии с коммутативными унипотентными подалгебрами $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, такими что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = 0$, где $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}\, P$, и $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, рассматриваемыми с точностью до P-сопряжения.*

Зафиксируем борелевскую подгруппу $B \subset G$ и максимальный тор $T \subset B$. Пусть B^- — (единственная) борелевская подгруппа, содержащая тор T и такая, что $B \cap B^- = T$. Тогда для параболической подгруппы P существует единственная параболическая подгруппа P^-, содержащая подгруппу B^- и пересекающая группу P по подгруппе Леви группы P. Пусть U^- — унипотентный радикал группы P^-, $\mathfrak{u}^- = \mathrm{Lie}\, U^-$, $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}\, P$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{p}$, и линейное пространство $\mathfrak{a}$ проецируется на линейное пространство $\mathfrak{u}^-$ вдоль линейного пространства $\mathfrak{p}$ изоморфно. Следовательно, любой элемент из алгебры $\mathfrak{a}$ однозначно записывается в виде $u + \varphi(u)$, где $u \in \mathfrak{u}^-$, $\varphi(u) \in \mathfrak{p}$, а $\varphi : \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{p}$ — некоторое линейное отображение. Для общей подалгебры $\mathfrak{a}$ образ отображения φ мог бы лежать в алгебре $\mathfrak{p}$, но следующее предложение показывает, что, подействовав на $\mathfrak{a}$ сопряжением, можно добиться того, чтобы образ отображения φ на самом деле лежал в максимальной унипотентной подалгебре алгебры $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}\, L$, где $L = P \cap P^-$ — подгруппа Леви в P. Обозначим унипотентный радикал группы B^- через U_0^-.

Предложение 2. *(см. раздел 3) Для любой унипотентной коммутативной подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, такой что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = 0$ и $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, существует такой элемент $p \in P$, что $(\mathrm{Ad}\, p)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}_0^- = \mathrm{Lie}(U_0^-)$.*

В частности, можно добиться того, чтобы образ отображения φ лежал в алгебре $\mathfrak{l}$. Следовательно, подалгебры $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, такие что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} = 0$ и $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, рассматриваемые с точностью до P-сопряжения, задаются некоторым подмножеством всех линейных отображений $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$, рассматриваемых с точностью до L-сопряжения. Вообще говоря, различные классы L-сопряженности могут задавать один и тот же класс P-сопряженности (но не наоборот), но впоследствии мы увидим, что это соответствие на самом деле взаимно-однозначно. Такое отображение φ позволяет задать умножение $\mathfrak{u}^- \times \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{u}^-$, определенное как $u \cdot v = [\varphi(u), v]$. Поскольку представление алгебры $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{u}^-$ точно, то это умножение позволяет восстановить отображение φ. Следующая теорема позволяет точно описать все умножения, по которым можно построить отображение $\varphi\colon \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{l}$ и подалгебру $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$.

Теорема 2. *(см. раздел 3) Умножение $\mathfrak{u}^- \times \mathfrak{u}^- \to \mathfrak{u}^-$ позволяет построить коммутативную унипотентную подалгебру $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, дополнительную к подалгебре $\mathfrak{p}$, тогда и только тогда, когда это умножение коммутативно, ассоциативно, оператор умножения на любой элемент является оператором коммутирования с некоторым элементом подалгебры $\mathfrak{l}$, и все операторы умножения нильпотентны.*

Таким образом, мы свели задачу классификации $(\mathbf{G}_a)^m$-действий на G/P к описанию умножений в представлениях некоторых редуктивных алгебр $\mathfrak{l}$, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$ так, как это описано в теореме 2. Естественно обобщить возникший вопрос следующим образом. Пусть L — редуктивная алгебраическая группа, V — ее представление. Требуется описать все коммутативные ассоциативные умножения, такие что все операторы умножения нильпотентны и являются операторами действия элементов алгебры $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$ в V, с точностью до L-сопряжения. Далее будем называть такие умножения *согласованными с действием* $\mathfrak{l}$. Сначала сведем этот вопрос к простым группам и неприводимым представлениям. Сразу ясно, что поскольку все операторы умножения нильпотентны, элементы $\mathfrak{l}$, которые действуют в пространстве V так же, как эти операторы, обязаны лежать в коммутанте $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. Более того, верно следующее предложение.

Предложение 3. *(см. раздел 4) Пусть V — эффективное представление связной редуктивной группы L, в котором можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$. Тогда все операторы умножения на самом деле являются операторами действия элементов коммутанта алгебры $\mathfrak{l}$. Если при этом $\mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$, где $\mathfrak{l}_i$ просты, — разложение коммутанта на простые слагаемые, то пространство V раскладывается в сумму $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$, и существует такой индекс $r \le s$, $r \le t$, что:*

1. *V_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_i$ **при** $1 \le i \le r$.*
2. *$\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ **при** $1 \le i \le r$, $1 \le j \le t$, $i \ne j$.*
3. *$\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ **при** $r < i \le s$, $1 \le j \le r$, $i \ne j$.*
4. *$V_i V_j = 0$ **при** $1 \le i \le r$, $1 \le j \le t$, $i \ne j$.*
5. *$V_i V = 0$ **при** $r < i \le t$.*

Неформально говоря, алгебра $\mathfrak{l}$ вместе со своим представлением V распадается в прямую сумму двух слагаемых — "нетривиального" ($\mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_r : V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$) и "тривиального" ($\mathfrak{l}_{r+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s : V_{r+1} \oplus \ldots \oplus V_t$). При этом в "тривиальной" части как алгебра, так и представление (или и то, и другое) могут оказаться нулевыми. "Тривиальная" часть алгебры действует на "нетривиальной" части представления нулём, так же как и "нетривиальная" часть алгебры на "тривиальной" части представления. "Нетривиальная" часть представления умножается на "тривиальную" нулем, внутри "тривиальной" части умножение также нулевое. "Нетривиальная" часть алгебры вместе с "нетривиальной" частью представления, в свою очередь, распадается в прямую сумму простых алгебр и неприводимых представлений каждой из них (для каждого слагаемого простой алгебры — только одно неприводимое представление), и действие каждой простой алгебры может быть ненулевым только на соотвествующем неприводимом представлении. Умножение между разными неприводимыми представлениями в "нетривиальной" части также нулевое.

Заметим, что роль торических прямых слагаемых в алгебре $\mathfrak{l}$ и простых прямых слагаемых в алгебре $\mathfrak{l}$, отличных от слагаемых $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r$, в предложении 3 различна. Простые прямые слагаемые, отличные от слагаемых $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r$, обязаны действовать на пространстве $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ тривиально, иначе ненулевых умножений не будет. Напротив, торические слагаемые, если они есть, не влияют на множество умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Вообще говоря, они могут уменьшать множество умножений с точностью до действия группы L, если два умножения сопряжены при помощи центрального тора и не сопряжены при помощи коммутанта. Центральный тор действует на множестве умножений на каждой неприводимой компоненте некоторым характером. Если действие простой группы на этой компоненте позволяет умножать все структурные константы на любой элемент поля (мы проверим это для всех простых групп, кроме групп типа A_l), то множества умножений с точностью до действия редуктивной группы и ее коммутанта совпадают. Если же действие некоторых полупростых групп из числа L_i на соответствующих представлениях не позволяет умножать все структурные константы на элементы поля, то множество нетривиальных умножений на этих неприводимых компонентах нужно еще профакторизовать по действию центрального тора группы L на них. Мы обсудим это подробнее в случае тавтологического представления группы типа A_l, см. раздел 5.1.1.

Далее мы будем рассматривать только простые алгебры $\mathfrak{l}$ и их неприводимые представления V со старшим весом λ.

Предложение 4. *(см. раздел 4) Если на пространстве V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, то λ — фундаментальный вес, причем если он соответствует простому корню α_i, то в разложение на простые корни максимального короткого корня системы корней, двойственной к системе корней алгебры $\mathfrak{l}$, i-й простой корень должен входить с коэффициентом 1.*

Это предложение значительно сокращает множество представлений, которые нужно рассмотреть. Именно, для алгебры типа A_l нужно рассмотреть все фундаментальные представления, для алгебры типа B_l нужно рассмотреть только первое (тавтологическое) и последнее (полуспинорное) фундаментальные представления, для алгебры типа C_l нужно рассмотреть все ее фундаментальные представления, для алгебры типа D_l нужно рассмотреть первое (тавтологическое) и последние два (они оба изоморфны полуспинорному и переводятся друг в друга внешним автоморфизмом) представления, для алгебр типа E_6, E_7, F_4 и G_2 нужно рассмотреть только представления минимальной размерности.

Эти рассмотрения позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 3. *(см. раздел 5) Пусть $\mathfrak{l}$ — простая алгебра Ли, V — ее неприводимое представление, на котором можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда имеет место одна из следующих двух возможностей:*

1. *Алгебра $\mathfrak{l}$ имеет тип A_l, V — ее тавтологическое представление или представление, двойственное к тавтологическому, тогда умножение на пространстве V может быть любым коммутативным ассоциативным умножением, для которого все операторы умножения нильпотентны.*

2. *Алгебра $\mathfrak{l}$ имеет тип C_l $(l \geq 2)$, V — ее тавтологическое представление, тогда умножения на пространстве V параметризуются кубическими формами на V/V_1, где V_1 — лагранжево подпространство в пространстве V. Эта параметризация подробно описана в разделе 5.3.1.*

Возвращаясь к действиям $(\mathbf{G}_a)^m$ на G/P, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *(см. раздел 6) Пусть G — простая алгебраическая группа, P — параболическая подгруппа, $m = \dim G/P$, и $(\mathrm{Aut}(G/P))^\circ = G$. Тогда если группа G имеет тип A_l и $P = P_1$ или P_l, то локально транзитивные действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на однородном пространстве G/P параметризуются коммутативными ассоциативными l-мерными алгебрами с нильпотентными операторами умножения с точностью до изоморфизма. В противном случае имеется либо ровно одно локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ с точностью до G-сопряжения, задаваемое подгруппой U^-, если подгруппа U^- коммутативна (это в точности случаи из теоремы 1, в которых $G = \widetilde{G}$), либо локально транзитивных действий группы $(\mathbf{G}_a)^m$ нет вообще.*

1.1 Благодарности

Автор благодарен И. В. Аржанцеву за привлечение его внимания к данной задаче и Э. Б. Винбергу за полезное обсуждение, позволившее сократить доказательства.

2 Соглашения и предварительные сведения

Если алгебраическая группа обозначена одной заглавной буквой, то ее касательную алгебру Ли будем обозначать соответствующей готической буквой.

В простой алгебраической группе G мы фиксируем борелевскую подгруппу B и максимальный тор $T \subset B$. Эти данные определяют систему корней $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$, систему положительных корней Φ^+ и систему простых корней Δ. Обозначим $\Phi^- = \Phi \setminus \Phi^+$. Корневое подпространство, соответствующее корню α, обозначим через $\mathfrak{g}_\alpha$. Для каждой пары корней $(\alpha, -\alpha)$ выберем корневые векторы $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, так чтобы x_α, y_α и $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ образовывали $\mathfrak{sl}_2$-тройку. Будем считать, что $x_{-\alpha} = y_\alpha$.

Параболические подгруппы $P \supseteq B$ задаются подмножествами $I \subseteq \Delta$, а именно, подмножество $I \subseteq \Delta$ задает такую параболическую подгруппу P, что

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_I},$$

где подмножество $\Phi_I \subseteq \Phi^-$ состоит из всех корней, в разложении которых на простые не встречаются корни из I. В частности, максимальные параболические подгруппы задаются в точности одноэлементными множествами I, и подгруппу, определяемую множеством $\{\alpha_i\}$, будем обозначать через P_i. Любая параболическая подгруппа сопряжена одной из описанных.

Для любой параболической подгруппы $P \supseteq B$ (в частности, для $P = B$) через P^- обозначим такую параболическую подгруппу, что

$$\mathfrak{p}^- = \operatorname{Lie} P^- = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha : \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Тогда $L = P \cap P^-$ является подгруппой Леви в группе P. Если группа P задана подмножеством $I \subseteq \Delta$, то подгруппа U с касательной алгеброй

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha : -\alpha \notin \Phi_I \text{ и } \alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

является унипотентным радикалом группы P, а подгруппа U^- с касательной алгеброй

$$\mathfrak{u}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^- \setminus \Phi_I}$$

является унипотентным радикалом группы P^-. Унипотентный радикал группы B обозначим через U_0, $\operatorname{Lie} U_0 = \mathfrak{u}_0$.

Обозначим решетку весов тора T через $\mathfrak{X}(T)$, а полугруппу доминантных весов, соответствующую подгруппе B, обозначим через $\mathfrak{X}^+(T)$. Фундаментальный вес, соответствующий корню $\alpha_i \in \Delta$, обозначим через ϖ_i. Представление алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ обозначим через $V(\lambda)$. Если из контекста не ясно, о какой алгебре идет речь, будем писать $V_{\mathfrak{g}}(\lambda)$. Старший вектор этого представления обозначим через v_λ. Односвязная накрывающая группы G также действует в этом представлении.

Грассманиан k-мерных подпространств в пространстве V будем обозначать через $Gr(k, V)$.

