Функциональный анализ и его приложения
2011, т. 45, вып. 2, с. 1–22

УДК 517.98+517.95

Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка*

© 2011. М. С. Агранович

Рассматриваются смешанные задачи для сильно эллиптических систем 2-го порядка в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Выводятся уравнения на границе, эквивалентные задаче, в простейших L_2-пространствах H^s типа Соболева, что позволяет представить решения через поверхностные потенциалы. Доказывается результат о регулярности решений с выходом в немного более общие пространства H^s_p бесселевых потенциалов и пространства B^s_p Бесова. Рассматриваются задачи со спектральным параметром в системе или в условии на части границы, обсуждаются спектральные свойства соответствующих операторов, включая асимптотики собственных значений.

§1. Введение

1.1. Содержание работы. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшицевой границей Γ. Пусть в Ω задана сильно эллиптическая система 2-го порядка $Lu = f$, записанная в дивергентной форме, см. ниже (1.1). Предположения о гладкости коэффициентов в известной мере минимизируются. Основную «энергетическую» форму $\Phi_\Omega(u, v)$ мы предположим коэрцитивной при $u = v$ в усиленном смысле на пространстве $H^1(\Omega) = W^1_2(\Omega)$; это условие влечет однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана.

В бо́льшей части работы (§§ 1–6) мы предполагаем, что граница Γ разбита на две области Γ_1 и Γ_2 замкнутой $(n-1)$-мерной липшицевой поверхностью $\partial\Gamma_j$ без самопересечений, на Γ_1 ставится условие Дирихле, на Γ_2 — Неймана.

Смешанным задачам посвящена обширная литература. Причина состоит в том, что они встречаются во множестве прикладных вопросов. См., например, книги [16] и [41]. (В них содержатся также явные и непростые формулы для решения ряда конкретных смешанных задач.)

Во многих работах накладываются дополнительные условия гладкости на Γ_1 и Γ_2, или на Γ, и на $\partial\Gamma_j$. См., в частности, [39], [38] и приведенную там литературу, а также [42], [43], [30]. В ряде работ накладывается условие на геометрию границы: обычно требуется, грубо говоря, чтобы угол между нормалями к Γ_1 и Γ_2 в точках на $\partial\Gamma_j$ был меньше π (creased domains, точное определение см. в [10]; см. также [46], [27], [11]). Многие работы посвящены конкретным уравнениям или системам, чаще всего это уравнения Лапласа–Гельмгольца или системы теории упругости; кроме названных выше работ, см. также [19], [35]. При этом исследования в значительной степени направлены на выяснение регулярности решения и в особенности его поведения вблизи $\partial\Gamma_j$. Легко строятся примеры (типа $r^\alpha \sin(\alpha\theta)$ в полярных координатах r, θ в плоской области в случае уравнения Лапласа), показывающие, что даже при бесконечно гладких Γ_j (или

*Поддержано грантом РФФИ 11-01-00277-а.

даже Γ) и $\partial\Gamma_j$ решение может иметь особенность вблизи $\partial\Gamma_j$. В [42], [43], [30] в гладком случае получена асимптотика решения вблизи $\partial\Gamma_j$ при помощи метода Винера–Хопфа в форме, предложенной в [15].

Существенно меньше работ об общих сильно эллиптических уравнениях или системах, в которых *никаких* дополнительных условий гладкости на Γ_j и $\partial\Gamma_j$ или геометрических условий не накладывается. Назовем монографию [24], работы [34] (о скалярном уравнении с формально самосопряженной старшей частью), [18] и [33, п. 3] (о скалярном формально самосопряженном уравнении без младших членов). К этому направлению относится и наша работа (в пределах §§1–5).

Мы приведем общую теорему о существовании и единственности вариационного решения в пространствах H^s и сравним разные подходы к ее доказательству. С учетом деликатности некоторых из затрагиваемых вопросов мы сначала напомним свойства пространств H^s (п. 1.3), постановку задач Дирихле и Неймана (п. 2.1) и непосредственное доказательство однозначной разрешимости смешанной задачи на основе леммы Лакса–Мильграма (п. 2.2). Затем, в §3, выведем двумя способами *уравнения на* Γ *с операторами типа поверхностных потенциалов на части границы*, эквивалентные задаче и однозначно разрешимые. Эти операторы представляют самостоятельный интерес. В [24] уравнения получены в предположении формальной самосопряженности старшей части системы. Нам оно не понадобится; мы воспользуемся прозрачным подходом в [30] к системе анизотропной упругости.

В §4 мы обобщим теорему об однозначной разрешимости на близкие к H^s пространства H^s_p бесселевых потенциалов и пространства B^s_p Бесова, используя *теорему Шнейберга* [40] об экстраполяции обратимости операторов, действующих в интерполяционных шкалах пространств. Ср., в частности, [27] (где получены очень общие теоремы об однозначной разрешимости для уравнения Лапласа при дополнительном геометрическом предположении), а также [11]. Отметим, что в этих работах и ряде других авторы выходят за рамки функциональных пространств, используемых в нашей статье.

В §§5–6 мы рассмотрим спектральные задачи. Для самосопряженных задач мы укажем результаты о базисности собственных функций, а для несамосопряженных задач и задач в рассматриваемых у нас негильбертовых пространствах — условия полноты корневых функций и суммируемости рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского, ср. [3]–[5].

Если система или хотя бы ее старшая часть формально самосопряженная, то интересна асимптотика собственных значений. Для задач со спектральным параметром в системе результат следует из теоремы в [25], и там получена сильная оценка остаточного члена. Задачи со спектральным параметром в условии на части границы — это спектральные задачи Пуанкаре–Стеклова. Мы применим к ним *вариационный подход*, восходящий к Куранту–Гильберту [13], при условии, что граница *почти гладкая* (гладкая вне замкнутого подмножества $\Gamma_{\rm sing}$ нулевой меры, это определение из [6]). Мы дополним также результаты по спектральным асимптотикам, полученные в [4] и [5].

В §7 мы кратко рассмотрим некоторые обобщения.

1.2. Уточнение постановки задачи. Запишем систему в виде

$$Lu := -\sum \partial_j a_{j,k}(x)\partial_k u(x) + \sum b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Здесь и дальше $\partial_k = \partial/\partial x_k$; u — вектор-функция (столбец) размерности m, так что коэффициенты — это $m \times m$-матрицы. Как и u, они состоят из комплекснозначных функций. Будем предполагать, что $a_{j,k} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_j \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ (липшицевы), $c \in L_\infty(\Omega)$. В некоторых ситуациях можно предполагать меньше. Условие сильной эллиптичности состоит в равномерной положительной определенности вещественной части $\frac{1}{2}(a + a^*)$ главного символа — матрицы $a(x,\xi) = \sum a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k$ — при вещественных ξ, $|\xi| = 1$. Решение будем сначала искать в $H^1(\Omega)$. Пространство для f будет указано в п. 2.2.

Запишем граничные условия:

$$u^+ = g \quad \text{на } \Gamma_1, \quad T^+u = h \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{1.2}$$

Здесь $u^+ = g$ — след функции u, принадлежащий $H^{1/2}(\Gamma_1)$, мы его будем обозначать также через γ^+u, а $T^+u = h$ — конормальная производная, ее определение напоминается и кратко комментируется в п. 2.1; она принадлежит $H^{-1/2}(\Gamma_2)$.

