УДК 517.938

Костистые аттракторы*

© 2010. Ю. Г. Кудряшов

1. Введение. Вопросы о возможных структурах аттракторов являются одними из важнейших в теории динамических систем.

В простейших случаях аттракторы — это многообразия. Широко известны типичные динамические системы (аттрактор Лоренца, соленоид Смейла–Вильямса), аттракторы которых локально устроены как прямое произведение многообразия на канторово множество. В этой заметке построен типичный (пока только в классе ступенчатых косых произведений) пример системы, аттрактор которой устроен по-другому, — является «костистым».

Напомним, что *косым произведением* называется динамическая система вида $F\colon Y\times Z\to Y\times Z$, $(y,z)\mapsto (f(y),h(y,z))$.

Будем называть аттрактор A косого произведения $F\colon Y\times Z\to Y\times Z$ *костистым*, если он является объединением графика непрерывной функции $g\colon D\to Z$, определенной на некотором подмножестве $D\subset Y$, и несчетного числа вертикальных отрезков («костей»), лежащих в замыкании этого графика.

Через Σ^k обозначим пространство двусторонних последовательностей из чисел от 0 до $k-1$ с мерой Бернулли μ, соответствующей некоторому распределению вероятностей p_0, …, p_{k-1}, и «k-адической» метрикой

$$d(\omega,\widetilde{\omega})=k^{-n(\omega,\widetilde{\omega})},$$

где $n(\omega,\widetilde{\omega})$ — наименьшее число n, для которого $\omega_i\neq\widetilde{\omega}_i$ или $\omega_{-i}\neq\widetilde{\omega}_{-i}$. Пусть $\sigma\colon\Sigma^k\to\Sigma^k$, $(\sigma\omega)_j=\omega_{j+1}$, — сдвиг Бернулли.

Рассмотрим пространство C^1-гладких *ступенчатых косых произведений* над сдвигом Бернулли со слоем $I=[0;1]$, т. е. динамических систем вида

$$F\colon \Sigma^k\times I\to\Sigma^k\times I,\qquad (\omega,x)\mapsto(\sigma\omega,f_{\omega_0}(x)),$$

где $f_0,\dots,f_{k-1}\colon I\to I$ — непрерывно дифференцируемые функции. Это пространство естественно снабдить топологией k-й степени пространства $C^1[0;1]$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема:

Теорема 1. *Для любого $k\geqslant 2$ существует открытое непустое подмножество пространства C^1-гладких ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли $\sigma\colon\Sigma^k\to\Sigma^k$, такое, что для любого его элемента F выполнены следующие условия*:

(1) *максимальный аттрактор $A_{\max}=\bigcap_{n\geqslant 0}F^n(\Sigma^k\times I)$ является объединением графика Γ функции $g\colon D\to I$, непрерывной на D, и множества вертикальных отрезков («костей»), по одному в каждом слое $\{\omega\}\times I$, $\omega\notin D$;*

(2) $\dim_H(\Omega)<\dim_H(\Sigma^k)$, *где $\Omega=\Sigma^k\setminus D$ — множество слоев, содержащих кости; кроме того, $\mu(\Omega)=0$;*

(3) *множество Ω континуально и всюду плотно в Σ^k;*

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00017-а, РФФИ 10-01-00739-а и РФФИ-CNRS 05-01-02801-НЦНИЛ_а.

(4) *для любого подмножества* $S \subset \Sigma^k$ *полной меры максимальный аттрактор* $A_{\max}(F)$ *совпадает с замыканием пересечения* $A_{\max}(F) \bigcap (S \times I)$; *в частности, «кости» лежат в замыкании графика* Γ;

(5) *максимальный аттрактор отображения* F *совпадает с его милноровским аттрактором*: $A_{\max}(F) = A_M(F)$.

Замечание 2. Максимальный аттрактор отображения F обязан содержаться в множестве $\Sigma^k \times J$, где J — выпуклая оболочка множества неподвижных точек послойных отображений f_i.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет следующее достаточное условие.

Теорема 3. *Пусть строго монотонные отображения* $f_0, \ldots, f_{k-1} \colon I \to I$ *обладают следующими свойствами*:

(1) *существует конечный набор композиций конечной длины из отображений* f_i, *такой, что пересечение образов отрезка* I *под действием этих композиций пусто*;

(2) *существует композиция конечной длины из отображений* f_i, *одна из неподвижных точек которой — репеллер*;

(3) *существует конечный набор конечных композиций отображений* f_i, *такой, что каждая композиция из этого набора является сжатием на* I, *а образы отрезка* $J = J(f_0, \ldots, f_{k-1})$ *при этих композициях покрывают отрезок* J.

Тогда для соответствующего ступенчатого косого произведения $F \colon \Sigma^k \times I \to \Sigma^k \times I$ *выполнены заключения теоремы* 1.

Перед тем как доказывать эту теорему, приведем пример открытого множества ступенчатых косых произведений, для которых ее условия выполнены. Тем самым мы выведем теорему 1 из теоремы 3.