3 Сведение задачи о действиях $(\mathbf{G}_a)^m$ к задаче об умножениях

Доказательство предложения 1. Поскольку $G = (\operatorname{Aut}(G/P))^\circ$, то любое эффективное действие связной группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на G/P является вложением группы $(\mathbf{G}_a)^m$ в группу G, при этом G-сопряжение действия соответствует G-сопряжению группы. Поскольку группа G действует на многообразии флагов G/P транзитивно, можно считать, что орбита точки eP открыта (в противном случае переведем точку, орбита которой открыта, в точку eP). Обозначим образ группы

$(\mathbf{G}_a)^m$ в группе G при таком вложении через A. Утверждение о том, что A-орбита точки eP открыта, равносильно тому, что множество AP открыто в группе G, и это равносильно тому, что $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$. Поскольку $\dim\mathfrak{a}=\dim(G/P)$, то сумма $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}$ на самом деле прямая.

Пусть теперь $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$, и g — такой элемент группы G, что $(\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{p}=\mathfrak{g}$. Тогда докажем, что существует такой элемент $p\in P$, что $(\operatorname{Ad}p)\mathfrak{a}=(\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a}$, на этом доказательство предложения будет закончено. Обозначим G-орбиту при присоединенном действии подпространства $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ как точки в грассманиане $Gr(m,\mathfrak{g})$ через X. Очевидно, множество X состоит из подалгебр Ли. Поскольку множество PA открыто в группе G, то множество $(\operatorname{Ad}PA)\mathfrak{a}$ открыто в орбите X. Но $(\operatorname{Ad}A)\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$, поэтому $(\operatorname{Ad}P)\mathfrak{a}$ открыто в орбите X. Обозначим подгруппу gAg^{-1} через A_1. Тогда $\operatorname{Lie}A_1=(\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a}$, и, рассуждая аналогично, получаем, что множество $(\operatorname{Ad}P)((\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a})$ открыто в орбите X. Группа G связна, следовательно множество X неприводимо и множества $(\operatorname{Ad}P)\mathfrak{a}$ и $(\operatorname{Ad}P)((\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a})$ пересекаются нетривиально, то есть существуют такие элементы $p_1,p_2\in P$, что $(\operatorname{Ad}p_1)\mathfrak{a}=(\operatorname{Ad}p_2g)\mathfrak{a}$, откуда $(\operatorname{Ad}p_2^{-1}p_1)\mathfrak{a}=(\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a}$. □

Доказательство предложения 2. Снова обозначим G-орбиту при присоединенном действии подпространства $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ как точки в грассманиане $Gr(m,\mathfrak{g})$ через X. Как и в предыдущем доказательстве получаем, что множество $(\operatorname{Ad}P)\mathfrak{a}$ открыто в множестве X. Кроме того, поскольку присоединенное действие подгруппы P сохраняет подалгебру $\mathfrak{p}$, то все подалгебры из орбиты $(\operatorname{Ad}P)\mathfrak{a}$ пересекают подалгебру $\mathfrak{p}$ тривиально.

Вложим унипотентную подалгебру $\mathfrak{a}$ в максимальную унипотентную подалгебру $\mathfrak{u}_1$. Поскольку все максимальные унипотентные подалгебры G-сопряжены, существует элемент $g\in G$, переводящий подалгебру $\mathfrak{u}_1$ в подалгебру $\mathfrak{u}_0^-$. Алгебра $(\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a}$ лежит в алгебре $\mathfrak{u}_0^-$, и то же самое можно сказать обо всех алгебрах из ее U_0^--орбиты. С другой стороны, множество PU_0^- открыто в группе G (это следует из разложения Брюа). Поэтому множество $(\operatorname{Ad}PU_0^-)((\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a})$ открыто в множестве X. Следовательно, оно нетривиально пересекается с орбитой $(\operatorname{Ad}P)\mathfrak{a}$, то есть существуют такие элементы $p_1,p_2\in P$ и $u_0\in U_0$, что $(\operatorname{Ad}p_1)\mathfrak{a}=(\operatorname{Ad}p_2u_0)(\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a}$. Пусть $p=p_2^{-1}p_1$, тогда $(\operatorname{Ad}p)\mathfrak{a}=(\operatorname{Ad}u_0)(\operatorname{Ad}g)\mathfrak{a}$, и эта алгебра является подмножеством алгебры $\mathfrak{u}_0^-$. □

Доказательство теоремы 2. Пусть дана подалгебра $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}^-$, состоящая из всех элементов вида $u+\varphi(u)$, где $u\in\mathfrak{u}^-$. Поскольку $\mathfrak{l}$ — подалгебра в алгебре $\mathfrak{p}^-$, а $\mathfrak{u}^-$ — коммутативный идеал в алгебре $\mathfrak{p}^-$, то для любых двух элементов $u,v\in\mathfrak{u}^-$ имеем $0=[u+\varphi(u),v+\varphi(v)]=[u,\varphi(v)]+[\varphi(u),v]+[\varphi(u),\varphi(v)]$. При этом $[u,\varphi(v)]+[\varphi(u),v]\in\mathfrak{u}^-$, $[\varphi(u),\varphi(v)]\in\mathfrak{l}$, поэтому $[u,\varphi(v)]+[\varphi(u),v]=0$ и $[\varphi(u),\varphi(v)]=0$. Первое из этих равенств дает $[\varphi(u),v]=[\varphi(v),u]$, значит введенное нами умножение коммутативно. Прокоммутируем второе равенство с произвольным элементом $w\in\mathfrak{u}^-$ и применим тождество Якоби. Получим $0=[w,[\varphi(u),\varphi(v)]]=[[w,\varphi(u)],\varphi(v)]+[\varphi(u),[w,\varphi(v)]]=[\varphi(v),[\varphi(u),w]]-[\varphi(u),[\varphi(v),w]]$, или, в терминах умножения, $v(uw)=u(vw)$, или, с учетом коммутативности, $(uw)v=u(wv)$, то есть ассоциативность доказана. Нильпотентность операторов умножения и их представимость в виде $\operatorname{ad}l$, где $l\in\mathfrak{l}$, очевидна из определения умножения (напомним, что можно считать, что на самом деле алгебра $\mathfrak{a}$ лежит в алгебре $\mathfrak{u}_0^-$).

Обратно, пусть дано коммутативное ассоциативное умножение, такое что все операторы умножения нильпотентны и являются операторами коммутирования с элементами $\mathfrak{l}$ в алгебре Ли $\mathfrak{p}^-$. Пусть оператор умножения на любой элемент $u\in\mathfrak{u}^-$ является оператором коммутирования с элементом алгебры $\mathfrak{l}$, который обозначим через $\varphi(u)$. Тогда если $a,b\in\mathbb{C},u,v\in\mathfrak{u}^-$, то оператор умножения на элемент $au+bv\in\mathfrak{u}^-$ равен оператору коммутирования с элементом $a\varphi(u)+b\varphi(v)$, и, поскольку представление подалгебры $\mathfrak{l}$ в подалгебре $\mathfrak{u}^-$ точно, то $\varphi(au+bv)=a\varphi(u)+b\varphi(v)$, поэтому отображение φ линейно. Поскольку умножение коммутативно, то $[\varphi(u),v]=uv=vu=[\varphi(v),u]$. Поскольку умножение коммутативно и ассоциативно, то любые два оператора умножения коммутируют, значит $[\varphi(u),\varphi(v)]=0$. Получаем $[u+\varphi(u),v+\varphi(v)]=[u,\varphi(v)]+[\varphi(u),v]+[\varphi(u),\varphi(v)]=0$. Следовательно, элементы вида $u+\varphi(u)$, где $u\in\mathfrak{u}^-$, образуют коммутативную алгебру Ли, которую обозначим через $\mathfrak{a}$.

Далее, все элементы вида $\varphi(u)$ в алгебре $\mathfrak{l}$ также образуют коммутативную алгебру Ли. Все они действуют нильпотентными операторами в точном представлении алгебры $\mathfrak{l}$ в линейном пространстве $\mathfrak{u}^-$, поэтому они лежат в коммутанте алгебры $\mathfrak{l}$ и нильпотентны в смысле разложения Жордана в алгебре $\mathfrak{l}$. Следовательно, существует такой элемент $l\in L$, что $(\operatorname{Ad}l)\varphi(\mathfrak{u}^-)\subset\mathfrak{u}_0^-\cap\mathfrak{l}$. Тогда алгебра Ли $(\operatorname{Ad}l)\mathfrak{a}$ состоит из всех элементов вида $(\operatorname{Ad}l)u+(\operatorname{Ad}l)\varphi(u)$, где $u\in\mathfrak{u}^-$. Все эти элементы лежат в алгебре $\mathfrak{u}_0^-$, следовательно, алгебра $(\operatorname{Ad} l)\mathfrak{a}$ нильпотентна относительно разложения Жордана в алгебре $\mathfrak{g}$, а значит и алгебра $\mathfrak{a}$ унипотентна. □

4 Общие сведения об умножениях, согласованных с действием $\mathfrak{l}$

В этом разделе L — связная редуктивная группа, V — ее линейное представление, $r : \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V)$ — гомоморфизм представления для алгебры Ли.

Доказательство предложения 3. Разберем сначала случай, когда представление V неприводимо.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{l}$ — полупростая алгебра, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$ — ее разложение на простые компоненты, V — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}$, и пусть на V существует ненулевое умножение, согласованное с действием $\mathfrak{l}$.*

Тогда существует такой индекс k, что $\mathfrak{l}_i V = 0$ при $i \neq k$.

Доказательство. Любое неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}$ имеет вид $V_1 \otimes \ldots \otimes V_s$, где V_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_i$. Достаточно доказать, что все V_i, кроме одного — тривиальные одномерные представления.

Будем обозначать оператор, которым действует элемент x алгебры $\mathfrak{l}$ на пространстве V через $r(x)$. Пусть $\varphi\colon V \to \mathfrak{l}$ — линейное отображение, такое что $vw = r(\varphi(v))w$ для любых векторов $v, w \in V$. Докажем сначала, что образ отображения φ целиком лежит внутри одной из подалгебр $\mathfrak{l}_i$.

В противном случае существует вектор v, такой что его образ $\varphi(v) \in \mathfrak{l}$ при разложении в прямую сумму $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$ имеет хотя бы две ненулевые координаты. Пусть одна из этих координат имеет номер k.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $w \in V$. Пусть $\varphi(w) = x+y$, где $x \in \mathfrak{l}_k$, а $y \in \widetilde{\mathfrak{l}} = \bigoplus_{i\neq k} \mathfrak{l}_i$. Обозначим также $W = \bigotimes_{i\neq k} V_i$.

По определению тензорного произведения представлений алгебр Ли, элементы x и y действуют в пространствах V_k и W операторами, которые обозначим через $r_{V_k}(x)$ и $r_W(y)$, при этом $r(x+y) = r_{V_k}(x) \otimes \mathrm{id}_W + \mathrm{id}_{V_k} \otimes r_W(y)$. Поскольку алгебры $\mathfrak{l}_k$ и $\widetilde{\mathfrak{l}}$ полупросты, элементы операторы $r_{V_k}(x)$ и $r_W(y)$ имеют нулевой след. Для линейного пространства $\mathfrak{gl}(V_i)$ имеем разложение

$$\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}(V_k) \otimes \mathfrak{gl}(W) = \langle \mathrm{id}_{V_k} \rangle \otimes \langle \mathrm{id}_W \rangle \oplus \langle \mathrm{id}_{V_k} \rangle \otimes \mathfrak{sl}(W) \oplus \mathfrak{sl}(V_k) \otimes \langle \mathrm{id}_W \rangle \oplus \mathfrak{sl}(V_k) \otimes \mathfrak{sl}(W).$$

Мы видим, что оператор $r(x+y)$ лежит в сумме второго и третьего слагаемых этого разложения. Мы получили, что оператор умножения на любой элемент пространства V_i лежит в подпространстве $\langle \mathrm{id}_{V_k} \rangle \otimes \mathfrak{sl}(W) \oplus \mathfrak{sl}(V_k) \otimes \langle \mathrm{id}_W \rangle \subset \mathfrak{gl}(V)$.

В частности, это верно для оператора умножения на вектор v^2. Пусть $\varphi(v) = x' + y'$, где $x \in \mathfrak{l}_k$, а $y \in \widetilde{\mathfrak{l}}$. Тогда оператор умножения на v^2 равен $(\mathrm{id}_{V_k} \otimes r_W(y') + r_{V_k}(x') \otimes \mathrm{id}_W)^2 = \mathrm{id}_{V_k} \otimes (r_W(y')^2) + (r_{V_k}(x')^2) \otimes \mathrm{id}_W + 2r_{V_k}(x') \otimes r_W(y')$. Мы выбрали вектор v, так чтобы $x' \neq 0$ и $y' \neq 0$. Поэтому последнее слагаемое не равно нулю и лежит в подпространстве $\mathfrak{sl}(V_k) \otimes \mathfrak{sl}(W)$. Противоречие.