Системе отвечает обозначаемая через $\Phi_\Omega(u,v)$ полуторалинейная форма

$$\int_\Omega \Big[\sum a_{j,k}(x)\partial_k u(x) \cdot \partial_j \overline{v}(x) + \sum b_j(x)u(x) \cdot \overline{v}(x) + c(x)u(x) \cdot \overline{v}(x)\Big] dx; \tag{1.3}$$

она определена на функциях из $H^1(\Omega)$. Наше предположение о ее (усиленной) коэрцитивности состоит в том, что для них справедливо неравенство Гординга

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_0 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u,u) \tag{1.4}$$

без добавления $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$ справа. На функциях с $u^+ = 0$ на Γ такое неравенство является следствием одной лишь сильной эллиптичности, если

$$\operatorname{Re}(cu,u)_\Omega \geqslant C_1 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{1.5}$$

с достаточно большой постоянной C_1, что у нас предполагается. Здесь $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\Omega$ — стандартное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. На функциях из $H^1(\Omega)$ неравенство (1.4) получается в случае скалярного уравнения с вещественной симметрической матрицей из старших коэффициентов. Для его справедливости в матричном случае на коэффициенты в L накладываются некоторые (достаточные) условия (см., например, [24], [5]); в частности, они выполнены для обобщенных систем теории упругости (см., например, [32]). При этом снова форма $\operatorname{Re}(cu,u)_\Omega$ считается достаточно большой.

1.3. Пространства H^s. См., например, [24]. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ бесселевых потенциалов ($s \in \mathbb{R}$) вводятся формулой

$$H^s(\mathbb{R}^n) = J^{-s}L_2(\mathbb{R}^n), \qquad J^{-s} = F^{-1}(1 + |\xi|)^{-s}F, \tag{1.6}$$

где F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций; $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$. Для $s \geqslant 0$ это пространства $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ Соболева (при целых s) и Слободецкого (при нецелых s). Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ дуальны, или двойственны, или сопряжены, относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на их прямое произведение.

Пространство $H^s(\Omega)$ определяется как состоящее из сужений элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на Ω в смысле обобщенных функций с обычной нормой $\inf$. Имеется универсальный ограниченный оператор $\mathscr{E}$ продолжения элементов из $H^s(\Omega)$ до элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$, не зависящий от s [37].

Пространство $\widetilde{H}^s(\Omega)$ определяется как подпространство в $H^s(\mathbb{R}^n)$ элементов с носителями в $\overline{\Omega}$. Норма наследуется из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Пространство $\widetilde{H}^s(\Omega)$ можно отождествить с пополнением в $H^s(\mathbb{R}^n)$ линеала $C_0^\infty(\Omega)$, считая функции из него продолженными нулем вне Ω. При $-1/2 < s < 3/2$, $s \neq 1/2$ его можно отождествить также с пополнением $\mathring{H}^s(\Omega)$ линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$. Все отождествления понимаются с точностью до эквивалентности норм.

Пространства $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ и $H^s(\Omega)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ на их прямое произведение. Это продолжение имеет вид

$$(f, v)_\Omega = (f, \mathscr{E} v)_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.7}$$

где справа используется продолжение скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Разумеется, функции в этих формах до и после запятой можно одновременно поменять местами. Пространства $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^s(\Omega)$ отождествляются при $|s| < 1/2$.

Пространства $H^s(\Gamma)$ определяются на липшицевой поверхности при $|s| \leqslant 1$ при помощи разбиения единицы и норм в $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$. Оператор $\gamma^+ v = v^+$ перехода к следу действует ограниченным образом из $H^{s+1/2}(\Omega)$ в $H^s(\Gamma)$ при $0 < s < 1$ и имеет ограниченный правый обратный. Пространства $H^s(\Gamma)$ и $H^{-s}(\Gamma)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$ (относительно естественно определяемой меры — площади поверхности на Γ) на их прямое произведение.

Пространство $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ при $s > 1/2$ содержит элементы из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, сосредоточенные на Γ. При $1/2 < s < 3/2$ они имеют вид $(w, v^+)_\Gamma$, $v \in H^s(\Omega)$, $w \in H^{-s+1/2}(\Gamma)$ [26].

Если Γ_0 — область на Γ с липшицевой границей, то пространство $H^s(\Gamma_0)$ определяется при $|s| \leqslant 1$ как состоящее из сужений на Γ_0 элементов из $H^s(\Gamma)$ с нормой inf. Имеется ограниченный оператор продолжения из $H^s(\Gamma_0)$ в $H^s(\Gamma)$, не зависящий от s. Пространство $\widetilde{H}^s(\Gamma_0)$ определяется как подпространство в $H^s(\Gamma)$ элементов с носителями в $\overline{\Gamma}_0$. Пространства $\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_0)$ и $H^s(\Gamma_0)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_0)$ на их прямое произведение. Это продолжение строится аналогично (1.7). Пространства $H^s(\Gamma_0)$ и $\widetilde{H}^s(\Gamma_0)$ отождествляются при $|s| < 1/2$.

Оператор умножения на характеристическую функцию области Γ_0 является мультипликатором в $H^s(\Gamma)$ при $|s| < 1/2$ и не является мультипликатором в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$. Но он является мультипликатором в $\widetilde{H}^s(\Gamma_0)$ при $|s| \leqslant 1/2$; более того, умножение на эту функцию не меняет элементы этих пространств.

§ 2. Вариационный подход

2.1. Задачи Дирихле и Неймана. Напомним их вариационную постановку. Запишем формулу Грина

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu, v)_\Omega + (T^+ u, v^+)_\Gamma. \tag{2.1}$$

Здесь v — произвольная пробная функция.

Начнем с задачи Неймана ($\Gamma = \Gamma_2$). В этом случае $u, v \in H^1(\Omega)$, так что след $\gamma^+ v = v^+$ принадлежит $H^{1/2}(\Gamma)$. В соответствии с выбором пространства для v правая часть системы $Lu = f$ берется из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. Справа в (2.1) используются соответствующие дуальности.

Конормальная производная на гладких функциях определяется формулой $T^+u(x) = \sum \nu_j(x)\partial_j u(x)$ в точках x границы, в которых есть нормаль к ней (это почти все точки). Здесь $\nu_j(x)$ — коэффициенты единичной внешней нормали. В общем случае заданием функции $u \in H^1(\Omega)$ обобщенная функция $Lu(x)$ однозначно определяется только внутри области Ω, а $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ может содержать еще слагаемое из $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ с носителем на Γ. Справедливость формулы (2.1) постулируется, и она принимается за определение конормальной производной $T^+u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (по u и $Lu = f$), а также за определение решения задачи Неймана (по $f = Lu$ и $h = T^+u$). Всегда можно принять, что $h = 0$, изменив f на слагаемое с носителем на Γ.

Из неравенства (1.4) следует однозначная разрешимость этой задачи в силу следующей леммы Лакса–Мильграма о слабых решениях абстрактного уравнения $Lu = f$, где L — ограниченный оператор, определяемый приведенным ниже равенством (2.4). (Ср., например, [24, с. 43].)

Лемма 2.1. *Пусть H — гильбертово пространство и H^* — сопряженное к нему пространство относительно формы (f, v), $v \in H$, $f \in H^*$, и пусть задано $f \in H^*$. Предположим, что для непрерывной полуторалинейной формы $\Phi(u, v)$ на H выполнено неравенство*

$$\|u\|_H^2 \leqslant C \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u, u). \tag{2.2}$$

Тогда существует один и только один элемент $u \in H$, такой, что

$$\Phi(u, v) = (f, v) \tag{2.3}$$

при всех $v \in H$. При этом оператор $L^{-1} \colon f \mapsto u$ ограничен.

Перейдем к задаче Дирихле ($\Gamma = \Gamma_1$). В этом случае $u \in H^1(\Omega)$ и $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Соответственно $f \in H^{-1}(\Omega)$. Формула Грина принимает вид

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu, v)_\Omega. \tag{2.4}$$

В эту формулу u^+ не входит явным образом, но подразумевается, что $u^+ = g$.

