О. М. Солычева (Нижний Новгород, *Solycheva@list.ru*)

О СВОЙСТВЕ ТИПА БАНАХОВОСТИ АЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ КОНЕЧНОЙ ПОЛНОЙ Λ–ВАРИАЦИИ

В работе показано, что пространство Уотермана метрическизначных отображений двух вещественных переменных конечной полной Λ–вариации обладает свойством типа банаховости алгебры.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ — неубывающая последовательность чисел, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i^2 = \infty$, $I_a^b = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — прямоугольник в $\mathbb{R}^2$, где $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ такие, что $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $(M, d, +)$ — метрическая полугруппа (т.е. (M, d) — метрическое пространство, $(M, +)$ — абелева полугруппа и $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ для всех $u, v, w \in M$ [3]), а через $M^{I_a^b}$ обозначим множество всех отображений из I_a^b в M.

Для $f \in M^{I_a^b}$ будем писать $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I_a^b, M)$, если $\mathrm{TV}_{\Lambda,d}(f, I_a^b) < \infty$, где $\mathrm{TV}_{\Lambda,d}(f, I_a^b) = V_{\Lambda,d}(f(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) + V_{\Lambda,d}(f(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) + V_{2,\Lambda}(f, I_a^b)$; здесь $V_{\Lambda,d}(f(\cdot,\cdot), [\cdot,\cdot])$ — Λ–вариации отображения f, вычисленные в метрике d ([1], $M = \mathbb{R}$), а $V_{2,\Lambda}(f, I_a^b) = \sup \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} md(f, I_{i,j})/(\lambda_{\sigma(i)}\lambda_{\nu(j)})$ — двойная Λ–вариация f ([2], $M = \mathbb{R}$), где $md(f, I_{i,j}) = d(f(\alpha_i, \gamma_j) + f(\beta_i, \delta_j), f(\alpha_i, \delta_j) + f(\beta_i, \gamma_j)$ — смешанная разность отображения f на прямоугольнике $I_{i,j} = [\alpha_i, \beta_i] \times [\gamma_j, \delta_j] \subset I_a^b$ [3], а супремум берется по всем парам чисел $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, всем парам упорядоченных наборов неналегающих отрезков $[\alpha_i, \beta_i] \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \ldots, m$, и $[\gamma_j, \delta_j] \subset [a_2, b_2]$, $j = 1, \ldots, n$, и всем перестановкам $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ и $\nu : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Пусть $(N, \rho, +)$ и $(M, d, +)$ — метрические полугруппы с нулями. Обозначим через $\mathrm{L}(N, M)$ метрическую полугруппу всех липшицевых аддитивных операторов из N в M с поточечной операцией сложения и метрикой d_L [3]:

$$d_L(T, S) = \sup \left\{ \frac{d(Tu + Sv, Tv + Su)}{\rho(u, v)}, \quad u, v \in N, \quad u \neq v \right\} \quad T, S \in \mathrm{L}(N, M).$$

Теорема 1. *Пусть $(N, \rho, +)$ и $(M, d, +)$ — две метрические полугруппы с нулями. Если $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I_a^b, \mathrm{L}(N, M))$ и $g \in \Lambda\mathrm{BV}(I_a^b, N)$, то отображение $fg : I_a^b \to M$, действующее по правилу: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для всех $x \in I_a^b$, лежит в $\Lambda\mathrm{BV}(I_a^b, M)$, и справедливо неравенство*

$$\|fg\|_d \leq 4 \max\{1, \lambda_1^2\} \|f\|_{d_L} \cdot \|g\|_\rho,$$

где $\|f\|_d = d((f(a), 0) + TV_{\Lambda,d}(f, I_a^b)$, $\|g\|_\rho = \rho(g(a), 0) + TV_{\Lambda,\rho}(g, I_a^b)$, $\|f\|_{d_L} = L(f(a)) + TV_{\Lambda,d_L}(f, I_a^b)$, а $L(f(a))$ — константа Липшица оператора $f(a)$.

Полученный результат обобщает результаты работ [3] и [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Waterman D. *On Λ-bounded variation* // Studia Math. – 1976. – V. 57, No 1. – P. 33-45.

2. Dyachenko M. I. *Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series*// Anal. Math. – 1995. – V. 21. – P. 3-21.

3. Чистяков В. В. *Абстрактные операторы суперпозиции на отображениях ограниченной вариации двух вещественных переменных. II*// Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46, No 4. – С. 942–957.

4. Солычева О. М. *Липшицевы операторы суперпозиции на метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах отображений конечной* Λ-*вариации*// Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, No 3. – С. 649–664.