Итак, образ отображения φ действительно лежит внутри одной из подалгебр $\mathfrak{l}_i$, которую обозначим через $\mathfrak{l}_k$. Тогда представление V_k обязано быть нетривиальным, а следовательно точным, иначе все операторы умножения окажутся нулевыми. Допустим, тем не менее, что среди представлений V_i с $i \neq k$ все же имеются нетривиальные, тогда пространство W имеет размерность $d > 1$. Выберем в нем базис, тогда пространоство V разобьется в сумму $\mathfrak{l}_k$-инвариантных подпространств $V_1', \ldots, V_d'$. Все они изоморфны V_k как представления алгебры $\mathfrak{l}_k$. Допустим, оператор умножения на вектор $v \in V_i'$ не равен нулю для некоторого i. Это означает, что $\varphi(v) \neq 0$, $\varphi(v) \in \mathfrak{l}_k \subset \mathfrak{l}$. Тогда $\varphi(v)$ действует ненулевым оператором не только на пространстве V_i', но и на всех пространствах V_j' с $j \neq i$. В частности, существует вектор $w \in V_j'$, такой что $vw \neq 0$. Поскольку подпространство V_j' $\mathfrak{l}_k$-инвариантно, $vw \in V_j'$. С другой стороны, поменяв местами v и w и повторив предыдущие рассуждения, получаем, что $wv \in V_i'$. Противоречие. □

Вернемся к общему случаю. Сначала наши рассуждения будут похожи на рассуждения из конца доказательства леммы. Пусть $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$ — разложение представления V на неприводимые компоненты. Зафиксируем индексы $i \neq j$. Оператор умножения на любой элемент $v \in V_i$ сохраняет подпространства V_j, поскольку является оператором действия некоторого элемента алгебры $\mathfrak{l}$. Значит, произведение любых двух элементов $v \in V_i$ и $u \in V_j$ принадлежит подпространству V_j. Аналогично (из коммутативности умножения) оно принадлежит подпространству V_i. Следовательно, $V_i V_j = 0$. Это позволяет использовать лемму 1, если алгебра полупроста. Не ограничивая общности (перенумеровав неприводимые компоненты), будем считать, что $V_i V_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq r$ и $V_i V_i = 0$ при $i > r$ (в этот момент мы выбираем число r).

Пусть $T_0 = Z(L)$ и $\mathfrak{t}_0 = \operatorname{Lie} T_0$. По лемме Шура тор T_0 действует скалярно на любом подпространстве V_i. Любой элемент коммутанта $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ действует на пространстве V_i оператором с нулевым следом, любой оператор умножения на элемент пространства V_i нильпотентен и поэтому также имеет нулевой след на пространстве V_i, поэтому операторы умножения на самом деле являются операторами из коммутанта $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$. Поэтому далее будем считать группу L и алгебру $\mathfrak{l}$ полупростыми. Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$ — разложение на простые компоненты.

По лемме 1 на любом неприводимом представлении V_i алгебры $\mathfrak{l}$, умножение внутри которого ненулевое, ровно одна из алгебр $\mathfrak{l}_k$ действует нетривиально.

Пусть оператор умножения на вектор $v \in V_i$ действует как элемент $x_k \in \mathfrak{l}_k \subset \mathfrak{l}$. Этот элемент действует нулевым оператором на всех подпространствах V_j при $j \neq i$, поэтому все представления W_{jk} при $j \neq i$ тривиальны. Мы получили, что на каждой неприводимой компоненте представления V нетривиально действует только одна простая компонента алгебры $\mathfrak{l}$, и эти компоненты различны для различных компонент представления V. Теперь мы можем переупорядочить простые слагаемые в разложении алгебры $\mathfrak{l}$, так чтобы компонента $\mathfrak{l}_i$ нетривиально действовала только на пространстве V_i при $1 \leq i \leq r$. Компоненты $\mathfrak{l}_i$ с $i > r$ обязаны действовать на пространствах V_j с $1 \leq j \leq r$ нулем, а на остальных пространствах V_j они могут действовать как угодно. $\square$

Доказательство предложения 4. Обозначим оператор умножения на элемент $v \in V$ через $\widetilde{v}$. Выберем такой элемент $v \in V$, что $\widetilde{v} \neq 0$. Поскольку оператор $\widetilde{v}$ нильпотентен, то существует такое k, что $\widetilde{v}^k \neq 0$, но $(\widetilde{v}^k)^2 = 0$. Поскольку оператор $\widetilde{v}^k$ является оператором умножения на v^k, то существует такой элемент $x \in \mathfrak{l}$, что $r(x) \neq 0$, но $r(x)^2 = 0$. Обозначим максимальный корень системы корней алгебры $\mathfrak{l}$ через α.

Далее в доказательстве мы применяем обозначения для системы корней, системы весов и корневых векторов алгебры $\mathfrak{l}$, введенные в разделе 2 для касательной алгебры $\mathfrak{g}$ произвольной группы Ли. Замыкание орбиты любого нильпотентного элемента алгебры Ли при присоединенном действии группы содержит корневой вектор y_α. Следовательно, $r(y_\alpha)^2 = 0$. Значит, в разложении представления V на неприводимые представления алгебры $\mathfrak{sl}_2 = \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle$ встречаются только представления размерности 1 и 2. Следовательно, собственные значения h_α в пространстве V могут быть равны 1, 0 и -1. В частности, $\lambda(h_\alpha)$ может быть равно 1 или 0. Пусть $\lambda = \sum a_i \varpi_i$.

При отождествлении картановской подалгебры $\mathfrak{t}$ с двойственным пространством $\mathfrak{t}^*$ с помощью инвариантного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ для любого корня $\beta \in \Delta$ имеем

$$h_\beta = \frac{2\beta}{(\beta, \beta)},$$

поэтому векторы h_β образуют в евклидовом пространстве $\mathfrak{t}$ систему корней, двойственную к системе Δ, в качестве ее простых корней можно выбрать h_{α_i}. При этом вектор h_α оказывается максимальным коротким корнем этой системы. Поскольку $\varpi_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$ и в разложении максимального короткого корня по простым все коэффициенты строго положительны, только один из коэффициентов a_i может быть отличен от нуля. Пусть это коэффициент a_j. Тогда $\lambda(h_\alpha)$ равно произведению коэффициента a_j и коэффициента при h_{α_j} в разложении h_α в сумму h_{α_i}. Следовательно, этот коэффициент должен быть равен 1, и $a_j = 1$. $\square$

5 Существование умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$

В этом разделе $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}\, L$ — простая алгебра Ли, V — ее неприводимое представление со старшим весом λ. Мы применяем для системы корней, системы весов, корневых подпространств и корневых векторов алгебры $\mathfrak{l}$ те же обозначения, которые ввели в разделе 2 для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отображение представления будем обозначать как $r : \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V)$.

В тех случаях, когда умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, не существует, мы будем использовать следующий способ, чтобы проверить это.

Для проверки существования умножения, согласованного с действием алгебры $\mathfrak{l}$, мы будем использовать один из следующих двух методов.

Во-первых, любое умножение $V \times V \to V$ задается элементом тензорного произведения $V^* \otimes V^* \otimes V$ (тензором структурных констант умножения). Это произведение раскладывается в сумму $S^2(V^*) \otimes V \oplus \Lambda^2(V^*) \otimes V$. Коммутативность умножения означает, что на самом деле тензор структурных констант лежит в первом слагаемом, ассоциативность и нильпотентность операторов умножения задаются алгебраическими условиями на тензор структурных констант. Кроме того, отображение действия $r : \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V$ на самом деле всегда является гомоморфизмом представлений, где линейное пространство $\mathfrak{l}$ снабжено структурой присоединенного представления (далее линейное пространство $\mathfrak{l}$, снабженное структурой присоединенного представления, будем обозначать через $R(\mathfrak{l})$). Поэтому в представлении $V^* \otimes V^* \otimes V$ имеется подпредставление, изоморфное $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$. Утверждение о том, что все операторы (правого) умножения в пространстве V являются операторами действия элементов алгебры $\mathfrak{l}$, в точности означает, что тензор структурных констант лежит в этом подпредставлении. Поэтому если подпредставления $S^2(V^*) \otimes V$ и $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ в представлении $V^* \otimes V^* \otimes V$ пересекаются тривиально (по нулю), то ненулевых умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, не существует.

Чтобы проверить, что эти пространства пересекаются тривиально, достаточно найти старшие векторы в неприводимых подпредставлениях $\mathfrak{l}$-модуля $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$, и проверить, попадают ли они в подпространство $S^2(V^*) \otimes V$ при вложении в представление $V^* \otimes V^* \otimes V$. Если они не попадают в подпространство $S^2(V^*) \otimes V$, то все неприводимые компоненты представления $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ пересекают подпространство $S^2(V^*) \otimes V$ тривиально. Если при этом все неприводимые компоненты различны, то и весь образ представления $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ по лемме Шура пересекает подпространство $S^2(V^*) \otimes V$ тривиально.

Поэтому мы доказали следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть представления $S^2(V^*) \otimes V$ и $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$ вложены в представление $V^* \otimes V^* \otimes V$ естественным образом, как объяснено выше. Пусть v_i — старшие векторы неприводимых подпредставлений в представлении $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$, и w_i — их образы при вложении в представление $V^* \otimes V^* \otimes V$. Если никакой вектор w_i не принадлежит подпространству $S^2(V^*) \otimes V$, то ненулевых умножений на пространстве V, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$, не существует.* □

Чтобы проверить, что принадлежит ли старший вектор подпространству $S^2(V^*) \otimes V$, можно рассмотреть линейное отображение $V^* \to V^* \otimes V^*$, канонически соответствующее этому вектору. Старший вектор принадлежит подпространству $S^2(V^*) \otimes V$ тогда и только тогда, когда образ соответствующего линейного отображения целиком лежит в подпространстве $S^2(V^*)$.

Во-вторых, можно рассуждать следующим образом. Поскольку все операторы умножения нильпотентны, коммутируют между собой и представляются операторами действия элементов алгебры $\mathfrak{l}$, то можно считать, что все операторы умножения представляются операторами действия элементов алгебры $\mathfrak{l}$, которые на самом деле лежат в какой-то фиксированной максимальной унипотентной подалгебре в алгебре $\mathfrak{l}$, например в подалгебре

$$\mathfrak{u}_0 = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{l}_\alpha.$$

Любое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, позволяет определить линейное отображение $\varphi \colon V \to \mathfrak{l}$, такое что $vw = \varphi(v)w$ для любых $v, w \in V$. Согласно предыдущему предположению, образ отображения φ на самом деле лежит в подалгебре $\mathfrak{u}_0$. Если зафиксировать базис в пространствах V и $\mathfrak{u}_0$ и считать структурные константы действия алгебры $\mathfrak{u}_0$ в пространстве V заданными, то условие коммутативности можно записать как $r(\varphi(w))v = r(\varphi(v))w$ для любых базисных векторов v и w, то есть линейным уравнением на элементы матрицы φ без свободного члена. Условие ассоциативности запишется как $r(\varphi(r(\varphi(u))v))w = r(\varphi(u))r(\varphi(v))w$, то есть однородным уравнением на элементы матрицы φ степени 2. Наконец, условие нильпотентности для операторов из подалгебры $\mathfrak{u}_0$ выполнено автоматически. Мы видим, что множество умножений, согласованных с действием алгебры $\mathfrak{l}$ и таких, что все операторы умножения являются операторами действия элементов подалгебры $\mathfrak{u}_0$ является замкнутым конусом в пространстве $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{u}_0)$. Обозначим этот конус через X.

Группа $B = N(\mathfrak{u}_0)$ естественным образом действует на пространстве $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{u}_0)$, и соответствие между структурными константами умножений, согласованных с действием $\mathfrak{l}$, и точками конуса X эквивариантно относительно этого действия. Поэтому группа B также действует и на проективизации конуса X в пространстве $\mathbf{P}(\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{u}_0))$. Разрешимая группа при действии на проективном многообразии всегда имеет неподвижную точку, есть конус X содержит старший вектор для действия группы L.

Таким образом, можно считать, что φ — старший вектор представления группы L в пространстве $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{l})$, и он имеет вес μ. Пусть $v_{-\lambda^*} \in V$ — младший вектор, $-\lambda^*$ — его вес, тогда элемент алгебры Ли $\varphi(v_{-\lambda^*})$ либо равен нулю, либо является собственным для картановской подалгебры алгебры $\mathfrak{l}$, то есть корневым вектором.

Если $\varphi(v_{-\lambda^*}) = 0$, то $\varphi = 0$. Действительно, вектор φ является старшим в $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{l})$, поэтому подалгебра $\mathfrak{u}_0$ его аннулирует, то есть для любого элемента $u \in \mathfrak{u}_0$ имеем $(\mathrm{ad}\, u)\varphi - \varphi r(u) = 0$, то есть $(\mathrm{ad}\, u)\varphi = \varphi r(u)$. Поскольку все векторы из пространства V можно получить (возможно, многократным) применением операторов вида $r(u)$ и взятием линейных комбинаций, получаем, что любой элемент из образа $\mathrm{im}\,\varphi$ можно получить применением операторов вида $\mathrm{ad}\, u$ к вектору $\varphi(v_{-\lambda^*}) = 0$.