Пусть u_0 — функция из $H^1(\Omega)$ с $u_0^+ = g$. Определим $f_0 = Lu_0 \in H^{-1}(\Omega)$ формулой Грина $\Phi_\Omega(u_0, v) = (Lu_0, v)_\Omega$. Разность $u - u_0$ принадлежит $\widetilde{H}^1(\Omega) = \mathring{H}^1(\Omega)$, и если ее переобозначить через u, то снова получается формула Грина (2.4), в которой уже обе функции u и v принадлежат $\widetilde{H}^1(\Omega)$, а $f = Lu$ — сопряженному пространству $H^{-1}(\Omega)$. Это стандартная постановка задачи Дирихле с однородным граничным условием. Форма $\Phi_\Omega(u, u)$ у нас коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$, так что задача Дирихле однозначно разрешима.

Замечание. Предположим (в этом замечании), что оператор L — формально самосопряженный. Из формулы Грина видно, что тогда пространство $H^1(\Omega)$ есть ортогональная сумма относительно скалярного произведения $\Phi_\Omega(u, v)$ подпространства $\mathring{H}^1(\Omega) = \widetilde{H}^1(\Omega)$ и подпространства решений системы $Lu = 0$. Последнее параметризуется данными Дирихле в $H^{1/2}(\Gamma)$, поэтому линейные непрерывные функционалы на нем можно привести в изоморфное соответствие с функционалами из $H^{-1/2}(\Gamma)$ над $H^{1/2}(\Gamma)$. По этим причинам пространство $H^{-1}(\Omega)$, дуальное к $\widetilde{H}^1(S)$, можно отождествить с фактор-пространством пространства $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, дуального к $H^1(\Omega)$, по подпространству функционалов, сосредоточенных на Γ.

2.2. Перейдем к смешанной задаче. Ее решения u тоже ищутся в $H^1(\Omega)$. Ключевым моментом можно считать выбор пространства пробных функций v: это (замкнутое) подпространство $H^1(\Omega,\Gamma_1)$ в $H^1(\Omega)$, состоящее из функций с нулевым следом на Γ_1. (То есть след, принадлежащий $H^{1/2}(\Gamma)$, равен 0 на Γ_1).

Как видно из [27], пространство $H^1(\Omega,\Gamma_1)$ можно определить также как 1) пространство сужений на Ω элементов пополнения линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Gamma}_1)$ в $H^1(\mathbb{R}^n)$, 2) пополнение в $H^1(\Omega)$ сужений на Ω функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Gamma}_1)$.

Формула Грина, определяющая решение задачи, принимает вид

$$\Phi_\Omega(u,v)=(Lu,v)_\Omega+(T^+u,v^+)_{\Gamma_2}, \tag{2.5}$$

где $Lu=f$ и $T^+u=h$. Выбором пространства для v определяется пространство правых частей системы: это пространство

$$\widetilde{H}^{-1}(\Omega,\Gamma_1):=[H^1(\Omega,\Gamma_1)]^*, \tag{2.6}$$

сопряженное к $H^1(\Omega,\Gamma_1)$ относительно продолжения формы $(f,v)_\Omega$ на их прямое произведение. По аналогии с замечанием в конце п. 2.1 получается, что (2.6) можно отождествить с фактор-пространством пространства $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ по подпространству функционалов, сосредоточенных на $\overline{\Gamma}_1$. Тогда любое f из (2.6) — элемент из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, определенный с точностью до прибавления любого элемента с носителем на $\overline{\Gamma}_1$. Можно просто считать f элементом пространства $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ (продолжая соответствующий функционал на все $H^1(\Omega)$ по теореме Хана–Банаха), фактически это и сделано в [24].

Снова равенство $g=u^+$ подразумевается. Возьмем функцию u_0 из $H^1(\Omega)$ с $u_0^+=g$ на Γ_1 (продолжим g до функции из $H^{1/2}(\Gamma)$ и возьмем u_0 с $u_0^+=g$). Определим Lu_0 формулой $\Phi_\Omega(u_0,v)=(Lu_0,v)_\Omega$, принимая соответствующую конормальную производную равной нулю на Γ_2. Переобозначим разность $u-u_0$ через u. Для нее получается формула Грина (2.5), в которой обе функции u и v принадлежат пространству $H^1(\Omega,\Gamma_1)$, а $Lu=f$ принадлежит сопряженному пространству (2.6). При желании можно принять, что $h=0$.

Все это согласуется со сказанным выше про задачи Дирихле и Неймана.

Теперь, используя коэрцитивность формы $\Phi_\Omega(u,u)$ на $H^1(\Omega,\Gamma_1)$ (ее сейчас достаточно), при помощи леммы Лакса–Мильграма сразу получаем следующую известную теорему. Ср. [24].

Теорема 2.2. *При любых* $f\in\widetilde{H}^{-1}(\Omega,\Gamma_1)$, $g\in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $h\in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ *задача* (1.1)–(1.2) *имеет одно и только одно вариационное решение* $u\in H^1(\Omega)$.

§3. Сведе́ние смешанной задачи к уравнениям на Γ

3.1. Для экономии места предположим, что область $\Omega=\Omega^+$ лежит на стандартном торе $\mathbb{T}^n$ с периодическими координатами и поверхность Γ разделяет его на две области $\Omega^\pm$. Нормаль к Γ в тех точках, где она есть, считаем направленной в Ω^-. Пространство $\widetilde{H}^s(\Omega^+)$ теперь будет подпространством в $H^s(\mathbb{T})$. Коэффициенты системы считаем продолженными на тор с сохранением предположений об их «гладкости» и сильной эллиптичности. Форму $\Phi_\mathbb{T}(u,u)$ предположим коэрцитивной (в усиленном смысле) на $H^1(\mathbb{T})$ (для этого не требуются дополнительные предположения о старшей части системы), а формы

$\Phi_{\Omega^\pm}(u,u)$ — на $H^1(\Omega^\pm)$. Тогда задачи Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$ однозначно разрешимы. Это позволяет воспользоваться готовыми результатами из [3] (где мы следовали идеям из [31], [12] и [24]). Мы продолжим рассмотрение смешанной задачи в $\Omega = \Omega^+$, хотя можно одновременно рассматривать ее и в Ω^-.

Система (1.1) у нас однозначно разрешима в $H^1(\mathbb{T})$ при $f \in H^{-1}(\mathbb{T})$. (Это позволит в дальнейшем считать, что $f = 0$.) Обратный оператор L^{-1} — интегральный:

$$L^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{T}} \mathscr{E}(x,y)f(y)\,dy. \tag{3.1}$$

Это так называемый ньютонов потенциал. Его ядро $\mathscr{E}$ — фундаментальное решение для L. Имея его, составим *потенциал простого слоя*

$$\mathscr{A}\psi(x) = \int_\Gamma \mathscr{E}(x,y)\psi(y)\,dS_y \tag{3.2}$$

и *потенциал двойного слоя*; последний в общем случае определяется формулой

$$\mathscr{B}\varphi(x) = \int_\Gamma (\widetilde{T}_y^+ \mathscr{E}^*(x,y))^* \varphi(y)\,dS_y \qquad (x \notin \Gamma), \tag{3.3}$$

где $\widetilde{T}^+(\,\cdot\,)$ — конормальная производная, отвечающая формально сопряженному к L оператору $\widetilde{L}$ (см. [24]). При $L = -\Delta$ звездочки и волна опускаются. Напомним свойства этих операторов (см. [24] и [3]).