При $k \geqslant 3$ возьмем отображения f_0 и f_1, сжимающие к двум разным точкам $x_0 < x_1$ отрезка I, причем $0{,}75 < f_0', f_1' < 1$. Тогда для достаточно большого n отрезки $f_0^n(I)$ и $f_1^n(I)$ не пересекаются, т. е. выполнено условие (1). Выберем отображения $f_2, \ldots, f_{k-1}$ так, что $f_i(I) \subset (x_0, x_1)$, причем хотя бы у одного из этих отображений есть репеллер. Это гарантирует выполнение условия (2). Кроме того, это означает, что $J = [x_0, x_1]$, и из неравенства $0{,}75 < f_0', f_1'$ следует условие (3). Ясно, что описанный в этом абзаце класс наборов отображений непуст и открыт в C^1-топологии.

Пример для $k = 2$ построить немного сложнее. Пусть f_0 — кусочно-линейное отображение с вершинами $(0,0)$, $(0{,}6, 0{,}2)$, $(1, 0{,}8)$, а f_1 — кусочно-линейное отображение с вершинами $(0, 0{,}15)$, $(0{,}4, 0{,}8)$, $(1,1)$. Несложно проверить, что образы композиций f_0^5 и f_1^5 не пересекаются, а у композиции $f_0 f_1$ есть отталкивающая неподвижная точка. Заметим, что композиции f_0^3, $f_0^2 f_1$, $f_1^2 f_0$ и f_1^5 удовлетворяют последнему условию теоремы 3. Осталось немного сгладить изломы и взять окрестность полученной системы в топологии C^1.

В следующих разделах мы поочередно выведем заключения теоремы 1 из условий теоремы 3.

2. Структура аттрактора. Заметим, что со слоем над последовательностью ω максимальный аттрактор пересекается по множеству $I_\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\omega,n}$, где $I_{\omega,n} = f_{\omega_{-1}} \circ \cdots \circ f_{\omega_{-n}}(I)$. Поскольку отрезки $I_{\omega,n}$ вложены друг в друга, I_ω — точка или отрезок. Таким образом, максимальный аттрактор является объединением графика некоторой функции g и множества вертикальных отрезков.

Докажем теперь непрерывность функции g. Пусть $(\omega^{(0)}, x^{(0)})$ — точка графика Γ, $\varepsilon > 0$. Тогда для достаточно большого n отрезок $I_{\omega^{(0)},n}$ содержится в интервале $(x^{(0)} - \varepsilon, x^{(0)} + \varepsilon)$. Значит, $I_{\omega,n} \subset (x^{(0)} - \varepsilon, x^{(0)} + \varepsilon)$ для любой последовательности ω, совпадающей с $\omega^{(0)}$ на $[-n; -1]$, т.е. функция g непрерывна на области определения.

3. Хаусдорфова размерность и мера. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть отображения* $f_0, \ldots, f_{k-1} \colon I \to I$ *удовлетворяют условию* (1) *теоремы* 3. *Тогда для любой точки* $x \in I$ *хаусдорфова размерность множества* Ω^x *последовательностей* ω, *для которых* $x \in I_\omega$, *меньше* $\dim_H \Sigma^k$.

Доказательство. Пусть N — наибольшая из длин композиций из условия (1) теоремы 3 и $\Omega_l^x = \{w \in \{0, \ldots, k-1\}^{Nl} \mid x \in f_w(I)\}$. Тогда левая часть любой последовательности из Ω^x начинается с последовательности из Ω_l^x, а значит, множество Ω^x содержится в объединении $k^{Nl+1}|\Omega_l^x|$ шаров радиуса k^{-Nl-1}. Оценим $|\Omega_l^x|$.

Любая последовательность $w \in \Omega_{l+1}^x$ имеет вид uv, $|u| = N$, $v \in \Omega_l^x$, а значит, $|\Omega_{l+1}^x| \leqslant k^N |\Omega_l^x|$. Более того, для каждой последовательности $\widetilde{v} \in \Omega_l^x$ найдется последовательность $\widetilde{u}$ длины N, такая, что $f_{\widetilde{v}}^{-1}(x) \notin f_{\widetilde{u}}(I)$, т.е. $\widetilde{w} = \widetilde{u}\widetilde{v} \notin \Omega_{l+1}^x$. Следовательно, $|\Omega_{l+1}^x| \leqslant (k^N - 1)|\Omega_l^x|$ и $|\Omega_x^l| \leqslant (k^N - 1)^l$.

Таким образом, множество Ω^x лежит в объединении не более чем $k(k^{2N} - k^N)^l$ шаров радиуса k^{-Nl-1}; следовательно, хаусдорфова размерность множества Ω^x не превосходит $\log_{k^N}(k^{2N} - k^N) < 2 = \dim_H \Sigma^k$. $\square$

Поскольку Ω содержится в счетном объединении $\bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{p=0}^{q} \Omega^{p/q}$, а хаусдорфова размерность каждого из этих множеств не превосходит $\log_{k^N}(k^{2N} - k^N)$, хаусдорфова размерность множества Ω также не превосходит этого числа.