Если вектор $\varphi(v_{-\lambda^*})$ не равен нулю, то обозначим его e_γ, где $\gamma = \mu - \lambda^*$ — соответствующий положительный корень (напомним, что мы считаем, что на самом деле $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{u}_0)$). Теперь обозначим множество весов представления V через $\mathfrak{X}(V)$. В этих обозначениях верна следующая лемма.

Лемма 3. *Если существует такой вес $\nu \in \mathfrak{X}(V)$, что $\gamma + \nu \in \mathfrak{X}(V)$ и $\nu + \lambda^* + \gamma \notin \Phi^+$, то умножение на самом деле нулевое.*

Доказательство. Для любого веса $\mu \in \mathfrak{X}(V)$ обозначим через V_μ подпространство веса μ относительно картановской подалгебры алгебры $\mathfrak{l}$. Для любого корня $\alpha \in \Phi^+$, такого что $\alpha + \mu \in \mathfrak{X}(V)$, векторы в пространстве V_μ, которые аннулируются действием прямой $\mathfrak{l}_\alpha$, образуют подпространство в пространстве V_μ коразмерности 1, и дополнение к объединению этих подпространств для всех $\alpha \in \Phi^+$ в пространстве V_μ образует плотное открытое по Зарисскому подмножество в пространстве V_μ. Выберем в каждом пространстве V_μ вектор v_μ, так чтобы если $\alpha \in \Phi^+$ и $\alpha + \mu \in \mathfrak{X}(V)$, то произведение $\mathfrak{l}_\alpha v_\mu$ не было бы равно нулю. Заметим, что пространство $V_{-\lambda^*}$, соответствующее младшему весу, одномерно, поэтому обозначение для вектора $v_{-\lambda^*}$ можно считать согласованным с вводимым теперь обозначением.

Поскольку отображение φ является старшим вектором (и, в частности, вектором определенного веса) в пространстве $\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{l})$, то оно переводит весовые подпространства в весовые подпространства. В частности, $\varphi(v_{-\lambda^*}) = e_\gamma$, поэтому для любого веса μ $\varphi(V_\mu) \subseteq \mathfrak{l}_{\gamma+\lambda^*+\mu}$. Это соотношение верно для $\mu = \nu$, и мы получаем, что $\varphi(v_\nu) \in \mathfrak{l}_{\gamma+\lambda^*+\nu}$, а значит $\varphi(v_\nu) = 0$, поскольку $\nu + \lambda^* + \gamma \notin \Phi^+$. Следовательно, $v_\nu v_{-\lambda^*} = r(\varphi(v_\nu))v_{-\lambda^*} = 0$.

С другой стороны, $v_\nu v_{-\lambda^*} = r(\varphi(v_{-\lambda^*}))v_\nu = e_\gamma v_\nu \neq 0$ по выбору v_ν, поскольку $\gamma + \nu \in \mathfrak{X}(V)$. Противоречие. Значит, предположение о существовании ненулевого умножения на пространстве V, согласованного с действием алгебры $\mathfrak{l}$, было неверно. □

Далее будут рассмотрены случаи всех простых алгебр $\mathfrak{l}$ и фундаментальных весов ϖ_i, удовлетворяющих предложению 4, с точностью до автоморфизмов систем корней, переводящих эти фундаментальные веса друг в друга.

5.1 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа A_l

Достаточно рассмотреть случаи фундаментальных весов ϖ_i, где $i \leq \lceil l/2 \rceil$.

Евклидово пространство, содержащее систему корней типа A_l, будем представлять как фактор евклидова пространства с ортонормированным базисом $\{\varepsilon_i\}$, где $1 \leq i \leq l+1$, по прямой $\langle \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{l+1} \rangle$. Будем обозначать класс эквивалентности вектора (элемент факторпространства) так же, как и сам вектор. Тогда $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} | 1 \leq i \leq l\}$, $\Phi^+\{\varepsilon_i - \varepsilon_j | 1 \leq i < j \leq l+1\}$, $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$, $1 \leq i \leq l$.

5.1.1 $\lambda = \varpi_1$

Пусть группа SL_{l+1} тавтологически действует в пространстве V и сохраняет кососимметрическую форму старшей степени ω. Тогда любой нильпотентный оператор имеет след 0 на пространстве V, поэтому от умножения достаточно потребовать выполнения свойств ассоциативности, коммутативности и нильпотентности. Чтобы классифицировать умножения с точностью до действия группы SL_{l+1}, нужно рассмотреть два случая.

Случай 1. С помощью действия группы SL_{l+1} все структурные константы умножения можно одновременно умножить на произвольный ненулевой скаляр. Тогда SL_{l+1}-орбита такого умножения совпадает с его GL_{l+1}-орбитой, поскольку элементы центрального тора в GL_{l+1} умножают все структурные константы на ненулевой скаляр. Такие умножения параметризуются коммутативными ассоциативными $l+1$-мерными алгебрами с нильпотентными операторами умножения с точностью до (произвольного линейного) изоморфизма.

Случай 2. С помощью действия группы SL_{l+1} невозможно все структурные константы умножения одновременно умножить на любой ненулевой скаляр. Тогда GL_{l+1}-орбита такого умножения распадается на бесконечно много SL_{l+1}-орбит, параметризовать которые можно следующим образом. Если дана коммутативная ассоциативная алгебра с нильпотентными операторами умножения, зададим на ней некоторую кососимметрическую форму $\nu \neq 0$ старшей степени и отождествим эту алгебру с пространством V, так чтобы форма ν перешла в форму ω. Тогда различные отождествления с таким свойством будут отличаться в точности на действия элементов группы SL_{l+1} на пространстве V. Таким образом, умножения параметризуются парами из коммутативной ассоциативной $l+1$-мерной алгебры с нильпотентными операторами умножения и кососимметрической формой старшей степени на ней, с точностью до изоморфизма таких алгебр, переводящего формы друг в друга.

Заметим, что возможность умножить все структурные константы на любой ненулевой скаляр действием группы SL_{l+1} зависит только от класса изоморфизма алгебры, но не от отождествления абстрактной алгебры с конкретным SL_{l+1}-модулем V, поэтому по алгебре можно заранее сказать, какой из двух случаев будет иметь место и нужно ли задавать на алгебре ненулевую кососимметрическую форму старшей степени.

Теперь рассмотрим подробно случай, когда полупростая часть алгебры $\mathfrak{l}$ содержит несколько простых слагаемых типа A, каждому из которых соответствует некоторый простой модуль в разложении модуля V на прямые слагаемые, и центральный тор группы L, вообще говоря, имеет ненулевую размерность. Чтобы задать умножение на пространстве V, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$, с точностью до действия группы L, сначала выберем те неприводимые компоненты представления V, для которых структурные константы будущего умножения нельзя будет умножить на произвольный скаляр действием коммутанта группы L. После этого выберем для каждой из таких неприводимых компонент абстрактную коммутативную ассоциативную алгебру с нильпотентными операторами умножения, для которой имеет место случай 2. Пусть имеется k таких алгебр размерностей $n_1, \ldots, n_k$ Обозначим соответствующие неприводимые компоненты представления V через $V_1, \ldots, V_k$. Пусть центральный тор действует на компоненте V_i характером χ_i. Тогда он действует на формах старшей степени на этом пространстве характером $n_i\chi_i$, и, кроме выбора алгебр, нужно выбрать еще k ненулевых кососимметрических форм с точностью до действия центрального тора на них, то есть некоторую орбиту тора в k-мерном пространстве W, где он действует характерами $n_1\chi_1, \ldots, n_k\chi_k$, такую что никакая координата никакой точки орбиты не равна нулю. Такие орбиты параметризуются наборами ненулевых значений алгебраически независимых мономов Лорана от координатных функций на пространстве W, порождающих решетку всех мономов Лорана, инвариантных под действием тора.

В частности, если представление V неприводимо и на нем действует группа GL_n (этот случай встретится нам в дальнейшем), то имеем одномерный тор, транзитивно действующий на ненулевых векторах одномерного пространства. Нетривиальных инвариантных мономов Лорана нет, и умножения с точностью до действия группы GL_n параметризуются просто классами изоморфизма коммутативных ассоциативных алгебр с нильпотентными операторами умножения.

Пример 1. *Пример умножения, структурные константы которого нельзя умножить на любой ненулевой скаляр действием группы SL_n.*

Чтобы построить такой пример, построим тензор структурных констант, связная компонента GL_n-стабилизатора которого на самом деле лежит в группе SL_n. Проверим, что этого достаточно. Пусть элемент $h \in SL_n$ умножает все структурные константы на $t \in \mathbb{C} \setminus 0$. Существует также центральный элемент $g \in GL_n$, умножающий все структурные константы на t, и элемент $gh^{-1} \in GL_n$ стабилизирует тензор структурных констант. Поэтому для некоторого k элемент $(gh^{-1})^k$ лежит в связной компоненте единицы стабилизатора тензора структурных констант, то есть $(gh^{-1})^k = g^k h^{-k} \in SL_n$, поэтому $g^k \in SL_n$. Но g — центральный элемент GL_n, поэтому $g^{kn} = \mathrm{id}$, и t — корень степени kn из единицы, поэтому такое возможно только для конечного числа различных t.

Итак, достаточно построить пример коммутативной ассоциативной алгебры с нильпотентными операторами умножения, имеющей конечное число нетривиальных автоморфизмов. В качестве такой алгебры рассмотрим подалгебру (без единицы) в алгебре многочленов $\mathbb{C}[x, y]$, порожденную x и y и профакторизованную по идеалу $(x^5 + y^5 - x^3y^3, x^4y, xy^4)$. В этой алгебре выберем базис $x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^2y^3, x^3y^2, x^5, y^5$. Любой ее автоморфизм определяется образами x и y. Пусть x переходит в $ax + by +$ (члены большей суммарной степени по x и y), y переходит в $cx + dy +$ (члены большей суммарной степени по x и y). При этом матрица

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

должна быть невырождена, поскольку иначе образ автоморфизма пересекал бы пространство $\langle x, y\rangle$ не более, чем по одномерному подпространству.

Тогда x^5 переходит в $a^5x^5 + 10a^3b^2x^3y^2 + 10a^2b^3x^2y^3 + b^5y^5 + \alpha x^3y^3 = (a^5 + \alpha)x^5 + 10a^3b^2x^3y^2 + 10a^2b^3x^2y^3 + (b^5 + \alpha)y^5$, где α — некоторый скаляр, y переходит в $c^5x^5 + 10c^3d^2x^3y^2 + 10c^2d^3x^2y^3 + d^5y^5 + \beta x^3y^3 = (c^5 + \beta)x^5 + 10c^3d^2x^3y^2 + 10c^2d^3x^2y^3 + (c^5 + \beta)y^5$, где $\beta \in \mathbb{C}$, x^3y^3 переходит в $\gamma x^3y^3 = \gamma x^5 + \gamma y^5$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, и сумма этих трех элементов алгебры (они уже разложены по базису) должна быть равна нулю. Отсюда, в частности, следует, что $a^3b^2 = -c^3d^2$ и $a^2b^3 = -c^2d^3$. Если одно из чисел a и b равно нулю, то одно из чисел c и d также равно нулю, и наоборот. Допустим теперь, что среди a, b, c, d нет нулей. Тогда разделив первое равенство на второе, получаем $a/b = c/d$, откуда $ad = bc$, и матрица вырождена. Поэтому либо $a = 0$, и тогда $d = 0$, либо $b = 0$, и тогда $c = 0$. Для связной компоненты единицы в группе (линейных) автоморфизмов получаем $b = 0$, $c = 0$, из невырожденности получаем $a \neq 0$, $d \neq 0$.

Теперь при возведении образа x в пятую степень без учета соотношений в алгебре будем получать мономы степени не ниже 5, при этом единственный моном пятой степени пропорционален x^5, а мономы шестой степени делятся на x^4. Поэтому после учета соотношений x^5 переходит в a^5x^5. Аналогично, y^5 переходит в d^5y^5, а x^3y^3 переходит в $a^3d^3x^3y^3 = a^3d^3x^5 + a^3d^3y^5$. Получаем $a^5 = a^3d^3 = d^5$, откуда $a^2 = d^3$, $a^3 = d^2$, $a = d^{-1}$, $d^{-2} = d^3$, $d^5 = 1$, и для связной компоненты группы автоморфизмов имеем $a = 1$, $d = 1$. Тогда матрица автоморфизма в выбранном базисе будет нижней унитреугольной, и ее определитель равен 1.

Пример 2. *Пример умножения, структурные константы которого можно умножить на любой ненулевой скаляр действием группы SL_n.*

Такой пример построить проще. Рассмотрим алгебру с двумерным базисом x, y и умножением $x^2 = y$, $xy = y^2 = 0$. Тогда линейный оператор $x \mapsto tx$, $y \mapsto t^{-1}y$ имеет определитель 1 и умножает единственную ненулевую структурную константу на t^3.