При наших предположениях оператор $\mathscr{A}$ продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\mathbb{T})$ и, значит, в $H^1(\Omega^\pm)$. При $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ функция $u = \mathscr{A}\psi$ удовлетворяет однородной системе $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$ и имеет одинаковые следы $\gamma^\pm u$ на Γ, обозначаемые через $A\psi$; это ограниченный обратимый оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$. Это позволяет строить решение задачи Дирихле в Ω^+ для системы $Lu = 0$ по формуле

$$u = \mathscr{A}A^{-1}u^+. \tag{3.4}$$

Оператор $\mathscr{B}$ действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega^\pm)$, и при $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ функция $u = \mathscr{B}\varphi$ тоже удовлетворяет однородной системе в $\Omega^\pm$. Она имеет следы $\gamma^\pm\mathscr{B}\varphi$ на Γ, и это ограниченные операторы в $H^{1/2}(\Gamma)$. Положим, как в [24], $B = \frac{1}{2}(\gamma^+\mathscr{B} + \gamma^-\mathscr{B})$. Это так называемое *прямое значение потенциала двойного слоя*. Скачок $[u] = u^- - u^+$ функции $u = \mathscr{B}\varphi$ равен φ, поэтому $\gamma^+\mathscr{B} = -\frac{1}{2}I + B$. Оператор справа ограничен и обратим в $H^{1/2}(\Gamma)$. Это позволяет записать решение задачи Дирихле в Ω^+ также в виде

$$u = \mathscr{B}(-\tfrac{1}{2}I + B)^{-1}u^+. \tag{3.5}$$

Операторы $T^\pm$ применимы к функциям $\mathscr{A}\psi$ и $\mathscr{B}\varphi$. При этом $T^+\mathscr{B} = T^-\mathscr{B}$. Оператор $H = -T^\pm\mathscr{B}$ называется *гиперсингулярным оператором*. Он действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$ и обратим. Поэтому решение задачи Неймана для системы $Lu = 0$ в Ω^+ можно строить по формуле

$$u = -\mathscr{B}H^{-1}T^+u. \tag{3.6}$$

Далее, $T^\pm\mathscr{A}$ — ограниченные операторы в $H^{-1}(\Gamma)$. Положим, как в [24], $\widehat{B} = \frac{1}{2}(T^+\mathscr{A} + T^-\mathscr{A})$. Скачок $[T\mathscr{A}\varphi] = T^-\mathscr{A}\varphi - T^+\mathscr{A}\varphi$ равен $-\varphi$, поэтому $T^+\mathscr{A} =$

$\frac{1}{2}I+\widehat{B}$. Это ограниченный обратимый оператор в $H^{-1/2}(\Gamma)$, и решение задачи Неймана в Ω^+ можно строить также по формуле

$$u = \mathscr{A}(\tfrac{1}{2}I+\widehat{B})^{-1}T^+u. \tag{3.7}$$

Нам еще нужны оператор N (Neumann-to-Dirichlet), переводящий данные Неймана T^+u в данные Дирихле u^+, и обратный оператор D (Dirichlet-to-Neumann). Оператор N действует ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, оператор D — в обратную сторону. Для них справедливы неравенства типа Гординга, вытекающие из формулы Грина (2.1) и исходного предположения о коэрцитивности:

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}(D\varphi,\varphi)_\Gamma, \qquad \|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2 \operatorname{Re}(N\psi,\psi)_\Gamma. \tag{3.8}$$

Обратимость операторов D и N следует из предположения об однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана. Она следует также из этих неравенств в силу леммы Лакса–Мильграма. Кроме того, известно, что $BA = A\widehat{B}$, поэтому из написанных выше формул следует, что

$$N = A(\tfrac{1}{2}I+\widehat{B})^{-1} = (\tfrac{1}{2}I+B)^{-1}A. \tag{3.9}$$

В случае бесконечной гладкости поверхности Γ и коэффициентов в L операторы A и N — (сильно эллиптические) ПДО (псевдодифференциальные операторы) порядка -1, а H и D — порядка 1.

3.2. Теперь приведем два варианта составления уравнений на Γ для смешанной задачи. В первом мы следуем работе [30]; ср. также [42], [43].

Этот вариант состоит в следующем. Продолжим g до функции из $H^{1/2}(\Gamma)$, сохранив для продолжения обозначение g. Теперь для решения u нашей задачи мы имеем $u^+ = g + g_0$, где $g_0 \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$. Если мы найдем g_0, то сможем вычислить u как решение задачи Дирихле. С другой стороны, $h = (D(g+g_0))|_{\Gamma_2}$. *Введем оператор*

$$D_{\Gamma_2}\varphi = (D\varphi)|_{\Gamma_2} \tag{3.10}$$

из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$ в $H^{-1/2}(\Gamma_2)$. Он получен из D сужением области определения и ограничением получающихся функций на Γ_2. Получаем уравнение для g_0:

$$D_{\Gamma_2}g_0 = h_0, \tag{3.11}$$

где $h_0 = h - (Dg)|_{\Gamma_2}$ — известная функция.

Теорема 3.1. *Оператор* D_{Γ_2} *обратим.*

Доказательство. Первое из неравенств (3.8) «наследуется» оператором D_{Γ_2}:

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}(D_{\Gamma_2}\varphi,\varphi)_{\Gamma_2}. \tag{3.12}$$

Здесь в форме справа функции находятся в дуальных пространствах $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$. Достаточно воспользоваться леммой Лакса–Мильграма. □

Итак, первый подход состоит по существу в решении уравнения (3.11) с последующим решением, скажем, уравнения $A\psi = g + g_0$, после чего u определяется по формуле $u = \mathscr{A}\psi$. Как видно из (3.5), можно строить решение и в виде потенциала двойного слоя.

Второй подход аналогичен первому, только вместо задачи Дирихле используется задача Неймана. Продолжим h до элемента из $H^{-1/2}(\Gamma)$. После этого $T^+u = h + h_0$, где $h_0 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. *Введем оператор*

$$N_{\Gamma_1}\psi = (N\psi)|_{\Gamma_1} \tag{3.13}$$

из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$. Для h_0 получим уравнение

$$N_{\Gamma_1}h_0 = g_1, \tag{3.14}$$

где g_1 — известная функция $g - (Nh)|_{\Gamma_1}$.

Теорема 3.2. *Оператор* N_{Γ_1} *обратим.*

Доказательство. Второе неравенство в (3.8) для N наследуется оператором N_{Γ_1}:

$$\|\psi\|^2_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)} \leqslant C_2 \operatorname{Re}(N_{\Gamma_1}\psi, \psi)_{\Gamma_1}. \tag{3.15}$$

Функции справа принадлежат дуальным пространствам $H^{1/2}(\Gamma_1)$ и $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$, и мы опять применяем лемму Лакса–Мильграма. $\square$

Второй вариант состоит, таким образом, в том, что мы решаем сначала уравнение (3.14), затем, скажем, уравнение $H\varphi = h+h_0$, после чего находим решение в виде $u = -\mathscr{B}\varphi$. Можно строить решение и в виде потенциала простого слоя, см. (3.7).

Замечания. 1. Операторы N_{Γ_1} и D_{Γ_2} для частей замкнутой липшицевой поверхности являются аналогами операторов N и D для всей поверхности и наследуют свойства последних — неравенства типа Гординга и обратимость. Операторы A_S и H_S с близкими свойствами рассмотрены в [4]. В специальных случаях они встречались, в частности, в [42], [43], [30].

2. Названия «Neumann-to-Dirichlet operator» заслуживает не только оператор N_{Γ_1}, но и оператор $D^{-1}_{\Gamma_1}$, действующий из $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. Это операторы с разными областями определения и разными областями значений. На Γ_2 тоже есть два оператора, N_{Γ_2} и $D^{-1}_{\Gamma_2}$.

Приложения операторов N, D, N_{Γ_1}, D_{Γ_2} чрезвычайно многообразны, см., например, [23], [48] и приведенную там литературу.