Аналогично лемме 4 доказывается тот факт, что мера любого из множеств Ω^x равна нулю. Следовательно, мера множества Ω также равна нулю, и второе утверждение теоремы доказано.

4. Континуальность и всюду плотность. В силу условия (2) теоремы 3 существует композиция $f_\alpha = f_{\alpha_1} \circ \cdots \circ f_{\alpha_{|\alpha|}}$, одна из неподвижных точек которой — репеллер. Пусть $\tilde{I} \subset I$ — окрестность репеллера, такая, что $f_\alpha(\tilde{I}) \supset \tilde{I}$. Тогда для любой последовательности вида $\omega = \ldots \alpha\alpha \ldots \alpha\omega_{-n} \ldots \omega_{-1}\omega_0 \ldots$ отрезок I_ω содержит, как минимум, отрезок $f_{\omega_{-1}} \circ \cdots \circ f_{\omega_{-n}}(\tilde{I})$. Осталось заметить, что множество таких последовательностей континуально и всюду плотно.

5. Замыкание аттрактора над множеством полной меры. Пусть (ω, x) — точка максимального аттрактора. Обозначим через $U_N(\omega)$ множество последовательностей, совпадающих с ω на отрезке $[-N, N]$, а через $V_\varepsilon(x)$ ε-окрестность точки x. Для доказательства четвертого утверждения теоремы достаточно построить точку, принадлежащую пересечению $(U_N(\omega) \times V_\varepsilon(x)) \cap (S \times I) \cap A_{\max}$.

Применим композицию $h = f_{\omega_{-n}}^{-1} \circ \cdots \circ f_{\omega_{-1}}^{-1}$. Заметим, что точка $(\omega', x') = (\sigma^{-n}\omega, h(x))$ принадлежит $A_{\max}$, откуда следует, что $x' \in J$. Применяя достаточное количество раз условие (3), мы можем найти сколь угодно сильно сжимающую композицию отображений f_i, образ которой содержит точку x' (см. [2]). В частности, можно найти последовательность w, такую, что $f_w(I) \subset$

$h(V_\varepsilon(x))$. Выберем последовательность $\widetilde{\omega} \in S$, левый «хвост» которой имеет вид $\dots w\omega_{-n}\dots\omega_{-1}$, и точку $\widetilde{x} \in I_{\widetilde{\omega}}$. Тогда $I_{\widetilde{\omega}} \subset f_{w\omega_{-n}\dots\omega_{-1}}(I) \subset V_\varepsilon(x)$; следовательно, пара $(\widetilde{\omega}, \widetilde{x})$ принадлежит пересечению $(U_N(\omega) \times V_\varepsilon(x)) \cap (S \times I) \cap A_{\max}$, и утверждение (4) выполнено.

6. Совпадение аттракторов. Заметим сначала, что точка (ω', x') графика Γ принадлежит ω-предельному множеству точки (ω, x), если последовательность ω' принадлежит ω-предельному множеству последовательности ω. Действительно, если последовательности $\sigma^n\omega$ и ω' совпадают на отрезке $[-N, N]$, то $f_{\sigma^n\omega}(x) \in I_{\omega',N}$, а отрезки $I_{\omega',N}$ пересекаются только по точке x'.

Поскольку милноровский аттрактор сдвига Бернулли совпадает со всем множеством Σ^k, милноровский аттрактор рассматриваемого косого произведения содержит все точки графика. Осталось воспользоваться предыдущим утверждением теоремы.

7. Обобщения. Следующая теорема является непосредственным обобщением леммы 4.

Теорема 5. *Пусть M — сепарабельное топологическое пространство, $f_1, \dots, f_k \colon M \to M$ и F — соответствующее ступенчатое косое произведение на $\Sigma^k \times M$. Пусть существуют две композиции конечной длины из f_i, образы которых не пересекаются. Обозначим через Ω множество последовательностей $\omega \in \Sigma^k$, для которых пересечение $A_{\max}(F) \cap (\{\omega\} \times M)$ имеет непустую внутренность в слое $\{\omega\} \times M$. Тогда $\dim_H \Omega < \dim_H \Sigma^k$.*

8. Благодарности. Автор благодарен Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи и полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за совет переформулировать основную теорему и В. А. Клепцыну за замечания к тексту статьи.

Литература

[**1**] J. Milnor, Comm. Math. Phys., **99**, 177–195. [**2**] J. Hatchinson, Indiana Univ. Math. J., **30**:5 (1981), 713–747.

Московский государственный университет
Независимый московский университет
Ecolé Normale Supériore de Lyon
e-mails: urkud.urkud@gmail.com, urkud@mccme.ru

Поступило в редакцию
13 июля 2009 г.

УДК 517.51

Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру*

© 2010. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Работа посвящена построению семейства оптимальных методов восстановления производных функций по неточно заданному на конечном отрезке преобразованию Фурье этих функций. Точная постановка задачи такова. Пусть $n \in \mathbb{N}$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00450 и №09-01-90360).