5.1.2 $\lambda = \varpi_{l-2}$, $l > 2$

В этом случае ненулевых умножений не существует. Воспользуемся леммой 2, чтобы проверить это. Пусть $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}_{l+1}$, $V^* = \Lambda^2 W$, где W — тавтологический $\mathfrak{sl}_{l+1}$-модуль. Пусть $e_1, \dots, e_{l+1}$ — базис в пространстве W, и пусть $x_i = e_i \otimes e_{i+1}^*$, $y_i = e_{i+1} \otimes e_i^*$, $h_i = e_i \otimes e_i^* - e_{i+1} \otimes e_{i+1}^*$. Тогда в пространстве V^* имеем базис $\{e_i \wedge e_j | 1 \le i < j \le l+1\}$, и при вложении представления $R(\mathfrak{l})$ в представление $V^* \otimes V$ элемент $e_i \otimes e_j^*$ переходит в $\sum_{k \neq i,j} e_i \wedge e_k \otimes (e_j \wedge e_k)^*$.

Из [5, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_l) \oplus V(2\varpi_1) \oplus V(\varpi_3 + \varpi_l) \oplus V(\varpi_2)$, и все неприводимые слагаемые различны. Найдем старшие векторы в представлении $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$.

1. Очевидно, вектор $e_1 \wedge e_2 \otimes e_1 \otimes e_{l+1}^*$ является старшим, его вес равен $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{l+1} = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_l$. При вложении в представление $V^* \otimes V^* \otimes V$ он переходит в тензор

$$\sum_{k=2}^{l} (e_1 \wedge e_2) \otimes (e_1 \wedge e_k) \otimes (e_{l+1} \wedge e_k)^*,$$

который не принадлежит подпространству $S^2(V^*) \otimes V$, поскольку $l > 2$.

2. Вектор $v = \sum_{i=2}^{l+1} e_1 \wedge e_i \otimes e_1 \otimes e_i^*$ является старшим. Действительно, корневой вектор x_j нетривиально действует только на слагаемые с $i = j$ и $i = j+1$, и переводит их, соответственно, в $-e_1 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^*$ и $e_1 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^*$, сумма этих векторов равна нулю. Вес этого вектора равен $2\varepsilon_1 + \varepsilon_i - \varepsilon_i = 2\varpi_1$. При вложении в представление $V^* \otimes V^* \otimes V$ он переходит в тензор

$$\sum_{i=2}^{l+1} (e_1 \wedge e_i) \otimes \sum_{j \neq i, 1 < j \le l+1} (e_1 \wedge e_j) \otimes (e_i \wedge e_j)^* = \sum_{1 < i < j \le l+1} (e_1 \wedge e_i \otimes e_1 \wedge e_j - e_1 \wedge e_j \otimes e_1 \wedge e_i) \otimes (e_i \wedge e_j)^*,$$

который лежит в подпространстве $\Lambda^2(V^*) \otimes V$.

3. Вектор $v = e_1 \wedge e_3 \otimes e_2 \otimes e_{l+1}^* - e_2 \wedge e_3 \otimes e_1 \otimes e_{l+1}^* - e_1 \wedge e_2 \otimes e_3 \otimes e_{l+1}^*$ является старшим. Проверим это. Все корневые векторы x_i с $i > 2$ его очевидно аннулируют. После применения корневого вектора x_1 получаем $e_1 \wedge e_3 \otimes e_1 \otimes e_{l+1}^* - e_1 \wedge e_3 \otimes e_1 \otimes e_{l+1}^* - e_1 \wedge e_1 \otimes e_3 \otimes e_{l+1}^* = 0$, после применения корневого вектора x_2 получаем $e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \otimes e_{l+1}^* - e_2 \wedge e_2 \otimes e_1 \otimes e_{l+1}^* - e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \otimes e_{l+1}^* = 0$. Он имеет вес $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_{l+1} = \varpi_3 + \varpi_l$ относительно картановской подалгебры.

Применим соответствующее линейное отображение к вектору $e_l \wedge e_{l+1} \in V^*$. Получим $(e_1 \wedge e_3) \otimes (e_l \wedge e_2) - (e_2 \wedge e_3) \otimes (e_l \wedge e_1) - (e_1 \wedge e_2) \otimes (e_l \wedge e_3)$. Этот тензор никогда не принадлежит подпространству $S^2(V^*)$ (он принадлежит подпространству $\Lambda^2(V^*)$ при $l = 3$).

4. Рассмотрим следующий вектор и докажем, что он старший:

$$\sum_{i=3}^{l+1} (e_1 \wedge e_i \otimes e_2 \otimes e_i^* - e_2 \wedge e_i \otimes e_1 \otimes e_i^* + \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_i \otimes e_i^*) + \frac{l-1}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes (e_1 \otimes e_1^* + e_2 \otimes e_2^*).$$

Корневой вектор x_j с $j \ge 3$ нетривиально действует только на слагаемые с $i = j$ и $i = j+1$, и переводит их в

$$-e_1 \wedge e_j \otimes e_2 \otimes e_{j+1}^* + e_2 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^* - \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_j \otimes e_{j+1}^*$$

и

$$e_1 \wedge e_j \otimes e_2 \otimes e_{j+1}^* - e_2 \wedge e_j \otimes e_1 \otimes e_{j+1}^* + \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_j \otimes e_{j+1}^*$$

соответственно. Сумма этих векторов равна нулю. Корневой вектор x_2 нетривиально действует на слагаемое с $i = 3$ и на последнее слагаемое, и переводит их в

$$e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \otimes e_3^* + \frac{l-3}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \wedge e_3^*$$

и

$$-\frac{l-1}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes e_2 \otimes e_3^*$$

соответственно. Сумма этих векторов также равна нулю. Наконец, корневой вектор e_1 нетривиально действует на все слагаемые. Применяя его, получаем

$$\sum_{i=3}^{l+1}(e_1 \wedge e_i \otimes e_1 \otimes e_i^* - e_1 \wedge e_i \otimes e_1 \otimes e_i^*) + \frac{l-1}{2} e_1 \wedge e_2 \otimes (e_1 \otimes e_2^* - e_1 \otimes e_2^*) = 0.$$

Вес этого вектора относительно картановской подалгебры равен $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varpi_2$. Итак, вектор v действительно является старшим вектором неприводимого подпредставления.

Применим соответствующее линейное отображение к вектору $e_l \wedge e_{l+1}$, получим: $e_1 \wedge e_l \otimes e_2 \wedge e_{l+1} + e_1 \wedge e_{l+1} \otimes e_2 \wedge e_l - e_2 \wedge e_l \otimes e_1 \wedge e_{l+1} - e_2 \wedge e_{l+1} \otimes e_1 \wedge e_l + (l-3) e_1 \wedge e_2 \otimes e_l \wedge e_{l+1}$. Этот тензор не лежит в подпространстве $S^2(V^*)$ (и лежит в подпространстве $\Lambda^2(V^*)$, если $l = 3$).

5.1.3 $\lambda = \varpi_p$, где $2 < p \leq \lceil l/2 \rceil$

В этом случае ненулевых умножений также не существует. Воспользуемся леммой 3, чтобы проверить это. Множество весов $\mathfrak{X}(V)$ состоит из всевозможных сумм $\varepsilon_{k_1} + \ldots + \varepsilon_{k_p}$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leq l+1$. Известно, что $\lambda^* = \varpi_{l+1-p} = -\varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_{l+1}$, и из [5, таблица 5] находим, что $\mathrm{Hom}(V, R(\mathfrak{l})) \cong V(\varpi_1 + \varpi_{l+1-p} + \varpi_l) \oplus V(\varpi_1 + \varpi_{l-p}) \oplus V(\varpi_{l+2-p} + \varpi_l) \oplus V(\varpi_{l+1-p})$. Все эти веса различны, и отображение φ может быть старшим вектором любого из четырех неприводимых представлений. Рассмотрим четыре случая.

1. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{l+1-p} + \varpi_l$, тогда $\gamma = \varpi_1 + \varpi_l = \varepsilon_1 + \varepsilon_{l+1}$, и можно взять $\nu = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p + \varepsilon_{l+1}$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p - \varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_l + 1 \notin \Phi^+$.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_{l+2-p} + \varpi_l$, тогда $\gamma = \varpi_{l+2-p} - \varpi_{l+1-p} + \varpi_l = \varepsilon_{l+2-p} - \varepsilon_{l+1}$. Пусть $\nu = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+1}$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+2-p}$. Поскольку $2p \leq l+1 < l+3$, то $p-1 < l+2-p$, и $\nu + \gamma \in \mathfrak{X}(V)$. С другой стороны, $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+2-p} - \varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_{l+1} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_{l+3-p} - \ldots - \varepsilon_{l+1}$, и этот вектор не является корнем, поскольку $p > 2$.

3. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{l-p}$, $\gamma = \varpi_1 + \varpi_{l-p} - \varpi_{l+1-p} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1-p}$. В этом случае пусть $\nu = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+1-p} + \varepsilon_{l+1}$, этот вектор является весом, поскольку $2p-1 < l+1$. Получим $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{l+1} \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varpi_1 + \ldots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_{l+2-p} - \ldots - \varepsilon_l \notin \Phi^+$, поскольку $p > 2$.

4. $\lambda^* + \gamma = \varpi_{l+1-p}$, тогда $\gamma = 0 \notin \Phi^+$.

5.2 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа B_l и D_l

Двойственная система к системе корней B_l имеет тип C_l, ее максимальный короткий корень равен $\alpha_1 + 2(\alpha_2 + \ldots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$, где α_i — простые корни системы C_l. Из леммы 4 следует, что нужно рассмотреть случаи неприводимых представлений со старшим весом $\lambda = \varpi_1$ и $\lambda = \varpi_l$. Алгебры типа B_2 и C_2 изоморфны, и при этом изоморфизме представления алгебры типа B_2 со старшим весом ϖ_1 и ϖ_2 соответствует представлениям алгебры типа C_2 со старшим весом ϖ_2 и ϖ_1 соответственно. Мы рассмотрим представление алгебры типа B_2 со старшим весом ϖ_2 позже, как представление алгебры типа C_2 со старшим весом ϖ_1.

Система корней D_l ($l \geq 4$) двойственна сама себе и состоит из корней одинаковой длины, максимальный корень выражается через простые как $\alpha_1 + 2(\alpha_2 + \ldots + \alpha_{l-2}) + \alpha_{l-1} + \alpha_l$. По лемме 4 нужно рассматривать неприводимые представления со старшими весами ϖ_1, ϖ_{l-1} и ϖ_l. Но представления со старшими весами ϖ_{l-1} и ϖ_l сопряжены внешним автоморфизмом, поэтому достаточно рассмотреть только одно из представлений со старшими весами ϖ_{l-1} и ϖ_l. Мы будем рассматривать только представление со старшим весом ϖ_l.

Для рассмотрения представлений со старшим весом ϖ_l нам потребуется явный вид систем корней и весов. Рассмотрим евклидово пространство с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$. Под координатами векторов этого пространства всегда будут пониматься координаты в этом базисе. Система корней типа D_l состоит из векторов вида $\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j, -\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i \neq j$, а множество ее положительных корней состоит из векторов $\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i < j$. Система корней B_l состоит из всех корней системы D_l и еще векторов $\pm\varepsilon_i$, множество ее положительных корней состоит из всех положительных корней системы D_l и еще векторов ε_i. Фундаментальный вес ϖ_l в обоих случаях равен $(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_l)/2$, $\varpi_1=\varepsilon_1$, вес ϖ_2 в обоих случаях является старшим весом присоединенного представления и равен $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

5.2.1 $\lambda=\varpi_1$

Представление со старшим весом ϖ_1 построим следующим образом. Пусть V — линейное пространство размерности $2l+1$ в случае B_l и размерности $2l$ в случае D_l, ω — билинейная невырожденная симметрическая форма на пространстве V. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{l}$ в любом случае состоит из линейных операторов $V\to V$, кососимметричных относительно ω.

Докажем, что нетривиальных умножений не существует. Допустим противное, и пусть $c\in V^*\otimes V^*\otimes V$ — тензор структурных констант такого умножения, который будем рассматривать как билинейную симметричную функцию на пространстве V со значениями в пространстве V. С помощью формы ω канонически получаем трилинейную форму c', соответствующую этому умножению, $c'(u,v,w)=\omega(c(u,v),w)$.

Условие принадлежности операторов умножения алгебре Ли означает, что если у билинейной функции c зафиксировать первый аргумент, то полученный оператор будет кососимметричным. Получим условие на форму c'. Для любого вектора $u\in V$ имеем $c'(u,v,w)=\omega(c(u,v),w)=-\omega(v,c(u,w))=-\omega(c(u,w),v)=-c'(u,w,v)$, то есть форма c' кососимметрична по последним двум аргументам. Кроме того, $c'(u,v,w)=\omega(c(u,v),w)=\omega(c(v,u),w)=c'(v,u,w)$, то есть форма c' симметрична по первым двум аргументам.

Следовательно, $c'(u,v,w)=-c'(u,w,v)=-c'(w,u,v)=c'(w,v,u)=c'(v,w,u)=-c'(v,u,w)=-c'(u,v,w)$, то есть $c'(u,v,w)=-c'(u,v,w)$, откуда $c'=0$ и $c=0$.

5.2.2 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа B_l, $\lambda=\varpi_l$

В этом случае ненулевых умножений нет, докажем это, используя лемму 3. Орбита веса ϖ_l под действием группы Вейля состоит из всех векторов пространства $\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l\rangle$, у которых все координаты равны $\pm1/2$, и это все веса представления $V=V(\varpi_l)$. Схема Дынкина B_l не имеет нетривиальных автоморфизмов, и $\lambda^*=\lambda$. Из [5, таблица 5] находим, что $\mathrm{Hom}(V,R(\mathfrak{l}))\cong V(\varpi_2+\varpi_l)\oplus V(\varpi_1+\varpi_l)\oplus V(\varpi_l)$. Рассмотрим три случая.