§4. Регулярность решений

4.1. Пространства H^s_p бесселевых потенциалов и пространства B^s_p Бесова. (См., например, [47], [21], [29], [2].) Условимся считать, что

$$s \in \mathbb{R}, \quad 1 < p < \infty, \quad p + p' = pp'. \tag{4.1}$$

Пространство $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) = J^{-s}L_p(\mathbb{R}^n), \tag{4.2}$$

где J^{-s} — тот же оператор, что и в (1.6). При целом $s \geqslant 0$ это пространство Соболева $W^s_p(\mathbb{R}^n)$.

Пространства Слободецкого $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ определяются при нецелых $s > 0$. Если $0 < s < 1$, то

$$\|u\|^p_{W^s_p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \iint \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|y - x|^{n+sp}}\,dx\,dy. \tag{4.3}$$

Пространство Бесова $B_p^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$B_p^s(\mathbb{R}^n) = J^{\sigma-s} W_p^\sigma(\mathbb{R}^n), \qquad 0 < \sigma < 1, \tag{4.4}$$

при изменении $\sigma \in (0,1)$ норма заменяется эквивалентной нормой. При нецелом $s > 0$ это пространства Слободецкого.

При $p = 2$ пространства H_p^s и B_p^s совпадают с H^s.

Ниже в этом пункте букву H можно заменить на B.

Пространства $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ на их прямое произведение.

Пространство $H_p^s(\Omega)$ состоит из сужений элементов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ на Ω с нормой inf. Тот же самый, что и раньше, оператор $\mathscr{E}$ является ограниченным оператором продолжения элементов из $H_p^s(\Omega)$ до элементов из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ [37].

Пространство $\widetilde{H}_p^s(\Omega)$ определяется как подпространство в $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ элементов с носителями в $\overline{\Omega}$. При $-1/p' < s < 1 + 1/p$, $s \neq 1/p$ его можно отождествить с пополнением $\mathring{H}_p^s(\Omega)$ линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H_p^s(\Omega)$.

Пространства $\widetilde{H}_{p'}^{-s}(\Omega)$ и $H_p^s(\Omega)$ дуальны относительно формы (1.7). Пространства $H_p^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}_p^s(\Omega)$ отождествляются при $-1/p' < s < 1/p$.

Пространства $B_p^s(\Gamma)$ вводятся для $|s| \leqslant 1$ при помощи разбиения единицы на Γ и норм в $B_p^s(\mathbb{R}^{n-1})$. Пространства $B_p^s(\Gamma)$ и $B_{p'}^{-s}(\Gamma)$ дуальны относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$ на их прямое произведение.

Оператор перехода к следу действует ограниченным образом из $H_p^{s+1/p}(\Omega)$ и из $B_p^{s+1/p}(\Omega)$ в $B_p^s(\Gamma)$ при $0 < s < 1$. Эти два оператора имеют общий правый обратный [22].

Пусть Γ_0 — область на Γ. Пространство $B_p^s(\Gamma_0)$ определяется как состоящее из сужений на Γ_0 элементов из $B_p^s(\Gamma)$ с нормой inf. Имеется ограниченный оператор продолжения элементов из $B_p^s(\Gamma_0)$ до элементов из $B_p^s(\Gamma)$, не зависящий от s, p. Пространство $\widetilde{B}_p^s(\Gamma_0)$ определяется как подпространство в $B_p^s(\Gamma)$ элементов с носителями в $\overline{\Gamma}_0$. Пространства $\widetilde{B}_{p'}^{-s}(\Gamma_0)$ и $B_p^s(\Gamma_0)$ дуальны относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_0)$ на их прямое произведение. Пространства $B_p^s(\Gamma_0)$ и $\widetilde{B}_p^s(\Gamma_0)$ отождествляются при $-1/p' < s < 1/p$.

4.2. Решения смешанной задачи теперь ищутся в $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$, где обязательно $|s| < 1/2$: в (1.2)

$$g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma_1), \quad h \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma_2). \tag{4.5}$$

Вариационная (слабая) постановка смешанной задачи сохраняет вид (2.5). Пробные функции v принадлежат подпространству $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega, \Gamma_1)$ функций пространства $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_1. Ср. [27].

Правая часть f системы принадлежит сопряженному пространству

$$\widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega, \Gamma_1) := [H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega, \Gamma_1)]^* \tag{4.6}$$

относительно продолжения формы (1.7).

Здесь всюду пространства H можно заменить пространствами B.

Допустимые точки (s,t), $t=1/p$, образуют квадрат

$$Q=\{(s,t): |s|<1/2,\ 0<t<1\}. \tag{4.7}$$

Частные случаи смешанной задачи — задачи Дирихле и Неймана. Про них мы знаем [3], что они однозначно разрешимы при $|s|<\varepsilon$, $|t-1/2|<\delta$ с достаточно малыми ε и δ. Мы хотим получить аналогичный результат для смешанной задачи. Мы сделаем это, как в [4], рассматривая операторы типа потенциала в шкалах пространств на границе. Ср. [17], [27], [11].

Прежде всего заметим, что операторы

$$\begin{aligned} &A, N\colon B_p^{-1/2+s}(\Gamma)\to B_p^{1/2+s}(\Gamma), &&H, D\colon B_p^{1/2+s}(\Gamma)\to B_p^{-1/2+s}(\Gamma),\\ &\tfrac12 I\pm B\colon B_p^{1/2+s}(\Gamma)\to B_p^{1/2+s}(\Gamma), &&\tfrac12 I\pm \widehat{B}\colon B_p^{-1/2+s}(\Gamma)\to B_p^{-1/2+s}(\Gamma)\end{aligned} \tag{4.8}$$

ограничены и обратимы при тех же (s,t) [3]. При этом $N=D^{-1}$ и сохраняются соотношения (3.9).

Оператор N_{Γ_1} действует ограниченным образом из $\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1)$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$ (при тех же (s,t)). *Каждое из этих двух семейств пространств образует интерполяционную шкалу* относительно комплексного метода интерполяции по каждому из индексов. Мы объяснили это в [4] при рассмотрении операторов A_S и H_S. В точке $(s,t)=(0,1/2)$ наш оператор обратим. Значит, применима теорема Шнейберга [40], и получается

Теорема 4.1. *Оператор* $N_{\Gamma_1}\colon \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1)\to B_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$ *остается обратимым при* $|s|<\varepsilon$, $|t-1/2|<\delta$ *с достаточно малыми* ε *и* δ.

При этих (s,t) мы сейчас установим однозначную разрешимость смешанной задачи. Сначала проверим единственность. Пусть $g=0$ и $h=0$. Тогда $T^+u=h_0\in\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1)$. Значит, $Nh_0=u^+$ на Γ и $N_{\Gamma_1}h_0=0$. Но оператор N_{Γ_1} обратим, поэтому $h_0=0$ и $T^+u=0$ на Γ. Остается воспользоваться единственностью для задачи Неймана. Мы использовали второй вариант подхода к смешанной задаче из п. 3.2. С этим вариантом очевидным образом получается и существование. Это дает основной результат в настоящем пункте.

Теорема 4.2. *Смешанная задача* (1.1)–(1.2) *с* $f=0$, $g\in B_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$, $h\in B_p^{-1/2+s}(\Gamma_2)$ *остается однозначно разрешимой при* $|s|<\varepsilon$, $|t-1/2|<\delta$ *с достаточно малыми* ε *и* δ.

В этих рамках, чем «лучше» правые части, тем «лучше» решение. Это и есть результат о регулярности. Он автоматически следует из теоремы 4.2.

Замечания. 1. Вместо N_{Γ_1} можно использовать оператор D_{Γ_2}, действующий из $\widetilde{B}_p^{1/2+s}(\Gamma_2)$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma_2)$, *для него тоже получается ограниченность и обратимость при* $|s|<\varepsilon$, $|t-1/2|<\delta$ с достаточно малыми ε и δ. Затем используется первый вариант подхода к смешанной задаче из п. 3.2.