1. $\lambda^*+\gamma=\varpi_2+\varpi_l$, $\gamma=\varpi_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Можно взять $\nu=(-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_l)/2$, тогда $\nu+\gamma=(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_l)/2\in\mathfrak{X}(V)$, а $\nu+\gamma+\lambda^*=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_l\notin\Phi^+$.

2. $\lambda^*+\gamma=\varpi_1+\varpi_l$, $\gamma=\varpi_1=\varepsilon_1$. В этом случае пусть $\nu=(-\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_l)/2$, тогда $\nu+\gamma=(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_l)/2\in\mathfrak{X}(V)$, а $\nu+\gamma+\lambda^*=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_l\notin\Phi^+$.

3. $\lambda^*+\gamma=\varpi_l$, тогда $\gamma=0\notin\Phi^+$.

5.2.3 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа D_l, $\lambda=\varpi_l$, $l\geq 4$

Если $l=4$, то представления со старшими весами ϖ_l и ϖ_1 сопряжены внешним автоморфизмом, поэтому достаточно рассмотреть только случай $l\geq 5$. Снова воспользуемся леммой 3. Орбита веса ϖ_l под действием группы Вейля состоит из всех векторов в пространстве $\langle\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l\rangle$, у которых все координаты равны $\pm1/2$, причем число координат, равных $-1/2$, четно. Это все веса представления $V=V(\varpi_l)$.

Известно, что $\lambda^*=\varpi_l$, если l четно, и $\lambda^*=\varpi_{l-1}$ иначе. Нам потребуется выражение для веса ϖ_{l-1}, он равен $(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l)/2$. Также обозначим через μ тот из весов ϖ_{l-1} и ϖ_l, который не равен λ^*. Из [5, таблица 5] находим, что $\mathrm{Hom}(V,R(\mathfrak{l}))\cong V(\varpi_2+\lambda^*)\oplus V(\varpi_1+\mu)\oplus V(\lambda^*)$. Рассмотрение случаев $\lambda^*+\gamma=\varpi_2+\lambda^*$ и $\lambda^*+\gamma=\lambda^*$ дословно повторяет рассмотрение таких же случаев для системы корней B_l, случай $\lambda^*+\gamma=\varpi_1+\mu$ рассмотрим отдельно.

В этом случае $\gamma=\varpi_1+(-1)^l(\varpi_{l-1}-\varpi_l)=\varepsilon_1+(-1)^l\varepsilon_l$. Пусть $\nu=(-\varepsilon_1-(-1)^l\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{l-1}+(-1)^l\varepsilon_l)/2$, тогда $\nu+\gamma=(\varepsilon_1-(-1)^l\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{l-1}-(-1)^l\varepsilon_l)/2\in\mathfrak{X}(V)$, а вектор $\nu+\gamma+\lambda^*$ равен либо $\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\ldots+\varepsilon_{l-1}$ (при четном l и $\lambda^*=\varpi_l$), либо $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{l-1}$ (при нечетном l и $\lambda^*=\varpi_{l-1}$), и не является корнем, поскольку $l\geq 5$.

5.3 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа C_l

Рассмотрим евклидово пространство с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$. Тогда векторы $\varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j, -\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i \neq j$, и $\pm 2\varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq l)$ образуют систему корней типа C_l. Множество положительных корней Φ^+ состоит из векторов $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(1 \leq i < j \leq l)$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(1 \leq i, j \leq l)$. Двойственная система корней имеет тип B_l, и ее максимальный короткий корень равен $\alpha_1 + \ldots + \alpha_l$, где α_i — простые корни системы B_l. По лемме 4 нужно рассмотреть представления со старшим весом $\lambda = \varpi_i$, где $1 \leq i \leq l$. При этом можно не рассматривать случай $l = 2$, $\lambda = \varpi_2$, поскольку он уже был рассмотрен нами как случай алгебры $\mathfrak{l}$ типа B_2 и ее первого фундаментального представления. Фундаментальные веса выражаются следующим образом: $\varpi_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$.

Пусть W — линейное пространство с базисом, который обозначим $e_1, \ldots, e_l, e_{-1}, \ldots, e_{-l}$, $\omega = \sum (e_i^* \otimes e_{-i}^* - e_{-i}^* \otimes e_i^*)$ — билинейная форма на пространстве W. Тогда в пространстве W можно ввести структуру представления $V(\varpi_1)$, в котором все элементы алгебры $\mathfrak{l} = \mathfrak{sp}_{2l}$ действуют операторами, кососимметрическими относительно формы ω. Все такие операторы, диагональные в базисе $e_{\pm i}$, образуют картановскую подалгебру, и операторы $x_i = e_i \otimes e_{i+1}^* - e_{-(i+1)} \otimes e_{-i}^*$, $1 \leq i \leq l-1$, $x_l = e_l \otimes e_{-l}^*$, порождают максимальную унипотентную подалгебру в алгебре $\mathfrak{l}$ как алгебру Ли.

5.3.1 $\lambda = \varpi_1$

В этом случае оказывается, что *нулевые умножения на пространстве $V = W$ существуют.* С помощью формы ω пространства $V^* \otimes V^* \otimes V$ и $V^* \otimes V^* \otimes V^*$ можно канонически отождествить, и тензоры структурных констант всевозможных умножений находятся во взаимно-однозначном соответствии с трилинейными формами на пространстве V. Пусть $c \in V^* \otimes V^* \otimes V$ — тензор структурных констант (который будем рассматривать как билинейное отображение умножения $V \times V \to V$) и $c' \in V^* \otimes V^* \otimes V^*$ — соответствующая трилинейная форма, $c'(u, v, w) = \omega(c(u, v), w)$. Переформулируем условия, которые мы накладываем на умножение, в терминах трилинейной формы.

Коммутативность. Если $c(u, v) = c(v, u)$, то $c'(u, v, w) = \omega(c(u, v), w) = \omega(c(v, u), w) = c'(v, u, w)$, то есть форма c' симметрична по первым двум аргументам. Обратно, если $c'(u, v, w) = c'(v, u, w)$ для всех u, v, w, то из невырожденности формы ω получаем, что $c(u, v) = c(v, u)$.

Операторы умножения являются операторами действия элементов алгебры $\mathfrak{l}$. В терминах умножения это означает, что $\omega(uv, w) = -\omega(v, uw)$, то есть (воспользуемся кососимметричностью формы ω) $\omega(c(u, v), w) = -\omega(v, c(u, w)) = \omega(c(u, w), v)$, или, в терминах формы c', $c'(u, v, w) = c'(u, w, v)$. Итак, операторы умножения являются операторами действия элементов алгебры $\mathfrak{l}$ тогда и только тогда, когда форма c' симметрична по последним двум аргументам.

Далее будем рассматривать только формы c', симметричные по всем трем аргументам. Еще нужно проверять, что умножения, которые они задают, ассоциативны и что все операторы умножения нильпотентны.

Если умножение коммутативно и ассоциативно, то для любых трех векторов $u, v, w \in V$ имеем $u(vw) = v(uw)$, откуда для любого вектора $z \in V$ выполнено $\omega(u(vw), z) = \omega(v(uw), z)$. С другой стороны, если умножение коммутативно, ассоциативно и операторы умножения кососимметричны относительно формы ω, то $\omega(u(vw), z) = -\omega(vw, uz) = \omega(v, w(uz)) = \omega(v, (wu)z)) = -\omega(v(uw), z)$, следовательно $uvw = 0$. Итак, если умножение коммутативно и ассоциативно и операторы умножения симметричны относительно формы ω, то произведение любых трех векторов равно нулю. Обратно, если умножение коммутативно и любое произведение вида $u(vw)$ равно нулю, то любое произведение трех векторов в любом порядке равно нулю и умножение ассоциативно. В этом случае все операторы умножения автоматически нильпотентны.

Пусть X — линейная оболочка всех попарных произведений векторов. Заметим, что $\omega(uv, wz) = -\omega(uvw, z) = 0$, поэтому подпространство X изотропно. Кроме того, если $\omega(v, X) = 0$ для некоторого вектора $v \in V$, то для любых векторов $u, w \in V$ выполнено $\omega(uv, w) = -\omega(v, uw) = 0$, поэтому $uv = 0$. Другими словами, оператор умножения на любой вектор из ω-ортогонального дополнения к подпространству X, которое обозначим Y, равен нулю. В терминах c' это означает, что для любых векторов $v \in Y$, $u, w \in V$ выполнено $c'(u, v, w) = \omega(c(u, v), w) = 0$, то есть $c'(Y, V, V) = 0$. Обратно, если c' — трилинейная симметрическая форма на пространстве V, а Y' — коизотропное подпространство, для которого $c'(Y', V, V) = 0$, то $c(u, v) = 0$ для всех векторов $u \in Y'$, $v \in V$, то есть операторы умножения на векторы из подпространства Y' нулевые. Далее, из симметрии формы c' следует, что для любых $u, v \in V$, $w \in Y'$ выполнено $0 = c'(u, v, w) = \omega(c(u, v), w)$, то есть все попарные произведения принадлежат ω-ортогональному дополнению к подпространству Y', которое обозначим X'. По выбору Y', $\omega(X', X') = 0$. Поэтому для любых векторов $u, v, w, z \in V$ $\omega(u(vw), z) = -\omega(vw, uz) = 0$ (мы знаем, что из симметрии формы c' относительно любых перестановок индексов следует, что все операторы умножения кососимметричны относительно формы ω). Следовательно, $u(vw) = 0$ для всех $u, v, w \in V$.

Итак, умножения на пространстве V, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, параметризуются трилинейными симметричными по всем перестановкам индексов формами c', для которых существует такое коизотропное пространство $Y \subseteq V$, что $c'(Y, V, V) = 0$.

Действием группы Sp_{2l} можно добиться того, чтобы коизотропное пространство Y содержало фиксированное лагранжево подпространство $Z = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l \rangle$, и все подпространства в пространства V, содержащие подпространство Z, автоматически коизотропны. Поэтому умножения с точностью до действия группы Sp_{2l} параметризуются симметрическими трилинейными формами на пространстве V, обращающимися в нуль, если один из аргументов лежит в подпространстве Z, с точностью до действия подгруппы в Sp_{2l}, сохраняющей подпространство Z, то есть параболической подгруппы в Sp_{2l}, которую мы ранее обозначили через P_l. Симметрические трилинейные формы c' на пространстве V, для которых $c'(Z, V, V) = 0$, канонически определяются симметрическими трилинейными формами на факторпространстве V/Z. Если элемент $g \in Sp_{2l}$ лежит в унипотентном радикале группы P_l, то он действует тождественно на пространстве Z и на факторпространстве V/Z, поэтому для любых векторов $u, v, w \in V$ $(gc')(u, v, w) = c'(g^{-1}u, g^{-1}v, g^{-1}w) = c'(u + u', v + v', w + w')$, где $u', v', w' \in Z$, значит $(gc')(u, v, w) = c'(u, v, w)$. Следовательно, умножения на пространстве V, согласованные с действием алгебры $\mathfrak{l}$, с точностью до действия группы Sp_{2l} параметризуются симметрическими трилинейными формами на факторпространстве V/Z с точностью до действия подгруппы Леви в группе P_l, которая равна $GL(V/Z)$. В частности, это действие позволяет умножить форму, а значит и все структурные константы умножения, на любой ненулевой скаляр, и действие центрального тора в группе L не влияет на ответ.

5.3.2 $\lambda = \varpi_p$, $l \geq 3$

Ненулевых умножений не существует, воспользуемся леммой 3, чтобы доказать это. Схема Дынкина C_l не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому $\lambda^* = \lambda$. Из [5, таблица 5] находим, что $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(2\varpi_1 + \varpi_p) \oplus V(\varpi_1 + \varpi_{p-1}) \oplus V(\varpi_p) \oplus V(\varpi_1 + \varpi_{p+1})$, последнее слагаемое имеется только если $p < l$. Все неприводимые слагаемые различны, рассмотрим четыре случая. Найдем старшие векторы в представлении $V^* \otimes R(\mathfrak{l})$.

1. $\lambda^* + \gamma = 2\varpi_1 + \varpi_p$, тогда $\gamma = 2\varpi_1 = 2\varepsilon_1$. Можно взять $\nu = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$, и тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = 2(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p) \notin \Phi^+$.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{p-1}$, $\gamma = \varpi_1 + \varpi_{p-1} - \varpi_p = \varepsilon_1 - \varepsilon_p$. Случаи $p > 2$ и $p = 2$ нужно рассмотреть отдельно. Если $p > 2$, то пусть $\nu = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$. В этом случае получим $\nu + \gamma = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1} \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + 2(\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p-1}) + \varepsilon_p \notin \Phi^+$. Если $p = 2$, то по нашему предположению $l > 2$, и можно взять $\nu = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Получим $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \in \mathfrak{X}(V)$, $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \notin \Phi^+$.

3. $\lambda^* + \gamma = \varpi_1 + \varpi_{p+1}$, где $p < l$. В этом случае $\gamma = \varpi_1 + \varpi_{p+1} - \varpi_p = \varepsilon_1 + \varepsilon_{p+1}$. Пусть $\nu = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{p+1} \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 + 2(\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p) + \varepsilon_{p+1} \notin \Phi^+$.

4. $\lambda^* + \gamma = \varpi_p$, тогда $\gamma = 0 \notin \Phi^+$.

5.4 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа E_6

В системе корней типа E_6 все корни имеют одинаковую длину, и максимальный корень выражается через простые корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ следующим образом: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$. Достаточно рассмотреть представление $V(\varpi_1)$, поскольку представление $V(\varpi_6)$ сопряжено с ним при помощи внешнего автоморфизма.

Для построения системы корней и весов алгебры $\mathfrak{l}$ воспользуемся методом моделей, возникающих из градуировок [6, Глава 5, §2]. Расширенная система простых корней алгебры $\mathfrak{l}$ состоит из корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ и минимального корня, который имеет нулевые скалярные произведения со всеми корнями α_i, кроме корня α_2. Построим $\mathbb{Z}_2$-градуировку алгебры $\mathfrak{l}$, соответствующую внутреннему автоморфизму и имеющую отметку 1 при корне α_2. Нулевая градуированная компонента равна $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$, первая градуированная компонента как представление нулевой равна $V_{\mathfrak{sl}_6}(\varpi_3) \otimes V_{\mathfrak{sl}_2}(\varpi_1) = \Lambda^3(\mathbb{C}^6) \otimes \mathbb{C}^2$.

Теперь мы можем описать систему корней E_6. Рассмотрим евклидово пространство с ортогональным базисом $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_6\}$ и его фактор по прямой $\langle \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_6 \rangle$. Этот фактор будем обозначать через $\mathbf{E}$, его элементы будем записывать в виде сумм ε_i, считая, что $\sum \varepsilon_i = 0$. Скалярные квадраты векторов ε_i до факторизации равны $1/2$. Для вычислений скалярных произведений в факторпространстве $\mathbf{E}$ будем брать самые короткие представители смежных классов. Таким образом, скалярный квадрат класса вектора ε_i в факторпространстве $\mathbf{E}$ равен $5/12$, скалярное произведение классов двух различных векторов равно $-1/12$. Рассмотрим также одномерное пространство с ортонормированным базисом $\{\zeta_1\}$. Система корней E_6 тогда реализуется как множество векторов в пространстве $\mathbf{E} \oplus \langle \zeta_1 \rangle$ вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$, $\pm\zeta_1$ и $-\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k \pm \zeta_1/2$, где i, j, k различны. Мы не будем пока записывать, как в этих обозначениях выглядят корни α_i, позже мы выберем другую систему простых корней в системе E_6, более удобную для вычислений.

Чтобы описать систему весов, рассмотрим систему корней E_7. Скалярные произведения максимального корня системы E_7, который равен $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$, с простыми корнями равны нулю, кроме произведения максимального корня с корнем α_1. Поэтому представление подалгебры $\mathfrak{l}$ типа E_6 в алгебре $\mathfrak{g}$ типа E_7 на унипотентном радикале $\mathfrak{u}$ подалгебры $\mathfrak{p}_7$ в алгебре $\mathfrak{g}$ имеет старший вес ϖ_1. Поскольку число положительных корней системы E_7, не входящих в систему E_6, равно $\dim \mathfrak{u} = 27$ и размерность первого фундаментального представления группы типа E_6 также равна 27, то пространство $\mathfrak{u}$ как представление алгебры $\mathfrak{l}$ неприводимо и имеет старший вес ϖ_1. Поэтому скалярные произведения весов представления $V(\varpi_1)$ с корнями системы E_6 равны скалярным произведениям корней системы E_7, в разложение которых на простые корни коэффициент при кроне α_7 равен 1, и корней системы E_7, в разложение которых на простые корни коэффициент при корне α_7 равен 0.

Теперь найдем числовые отметки старших весов неприводимых подпредставлений представления $V = \mathfrak{u}$ как представления нулевой градуированной компоненты алгебры $\mathfrak{l}$ (которая равна $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$) на простых корнях этой алгебры. Эти простые корни равны простым корням системы E_6, кроме корня α_2, и минимальному корню системы E_6. Найдем сначала такие веса из множества $\mathfrak{X}(V)$, к которым нельзя прибавить ни один из перечисленных простых корней, оставаясь в множестве $\mathfrak{X}(V)$, они заведомо будут старшими весами. Они равны (в терминах системы E_7): $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$ и $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$. Числовые отметки корня β_1 на указанных простых корнях алгебры $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$ равны нулю, кроме отметок на корне α_1, которая равна 1, и на минимальном корне системы E_6, которая равна 1. Поэтому соответствующее подпредставление алгебры $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$ в пространстве V равно $\mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^2$. Числовые отметки корня β_2 на указанных простых корнях равны нулю, кроме отметки на корне α_5, которая равна 1. Соответствующее подпредставление в представлении V равно $\Lambda^2(\mathbb{C}^6)^* \otimes \mathbb{C}^2$. Сумма размерностей этих представлений алгебры $\mathfrak{sl}_6 \oplus \mathfrak{sl}_2$ равна $27 = \dim V$, поэтому других неприводимых подпредставлений нет. Итак, множество весов представления V состоит из векторов в пространстве $\mathbf{E} \oplus \langle \zeta \rangle$ вида $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ и $\varepsilon_i \pm \zeta_1/2$.

Выберем систему простых корней в системе E_6. В качестве множества положительных корней можно выбрать корни $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i < j)$, ζ_1 и $-\varepsilon_i - \varepsilon_j - \varepsilon_k + \zeta_1/2$, где i, j, k различны. Легко видеть, что квадрат каждого из этих векторов в пространстве $\mathbf{E} \oplus \langle \zeta_1 \rangle$ равен 1. При этом простые корни запишутся следующим образом: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -\varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 + \zeta_1/2$, $\alpha_i = \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i$ при $3 \leq i \leq 6$. Максимальный корень равен ζ_1. При таком выборе системы положительных корней старшим весом представления V является вес $\varepsilon_1 + \zeta_1/2$, поскольку к нему нельзя прибавить никакой положительный корень, оставаясь в системе весов. Младшим весом является вес $\varepsilon_6 - \zeta_1/2$, поэтому $\lambda^* = -\varepsilon_6 + \zeta_1/2$.

Теперь применим лемму 3 и докажем, что ненулевых умножений нет. Известно, что $\lambda^* = \varpi_6$, и из [5, таблица 5] находим, что $R(\mathfrak{l}) = V(\varpi_2)$, $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_2 + \varpi_6) \oplus V(\varpi_3) \oplus V(\varpi_6)$. Рассмотрим три случая.

1. $\lambda^* + \gamma = \varpi_2 + \varpi_6$, тогда $\gamma = \varpi_2 = \zeta_1$ (мы знаем, что модуль $V(\varpi_2)$ изоморфен присоединенному, а его старший вес равен максимальному положительному корню). Можно взять $\nu = \varepsilon_1 - \zeta_1/2$,

тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \zeta_1/2$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 - \varepsilon_6 + \zeta_1 \notin \Phi^+$.

2. $\lambda^* + \gamma = \varpi_3$, вычислением проверяется, что $\varpi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \zeta_1$, поскольку этот вектор имеет требуемые скалярные произведения с простыми корнями системы E_6. Тогда $\gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_6 + \zeta_1/2$. Пусть $\nu = -\varepsilon_2 - \varepsilon_6$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \zeta_1/2 \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = \varepsilon_1 - \varepsilon_6 + \zeta_1 \notin \Phi^+$.

3. $\lambda^* + \gamma = \varpi_6$, тогда $\gamma = 0 \notin \Phi^+$.

5.5 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа E_7

Все корни из системы E_7 имеют одинаковую длину, и максимальный корень равен $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$, где α_i — простые корни. Нужно рассмотреть представление $V(\varpi_7)$.

Для построения системы корней алгебры $\mathfrak{l}$ снова воспользуемся методом моделей, возникающих из градуировок. Минимальный корень имеет нулевые произведения со всеми простыми корнями, кроме корня α_1. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуировку, соответствующую внутреннему автоморфизму и отметке 1 при корне α_2. Нулевая градуированная компонента равна $\mathfrak{sl}_8$, а первая градуированная компонента как представление нулевой равна $\Lambda^4\mathbb{C}^8$.

Для описания системы корней E_7 рассмотрим евклидово пространство с ортонормированным базисом $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8\}$, его фактор по прямой $\langle \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_8 \rangle$ обозначим через $\mathbf{E}$. Будем обозначать элементы фактора так же, как любой элемент соответствующего класса эквивалентности в $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8\}$. Тогда система корней E_7 состоит из векторов в пространстве $\mathbf{E}$ вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon_l$ $(i, j, k, l$ попарно различны). Мы не будем записывать в этих терминах исходные корни α_i, скажем только, что систему простых корней алгебры $\mathfrak{sl}_8$ составляют корни $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ и минимальный корень системы E_7. Впоследствии мы выберем другие системы простых корней в системах A_7 и E_7, более удобные для дальнейших рассуждений.

Для нахождения системы весов воспользуемся вложением систем корней $E_7 \subset E_8$ и соответствующим вложением алгебр Ли. Максимальный корень системы E_8 равен $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$, и это единственный корень, имеющий коэффициент 2 при простом корне α_8. Пусть V — линейная оболочка всех корневых векторов в алгебре $\mathfrak{g}$ типа E_8, соответствующих корням, имеющим коэффициент 1 при корне α_8. Тогда подалгебра $\mathfrak{l}$ типа E_7 сохраняет пространство V. Корневой вектор, соответствующий корню $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + \alpha_8$, является старшим для $\mathfrak{l}$, и он имеет нулевое скалярное произведение со всеми простыми корнями системы E_7, кроме корня α_7. Размерность пространства V равна количеству корней в системе E_8, имеющих коэффициент 1 при α_7, т. е. 56, $\mathfrak{l}$-модуль $V(\varpi_7)$ имеет такую же размерность, значит пространство V неприводимо как представление алгебры $\mathfrak{l}$ и имеет старший вес ϖ_7.

Теперь найдем старшие веса представления V как представления алгебры $\mathfrak{sl}_8 \subset \mathfrak{l}$. Будем искать их как корни системы E_8, имеющие коэффициент 1 при простом корне α_8, и такие, что если к ним прибавить простые корни $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ или минимальный корень системы E_7, то полученный вектор уже не будет корнем. Этому условию удовлетворяют корни $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8$ и $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8$. Корень β_1 имеет нулевые скалярные произведения со всеми простыми корнями алгебры $\mathfrak{sl}_8$, кроме корня α_6, а корень β_2 имеет нулевые скалярные произведения со всеми простыми корнями алгебры $\mathfrak{sl}_8$, кроме корня α_1. Числовые отметки корня β_1 на простом корне α_6 и корня β_2 на простом корне α_1 равны 1, поэтому соответствующие неприводимые $\mathfrak{sl}_8$-подпредставления в представлении V изоморфны представлениям $\Lambda^2\mathbb{C}^8$ и $(\Lambda^2\mathbb{C}^8)^*$. Сумма их размерностей равна $56 = \dim V$, поэтому других неприводимых $\mathfrak{sl}_8$-подпредставлений в представлении V нет. В терминах векторов ε_i множество весов $\mathfrak{X}(V)$ состоит из всех векторов вида $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ и $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$.

Теперь выберем систему простых корней в системе E_7. Пусть множество положительных корней в системе E_7 определяется положительностью линейной функции $728\delta_1 - 101\delta_2 - 102\delta_3 - \ldots - 107\delta_8$, где базис $\{\delta_i\}$ двойственен к базису $\{\varepsilon_i\}$. Эта функция корректно определена на факторпространстве $\mathbf{E}$. Положительными корнями системы E_7 тогда являются корни вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i < j$, и $\varepsilon_1 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k$, где $i < j < k$. Простыми корнями являются (при выбранном нами порядке) корни $\varepsilon_7 - \varepsilon_8$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8$, $\varepsilon_6 - \varepsilon_7, \ldots, \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. В этих обозначениях легко выписать некоторые фундаментальные веса системы E_7, которые нам будут нужны. Именно, $\varpi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_8$, $\varpi_2 = 2\varepsilon_1$, $\varpi_7 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (старший вес представления V).

Воспользуемся леммой 3 и докажем, что ненулевых умножений не существует. Схема Дынкина E_7 не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому $\lambda^* = \lambda = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Из [5, таблица 5] находим, что $R(\mathfrak{l}) = V(\varpi_1)$, $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1 + \varpi_7) \oplus V(\varpi_2) \oplus V(\varpi_7)$. Рассмотрим три случая.

1. $\gamma + \lambda^* = \varpi_1 + \varpi_7$, $\gamma = \varpi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_8$. Можно взять $\nu = \varepsilon_7 + \varepsilon_8$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_7 \in \mathfrak{X}(V)$, а $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_7 \notin \Phi^+$.