2. Как мы видим, в этих более общих пространствах *сохраняются оба варианта сведе́ния смешанной задачи к эквивалентным уравнениям на границе* и решения этих уравнений при помощи операторов типа потенциала.

3. *Теорема* 4.2 *обобщается на случай ненулевой правой части* f *в уравнении* $Lu=f$. Действительно, пусть $f\in\widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega,\Gamma_1)$. Тогда мы можем считать f элементом пространства $\widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$. (Букву H можно заменить буквой B.) Пусть u_0 — решение задачи Неймана для уравнения $Lu_0=f$ с

нулевой конормальной производной. Вычитая u_0 из u, приходим к задаче, к которой применима теорема 4.2.

§ 5. Спектральные задачи

5.1. Задача со спектральным параметром в системе. Рассмотрим задачу

$$Lu = \lambda u \quad \text{в } \Omega, \quad u^+ = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad T^+u = 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{5.1}$$

Пусть сначала оператор L формально самосопряженный: $L = \widetilde{L}$. Считая уравнение $Lu = f$ однозначно разрешимым в $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ при $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega, \Gamma_1)$, введем в последнем пространстве скалярное произведение (ср. [34])

$$\langle f_1, f_2 \rangle_\Omega := (L^{-1} f_1, f_2)_\Omega. \tag{5.2}$$

Относительно него неограниченный оператор L в этом пространстве (с областью определения $H^1(\Omega, \Gamma_1)$) остается самосопряженным. Собственные значения положительны. Как и в других задачах, рассмотренных раньше в [3] и [5], собственные значения и собственные функции совпадают с собственными значениями и собственными функциями аналогичного оператора в $L_2(\Omega)$. А так как пространство $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ содержит $\widetilde{H}^1(\Omega) = \mathring{H}^1(\Omega)$ и содержится в $H^1(\Omega)$, то действует результат Метивье [25], согласно которому для считающей функции $N_L(\lambda)$ — числа собственных значений с учетом кратностей, меньших λ, — справедлива асимптотика

$$N_L(\lambda) = c_L \lambda^{n/2} + O(\lambda^{(n-1/2)/2}), \tag{5.3}$$

где коэффициент c_L — тот же, что и в задачах Дирихле и Неймана (см. [5]).

Далее, справедливы такие же утверждения о собственных функциях, как в случаях этих задач [5]. Из собственных функций составляется ортонормированный базис в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega, \Gamma_1)$. Они принадлежат пространству $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ и там образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения $(Lu, v)_\Omega$, кстати, равного $\Phi_\Omega(u, v)$. Этот результат распространяется на промежуточные пространства. Более того, можно удлинить шкалу этих пространств влево и вправо на ε. Если же выйти в пространства, отвечающие значениям t с $|t - 1/2| < \delta$, $t \neq 1/2$, то там сохраняется полнота собственных функций и суммируемость рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского.

Если только главная часть оператора L формально самосопряженная, то собственные значения лежат в сколь угодно узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ с некоторого номера и имеют асимптотику с тем же главным членом. Сохраняются утверждения о гладкости корневых функций, об их полноте и о суммируемости.

Если совсем отказаться от предположений о самосопряженности, то сохраняется оценка собственных значений $|\lambda_j(L^{-1})| \leqslant Cj^{-2/n}$. Наибольшая общность, в которой мы можем получить утверждения о полноте и о суммируемости, — это случай, когда все значения формы $\Phi_\Omega(u, u)$ лежат в угле раствора меньше $2\pi/n$ с биссектрисой $\mathbb{R}_+$. Ср. [5].

5.2. Задачи Пуанкаре–Стеклова со спектральным параметром на части границы. Рассмотрим две задачи.

$$\text{I.} \quad Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad T^+u = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \lambda T^+u = u^+ \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Здесь $T^+u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ и (см. п. 3.2) $N_{\Gamma_1}T^+u = u^+ \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. Поэтому для *собственных* функций спектральной задачи I получается уравнение $N_{\Gamma_1}\psi = \lambda\psi$, где $\psi = T^+u$, и оно эквивалентно этой задаче при $L = \widetilde{L}$.

$$\text{II.}\quad Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u^+ = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \quad \lambda T^+u = u^+ \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Здесь $u^+ \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ и (см. п. 3.2) $D_{\Gamma_1}u^+ = T^+u \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Поэтому для *собственных* функций спектральной задачи II получается уравнение $D_{\Gamma_1}^{-1}\psi = \lambda\psi$, где снова $\psi = T^+u$, и оно эквивалентно этой задаче при $L = \widetilde{L}$.

Во второй задаче мы поменяли местами Γ_1 и Γ_2 по сравнению с п. 3.2, чтобы ниже сопоставить соответствующие операторы.

Спектральные свойства операторов N_{Γ_1} и D_{Γ_1} аналогичны спектральным свойствам соответственно операторов A_S и H_S (при $\Gamma_1 = S$), описанным в [4]. Скалярное произведение $\langle\psi_1, \psi_2\rangle_{\Gamma_1}$ при $L = \widetilde{L}$ определяем в первом случае в $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ как $(N_{\Gamma_1}\psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1}$ и во втором случае в $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ как $(D_{\Gamma_1}^{-1}\psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1}$.

В частности, мы имеем в виду свойства гладкости собственных и корневых функций, результаты об ортонормированном базисе из собственных функций при $p = 2$, если $L = \widetilde{L}$, о полноте и суммируемости рядов по корневым функциям методом Абеля–Лидского в остальных случаях. Если оператор L имеет формально самосопряженную главную часть, то собственные значения лежат в сколь угодно узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ с некоторого номера. Наибольшая общность, при которой получаются утверждения о полноте и суммируемости, — это случай, когда все значения квадратичных форм $\Phi_{\Omega^\pm}(u, u)$ лежат в угле раствора меньше $\pi/(n-1)$ с биссектрисой $\mathbb{R}_+$.

Дополнительные результаты о полноте получаются как следствия (плотных) вложений рассматриваемых пространств.

§6. Спектральные асимптотики

Здесь мы хотим получить асимптотические формулы для собственных значений операторов N_{Γ_1} и $D_{\Gamma_1}^{-1}$. Но до этого рассмотрим операторы на Γ. Сформулируем сначала следующие предположения.

1°. $L = \widetilde{L}$.

2°. Поверхность Γ является почти гладкой (см. п. 1.1).

3°. L — скалярный оператор или матричный оператор, старшая часть которого совпадает с оператором Ламе.

Как показано в [5], при этих условиях можно вывести асимптотическую формулу для собственных значений $\lambda_j(N)$ оператора N

$$\lambda_j(N) \sim C_N j^{-1/(n-1)} \tag{6.1}$$

(в том смысле, что разность левой и правой частей есть $o(j^{-1/(n-1)})$) из результатов работы [6] в сочетании с приведенной выше формулой (3.9) и очень глубокими известными результатами об обратимости операторов $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ в $L_2(\Gamma)$ [28], [14]. Собственные значения нумеруются в порядке невозрастания с учетом кратностей.

Мы освободимся здесь от ограничения 3° при помощи вариационного подхода к асимптотикам. При этом будем рассматривать оператор bN, где функцию

b будем для начала считать мультипликатором в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ и для простоты неотрицательной функцией. Липшицеву поверхность Γ будем считать почти гладкой в окрестности ее носителя. Результат сформулирован ниже в теореме 6.5. Ср. с [1] и в особенности с работой [45], где рассматривались кусочно-гладкие поверхности.

Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, для простоты неотрицательный — с неотрицательными собственными значениями. Считающая функция $N(\lambda) = N(\lambda, T)$ для его положительных собственных значений $\lambda_j(T)$ ($j = 1, 2, \dots$) — это число собственных значений с учетом кратностей, бо́льших λ ($\lambda > 0$). Асимптотика $N(\lambda) \sim \beta\lambda^{-\alpha}$ при $\lambda \to 0$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) эквивалентна асимптотике $\lambda_j \sim \beta' j^{-1/\alpha}$ при $j \to \infty$, $\beta' = \beta^{1/\alpha}$.

Вариационное отношение для T имеет вид $R(x) = (Tx, x)/(x, x)$. Собственные значения являются «последовательными максимумами» этого отношения:

$$\lambda_{j+1}(T) = \min_{\operatorname{codim} X \leqslant j} \ \max_{0 \neq x \in X} R(x), \tag{6.2}$$

где X — подпространства в H.

Нам понадобятся известные леммы, мы приведем их в упрощенном виде (ср. [8, добавление 1] или [45, п. 1]). Первая из них позволяет сравнивать считающие функции операторов, действующих в разных пространствах.

Лемма 6.1. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_1$, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_2$, T_1 и T_2 — компактные неотрицательные операторы в этих пространствах, S — ограниченный оператор из H_1 в H_2, $(T_1x, x)_1 = 0$ при $Sx = 0$ и*

$$(T_1x, x)_1/(x, x)_1 \leqslant (T_2Sx, Sx)_2/(Sx, Sx)_2 \qquad (x \in H_1,\ Sx \neq 0). \tag{6.3}$$

Тогда $N(\lambda, T_1) \leqslant N(\lambda, T_2)$. В частности, это верно, если $H_1 \subset H_2$, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_1 = (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_2$ на H_1 и S — оператор вложения; знаменатели в (6.3) *в этом случае не нужны.*

Лемма 6.2. *Пусть H — ортогональная сумма $H_1 \oplus H_2$, подпространства H_1 и H_2 инвариантны относительно неотрицательного оператора T в H и T_j — сужения этого оператора на H_j. Тогда $N(\lambda, T) = N(\lambda, T_1) + N(\lambda, T_2)$.*

Лемма 6.3 (М. Ш. Бирман–М. З. Соломяк). *Пусть компактный неотрицательный оператор T в гильбертовом пространстве H при любом $\varepsilon > 0$ допускает представление $T = T'_\varepsilon + T''_\varepsilon$, где T'_ε и T''_ε — компактные операторы, T'_ε неотрицателен, $\lambda_j(T'_\varepsilon) \sim C(T'_\varepsilon) j^{-\sigma}$ при некотором $\sigma > 0$ и $\limsup |\lambda_j(T''_\varepsilon)| j^\sigma \leqslant \varepsilon$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ величина $C(T'_\varepsilon)$ имеет конечный предел $C(T)$ и $\lambda_j(T) \sim C(T) j^{-\sigma}$.*

6.1. Оператор bN. Коэффициенты в L будем сначала считать бесконечно гладкими. Введем в $H^{-1/2}(\Gamma)$ скалярное произведение

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_\Gamma = (N\psi_1, \psi_2)_\Gamma. \tag{6.4}$$

Оператор bN остается компактным и самосопряженным. Рассмотрим вариационное отношение

$$R_b(\psi) = \langle bN\psi, \psi \rangle_\Gamma / \langle \psi, \psi \rangle_\Gamma = (bN\psi, N\psi)_\Gamma/(N\psi, \psi)_\Gamma \qquad (\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{6.5}$$

Считая, что $\psi = T^+u$ для решения $u \in H^1(\Omega)$ системы $Lu = 0$, имеем $N\psi = u^+$. Поэтому числитель равен $(bu^+, u^+)_\Gamma$, а знаменатель равен $(T^+u, u^+)_\Gamma$, т. е. $\Phi_\Omega(u,u)$ в силу формулы Грина. Отношение (6.5) переписывается в виде

$$Q_b(u) = (bu^+, u^+)_\Gamma / \Phi_\Omega(u,u). \tag{6.6}$$

Теперь числитель — форма некоторого компактного оператора в подпространстве пространства $H^1(\Omega)$, состоящем из решений u системы $Lu = 0$. За скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ принимаем $\Phi_\Omega(u,v)$. Тогда ортогональное дополнение к подпространству решений составляют функции с $u^+ = 0$, это уже отмечалось в п. 2.1. Поэтому (см. лемму 6.2) будем рассматривать отношение (6.6) на всех $u \in H^1(\Omega)$. (На самом деле переход от (6.5) к (6.6) не обязателен.)

Теперь воспользуемся тем, что для липшицевой области Ω можно построить области $\widetilde{\Omega}$ и $\widehat{\Omega}$ с бесконечно гладкими границами $\widetilde{\Gamma}$ и $\widehat{\Gamma}$, такие, что $\widetilde{\Omega} \subset \Omega \subset \widehat{\Omega}$ и эти границы сколь угодно близки к Γ. Более точно, между этими гладкими границами и Γ имеется взаимно однозначное соответствие и расстояние между соответствующими точками становится равномерно сколь угодно малым. См., например, [49].

В нашей ситуации, зафиксировав окрестность U сингулярного множества Γ_{sing} со сколь угодно малой мерой, мы можем принять, что $\widetilde{\Gamma}$ и $\widehat{\Gamma}$ *совпадают с* Γ *вне* U. Пусть θ_U — гладкое приближение к характеристической функции дополнения к U с носителем в этом дополнении. Тогда для соответствующих отношений $\widetilde{Q}_{b\theta_U}(u)$ и $\widehat{Q}_{b\theta_U}(u)$ мы имеем

$$\widehat{Q}_{b\theta_U}(u) \leqslant Q_{b\theta_U}(u) \leqslant \widetilde{Q}_{b\theta_U}(u) \tag{6.7}$$

на функциях из $H^1(\widehat{\Omega})$ и их сужениях на Ω и $\widetilde{\Omega}$. Левое и правое отношения отвечают гладким задачам, и соответствующие операторы $b\theta_U\widehat{N}$ и $b\theta_U\widetilde{N}$ имеют известную и одинаковую асимптотику собственных значений (мы имеем в виду ее старший член), см. [9]. Отсюда аналогичный результат получается для $b\theta_U N$. Это вытекает из леммы 6.1.

Теперь рассмотрим отношение $Q_c(u)$, где $c = b(1-\theta_U)$. В силу ограниченности оператора перехода к следу

$$Q_c(u) \leqslant C \int_\Gamma |c||u|^2 dS \Big/ \|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{6.8}$$

и справа Γ можно заменить на $S = \operatorname{supp} c$. После этого отношение справа отвечает компактному неотрицательному оператору в $H^{1/2}(S)$.

Лемма 6.4. *Пусть S — область на ограниченной липшицевой поверхности Γ размерности $n-1$ с липшицевой границей и $c(x)$ — неотрицательная функция из $L_r(S)$ на этой поверхности. Тогда для считающей функции $N(\lambda, T)$ компактного оператора T в $H^s(S)$, $s > 0$, с вариационным отношением*

$$\int_S c(x)|u(x)|^2 dS \Big/ \|u\|^2_{H^s(S)} \tag{6.9}$$

справедливо неравенство

$$N(\lambda, T) \leqslant C_1 \|c\|^\tau_{L_r(S)} \lambda^{-\tau} \tag{6.10}$$

при $r > 1$, если $n-1 = 2s$, и $r = (n-1)/(2s)$, если $n-1 > 2s$, с $\tau = (n-1)/(2s)$.

Доказательство. В случае, когда S — область в $\mathbb{R}^{n-1}$, это лемма 1.7 в [45]. Как там указано, это утверждение получено в [8] (теорема 4.1) для целых s, но доказательство сохраняется при нецелых s. Лемма установлена для скалярных функций, но легко переносится на вектор-функции.