2. $\gamma + \lambda^* = \varpi_2$, тогда $\gamma = \varpi_2 - \varpi_7 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Пусть $\nu = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \in \mathfrak{X}(V)$. С другой стороны, $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \notin \Phi^+$.

3. $\gamma + \lambda^* = \varpi_7$, тогда $\gamma = 0 \notin \Phi^+$.

5.6 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа E_8

Все корни в системе E_8 имеют одинаковую длину, и максимальный корень выражается через простые следующим образом: $\alpha = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$. Коэффициенты перед всеми простыми корнями больше 1, поэтому на любом $\mathfrak{l}$-модуле умножение обязательно нулевое.

5.7 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа F_4

Система корней F_4 двойственна сама себе, при этом простые корни двойственной системы соответствуют простым корням исходной системы, но в другом порядке: чтобы матрица Картана была такой же, как и у исходной системы, простые корни двойственной системы, соответствующие $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, нужно обозначить $\beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1$ соответственно. Максимальный короткий корень двойственной системы равен $\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 2\beta_4$. Поэтому нужно рассмотреть представление со старшим весом $\lambda = \varpi_4$.

Воспользуемся явной конструкцией для системы корней F_4 из [7, §12]. Именно, рассмотрим евклидово пространство с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$. Тогда систему корней образуют векторы $\pm\varepsilon_i$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i \neq j)$, $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$, а также все векторы, у которых все координаты равны $\pm 1/2$. Множество простых корней состоит из корней $\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\alpha_3 = \varepsilon_4$, $\alpha_4 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)/2$, множество положительных корней состоит из всех векторов вида ε_i, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$, $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)/2$, где знаки можно выбирать независимо. Далее можно проверить, что $\varpi_4 = \varepsilon_1$, поэтому множество весов представления $V = V(\varpi_4)$ состоит из всех коротких корней и нуля. Старший вес равен ε_1. Также нам потребуется явное выражение для веса ϖ_3, он равен $(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$.

Ненулевых умножений не существует, будем доказывать это, используя лемму 3. Известно, что $\lambda^* = \lambda$, из [5, таблица 5] находим, что $R(\mathfrak{l}) = V(\varpi_1)$, $V^* \otimes R(\mathfrak{l}) \cong V(\varpi_1 + \varpi_4) \oplus V(\varpi_3) \oplus V(\varpi_4)$. Рассмотрим три случая.

1. $\gamma + \lambda^* = \varpi_1 + \varpi_4$, $\gamma = \varpi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (максимальный корень). В этом случае пусть $\nu = -\varepsilon_2$, тогда $\nu + \gamma = \varepsilon_1 \in \mathfrak{X}(V)$, $\nu + \gamma + \lambda^* = 2\varepsilon_1 \notin \Phi^+$.

2. $\gamma + \lambda^* = \varpi_3$, тогда $\gamma = \varpi_3 - \varpi_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2$. Можно взять $\nu = 0$, получим $\nu + \gamma = \gamma = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2 \in \mathfrak{X}(V)$, $\nu + \gamma + \lambda^* = \varpi_3 = (3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)/2 \notin \Phi^+$.

3. $\gamma + \lambda^* = \varpi_4$, $\gamma = 0 \notin \Phi^+$.

5.7.1 Алгебра $\mathfrak{l}$ типа G_2

Система корней G_2 двойственна сама себе, но ситуация с ней аналогична ситуацией с системой F_4: чтобы матрица Картана для двойственной системы была такой же, как для исходной, нужно обозначить простые корни двойственной системы, соответствующие корням исходной системы α_1 и α_2, через β_2 и β_1 соответственно. Максимальный короткий корень равен $2\beta_1 + \beta_2$, поэтому достаточно рассмотреть представление со старшим весом $\lambda = \varpi_1$.

Известно, что система корней G_2 состоит из всех корней системы A_2 и попарных сумм корней системы A_2, угол между которыми равен $\pi/3$. Для построения системы корней A_2 воспользуемся стандартным способом, а именно рассмотрим евклидово пространство с ортонормированным базисом $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ и профакторизуем его по прямой $\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rangle$. Тогда система A_2 состоит из корней вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i \neq j$, а остальные корни системы G_2 получаются из любого одного применением группы Вейля для системы G_2 и умножением на -1. Один из них равен $\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_1-\varepsilon_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3=-3\varepsilon_3$ (здесь использовано, что $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$), а остальные корни равны $\pm 3\varepsilon_i$.

В качестве системы положительных корней можно выбрать $\varepsilon_i-\varepsilon_j$, $i<j$, $3\varepsilon_1$, $3\varepsilon_2$, $-3\varepsilon_3$, простые корни $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\alpha_2=3\varepsilon_2$, $\varpi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3$, поэтому множество весов представления $V=V(\varpi_1)$ состоит из всех коротких корней системы G_2 и нуля.

Будем пользоваться леммой 3. Схема Дынкина G_2 не имеет нетривиальных автоморфизмов, поэтому $\lambda^*=\lambda$. Из [5, таблица 5] находим, что $R(\mathfrak{l})=V(\varpi_2)$, $V^*\otimes R(\mathfrak{l})\cong V(\varpi_1+\varpi_2)\oplus V(2\varpi_1)\oplus V(\varpi_1)$. Рассмотрим три случая.

1. $\gamma+\lambda^*=\varpi_1+\varpi_2$, $\gamma=\varpi_2=-3\varepsilon_3$. Пусть $\nu=\varepsilon_3-\varepsilon_2$, тогда $\nu+\gamma=-2\varepsilon_3-\varepsilon_2=\varepsilon_1-\varepsilon_3\in\mathfrak{X}(V)$, $\nu+\gamma+\lambda^*=2\lambda^*\notin\Phi^+$.

2. $\gamma+\lambda^*=2\varpi_1$, $\gamma=\varpi_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3$. Пусть $\nu=0$, тогда $\nu+\gamma=\varepsilon_1-\varepsilon_3\in\mathfrak{X}(V)$, $\nu+\gamma+\lambda^*=2\lambda^*\notin\Phi^+$.

3. $\gamma+\lambda^*=\varpi_1$, $\gamma=0\notin\Phi^+$.

Тем самым случаи всех возможных простых алгебр разобраны, и теорема 3 доказана.

6 Классификация $(\mathrm{G}_a)^m$-действий на многообразиях флагов

Мы будем применять теорему 2 (и тем самым доказывать теорему 4) последовательно для всех случаев, которые встречаются в теореме 1 и в которых $G=\widetilde{G}$. При этом мы будем применять обозначения из введения. Для определения структуры подалгебры $\mathfrak{u}^-$ как L-модуля будем использовать следующие соображения.

Подгруппа Леви L максимальной параболической подгруппы P_i простой группы G всегда локально изоморфна произведению одномерного центрального тора и полупростой части. Схема Дынкина коммутанта группы L получается из схемы Дынкина группы G удалением i-й вершины, и тем самым система простых корней коммутанта группы L вкладывается в систему простых корней группы G.

Представление группы L в $\mathfrak{u}^-$ точно, центральный тор действует в нем нетривиально. Пусть коэффициент при простом корне α_i в максимальном корне системы корней группы G равен n. Неприводимые представления находятся во взаимно-однозначном соответствии с отрицательными корнями α из системы корней группы G, максимальными среди корней, имеющих коэффициент $-k$ при простом корне α_i, $k=1,\dots,n$. Числовая отметка старшего веса этого неприводимого представления группы L при простом корне α_j равна $2(\alpha,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$ (эти скалярные произведения вычисляются в линейной оболочке корней группы G).

6.1 Группа G типа A_l, $P=P_1$ или $P=P_l$

Случай $P=P_l$ сводится к случаю $P=P_1$ при помощи внешнего автоморфизма, поэтому далее считаем $P=P_1$. Согласно сделанным выше замечаниям, коммутант группы L имеет тип A_{l-1}, представление группы L в пространстве $\mathfrak{u}^-$ неприводимо и имеет старший вес ϖ_1, то есть это тавтологическое представление группы SL_l. Поскольку центральный тор группы L действует на пространстве $\mathfrak{u}^-$ нетривиально, то мы находимся в точности в условиях случая, рассмотренного в параграфе 5.1.1. Поэтому коммутативные унипотентные подалгебры в алгебре $\mathfrak{p}^-$, дополнительные к подалгебре $\mathfrak{l}$, с точностью до L-сопряжения, параметризуются коммутативными ассоциативными l-мерными алгебрами с нильпотентными операторами умножения.

Для доказательства теоремы 4 в этом случае остается проверить, что если две коммутативные унипотентные подалгебры в алгебре $\mathfrak{u}_0^-$ сопряжены с помощью группы P, то они сопряжены и с помощью группы L. Пусть это подалгебры $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$, и $(\mathrm{Ad}\,p)\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$, $p\in P$. Поскольку $P=L\ltimes U$, то можно написать $p=gu$, где $g\in L$, $u\in U$. Имеем $(\mathrm{Ad}\,u)\mathfrak{a}_1=(\mathrm{Ad}\,g^{-1})\mathfrak{a}_2$. Далее будем записывать элементы группы $G=SL_{l+1}$ блочными матрицами с размерами блоков 1 и l. Подгруппа L состоит из всех матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right),$$

где $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, $b \in GL_l$, $a \det b = 1$. Матрицы из подалгебры $\mathfrak{a}_1$ лежат в подалгебре $\mathfrak{u}_0^-$, и поэтому имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a & b \end{array}\right),$$

где a может быть любым вектором из пространства $\mathbb{C}^l$, поскольку подалгебра $\mathfrak{a}_1$ дополнительна к подалгебре $\mathfrak{p}$. Матрицы из подалгебры $\mathfrak{a}_2$ имеют такой же вид. Матрицы из подалгебры $\mathfrak{u}$ имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

где 1 обозначает единичную матрицу. Пусть

$$g = \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & y \end{array}\right), \quad u = \left(\begin{array}{c|c} 1 & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right).$$

Рассмотрим также произвольные элементы

$$a_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_1' & a_1'' \end{array}\right) \in \mathfrak{a}_1, \quad a_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_2' & a_2'' \end{array}\right) \in \mathfrak{a}_2.$$

Тогда

$$ua_1u^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_1' & a_1'' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & -v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} va_1' & -va_1'v + va_1'' \\ \hline a_1' & -a_1'v + a_1'' \end{array}\right),$$

то есть если $u \neq \mathrm{id}$, то $v \neq 0$ и существует такой элемент $a_1 \in \mathfrak{a}_1$, что верхний левый элемент матрицы ua_1u^{-1} не равен нулю. С другой стороны,

$$g^{-1}a_2g = \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline a_2' & a_2'' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & y^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline ya_2'x^{-1} & ya_2''y^{-1} \end{array}\right),$$

то есть верхний левый элемент матрицы ga_2g^{-1} равен нулю для любого $a_2 \in \mathfrak{a}_2$. Поэтому если $u \neq \mathrm{id}$, то подалгебры $(\mathrm{Ad}\, u)\mathfrak{a}_1$ и $(\mathrm{Ad}\, g^{-1})\mathfrak{a}_2$ совпадать не могут. Следовательно, $u = \mathrm{id}$, $p = g$ и подалгебры $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ сопряжены с помощью L.

6.2 Группа G типа A_l, $P = P_i$, $1 < i < l$

Коммутант группы L изоморфен $SL_i \times SL_{l+1-i}$, подалгебра $\mathfrak{u}^-$ как представление группы L неприводима и изоморфна $V_{SL_i}(\varpi_{i-1}) \otimes V_{SL_{l+i-1}}(\varpi_1)$, по предложению 3 ненулевых умножений не существует.

6.3 Группа G не типа A_l

Рассмотрение всех случаев, где группа G имеет тип B_l, C_l, D_l, E_6 и E_7 происходит полностью единообразно. Нужно вычислить коммутант группы L, он оказывается простой группой, оказывается, что алгебра $\mathfrak{u}^-$ как представление группы L неприводимо (если $P = P_i$, то единственная неприводимая компонента соответствует корню $-\alpha_i$), и для этого представления не существует нетривиальных умножений по теореме 3. Эти случаи разобраны в следующей таблице.

Тип G	P	Тип коммутанта L	Старший вес $\mathfrak{u}^-$
B_l $(l \geq 3)$	P_1	B_{l-1}	ϖ_1
C_l $(l \geq 2)$	P_l	A_{l-1}	$2\varpi_{l-1}$
D_4	P_1	A_3	ϖ_2
D_l $(l \geq 5)$	P_1	D_{l-1}	ϖ_1
D_l $(l \geq 5)$	P_{l-1}, P_l	A_{l-1}	ϖ_{l-2}
E_6	P_1, P_6	D_5	ϖ_5
E_7	P_7	E_6	ϖ_6

Таким образом, теорема 4 доказана.

Литература

[1] I. V. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of* $\mathbb{G}_a^n$, arXiv:1003.2358v2 [math.AG] 18 Mar 2010.

[2] B. Hasset, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of* G_a^n, arXiv:math/9902073v1 [math.AG] 11 Feb 1999.

[3] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Москва: Физматлит, 1995.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1968.

[5] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* Москва: Наука, 1988.

[6] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, *Строение групп и алгебр Ли.* Итоги науки и техники **41**, Москва: ВИНИТИ, 1990.

[7] Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* Москва: МЦНМО, 2003.