Чтобы распространить ее на случай области на липшицевой поверхности, можно принять, что эта область мала и допускает представление $x_n = \phi(x')$ с липшицевой функцией $\phi(x')$ в проекции этой области на x'-плоскость. Остается учесть, что $dS = (1 + |\nabla\phi(x')|^2)^{1/2}\,dx'$ и градиент здесь ограничен. □

В нашей ситуации $s = 1/2$, и лемма приводит к оценке

$$|\lambda_j(T)| \leqslant C_2 \|c\|_{L_r(S)} \lambda^{-(n-1)}, \tag{6.11}$$

решающей дело, поскольку L_r-норма функции $c = b(1-\theta_U)$ стремится к нулю, когда окрестность U стягивается к Γ_{sing}, так как при наших предположениях о b это ограниченная функция. Здесь следует воспользоваться леммой 6.3.

Предположение о гладкости коэффициентов в L снимается при помощи аппроксимации исходных коэффициентов гладкими (ср. [45, п. 5]). Получается

Теорема 6.5. *Пусть $L = \widetilde{L}$, неотрицательная функция b — мультипликатор в $H^{\pm1/2}(\Gamma)$ и поверхность Γ является почти гладкой в окрестности ее носителя. Тогда для собственных значений оператора bN справедлива асимптотика вида* (6.1).

Коэффициент C_{bN} вычисляется по формуле

$$C_{bN}^{n-1} = (2\pi)^{-(n-1)} \iint_{T^*\Gamma} b(x') n_\alpha(x',\xi')\,dx'd\xi' \tag{6.12}$$

в случае гладких коэффициентов в L; здесь из Γ выбрасывается сингулярное множество. Через $\alpha(x',\xi')$ обозначен главный символ оператора N и через $n_\alpha(x',\xi')$ число его собственных значений, больших 1. Если коэффициенты в L негладкие, то при их аппроксимации гладкими операторы bN для этих гладких задач сходятся по операторной норме к интересующему нас оператору. Нужный коэффициент получается предельным переходом, предел существует в силу той же леммы 6.3. Он вычисляется через главный символ оператора L.

Из-за недостатка места мы не приводим обобщение на случай функции b со значениями разных знаков. Однако отметим следующее обобщение.

Теорема 6.6. *Утверждение теоремы* 6.5 *остается в силе в случае функции b, принадлежащей $L_r(\Gamma)$, где $r = n-1$ при $n > 2$ и $r > 1$ при $n = 2$, если определить bN как оператор с вариационным отношением* (6.5) *или* (6.6).

При использовании, например, отношения (6.6) имеется в виду оператор в $H^1(\Omega)$, имеющий форму $(bu^+, v^+)_\Gamma$. Эта форма определена в силу теорем вложения и неравенства Гёльдера. В этом случае b уже, вообще говоря, не является мультипликатором в $H^{\pm1/2}(\Gamma)$.

6.2. Оператор N_{Γ_1}. В этом случае в качестве b хотелось бы взять характеристическую функцию θ области Γ_1. Но это не мультипликатор в $H^{1/2}(\Gamma)$. Однако эта функция является мультипликатором в $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$; более того, умножение на нее не меняет элементы этого пространства. Это позволяет переписать уравнение $N_{\Gamma_1}\psi = \lambda\psi$ в виде

$$\theta N \theta \psi = \lambda \theta \psi, \tag{6.13}$$

по крайней мере, считая u^+ функцией из $H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma_1)$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Соответствующее вариационное отношение имеет вид

$$(\theta u^+, u^+)_\Gamma / \Phi_\Omega(u, u). \tag{6.14}$$

Здесь u принадлежит подпространству решений системы $Lu = 0$ в $H^1(\Omega)$ с $T^+u = 0$ вне Γ_1, и теперь можно считать, что $u^+ \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. В силу формулы Грина

$$\Phi_\Omega(u, v) = (T^+u, v^+)_{\Gamma_1} \tag{6.15}$$

ортогональное дополнение к указанному подпространству состоит из функций u с $u^+ = 0$ на Γ_1. На них отношение (6.14) равно нулю. Поэтому его можно рассматривать на всех $u \in H^1(\Omega)$ с $Lu = 0$ и, далее, на всем $H^1(\Omega)$. Теперь применима теорема 6.6, и мы приходим к желаемому результату:

Теорема 6.7. *Пусть $L = \widetilde{L}$ и поверхность Γ почти гладкая в окрестности замыкания области Γ_1. Тогда имеет место асимптотика*

$$\lambda_j(N_{\Gamma_1}) \sim C_{N_{\Gamma_1}} j^{-1/(n-1)}. \tag{6.16}$$

Здесь $C_{N_{\Gamma_1}}$ определяется формулой вида (6.12) *с $b = 1$ и Γ_1 вместо Γ.*

6.3. Оператор $D_{\Gamma_1}^{-1}$. Основной результат в этом пункте — теорема 6.8 — получен автором совместно с Т. А. Суслиной.

Оператор $D_{\Gamma_1}^{-1}$ — это оператор, отвечающий задаче Дирихле с $u^+ = 0$ вне Γ_1. Для него вариационное отношение имеет вид

$$(u^+, u^+)_{\Gamma_1} / (Du^+, u^+)_{\Gamma_1} \qquad (Lu = 0 \text{ в } \Omega,\ u^+ \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)). \tag{6.17}$$

Асимптотика для гладких задач такого вида исследована в [44]. Ключевой момент в нашем случае состоит в проверке того, что *отношение* (6.17), *если Γ и $\partial\Gamma_j$ гладкие, можно заменить на*

$$(\theta u^+, u^+)_\Gamma / (Du^+, u^+)_\Gamma \quad (Lu = 0 \text{ в } \Omega,\ u^+ \in H^{1/2}(\Gamma)) \tag{6.18}$$

в смысле совпадения асимптотик. Относительно просто это можно сделать в нашем случае следующим образом. Мы дважды воспользуемся леммой 6.1.

Пусть функции α и β принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, их значения заключены между 0 и 1, $\operatorname{supp}\alpha \subset \Gamma_1$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; α аппроксимирует функцию θ. Мы имеем, полагая $\varphi = u^+$,

$$(\alpha\varphi, \alpha\varphi)_\Gamma / [(D\alpha\varphi, \alpha\varphi)_\Gamma + (D\beta\varphi, \beta\varphi)_\Gamma] \leqslant (\alpha\varphi, \alpha\varphi)_\Gamma / (D\alpha\varphi, \alpha\varphi)_\Gamma. \tag{6.19}$$

Здесь φ — функция из $H^{1/2}(\Gamma)$. В качестве S берем отображение $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ этого пространства в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$. Добавочно заметим, что формы в знаменателях в (6.18) и слева в (6.19) совпадают с точностью до прибавления формы ПДО нулевого порядка ввиду совпадения главных символов. Известно, что такое прибавление не отражается на асимптотике (см. [8] или [45, п. 1]).

Теперь пусть α_1 — неотрицательная функция из $C^\infty(\Gamma)$, равная 1 в окрестности замыкания области Γ_1, тоже аппроксимирующая θ. Имеем

$$(\varphi, \varphi)_\Gamma / (D\varphi, \varphi)_\Gamma = (\alpha_1\varphi, \alpha_1\varphi)_\Gamma / (D\varphi, \varphi)_\Gamma. \tag{6.20}$$

Здесь φ — функция из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ и S — вложение этого пространства в $H^{1/2}(\Gamma)$.

Лемма 6.1 показывает, что считающая функция для оператора с отношением (6.17) заключена между считающими функциями для операторов с отношениями слева в (6.19) и $(\alpha_1\varphi,\alpha_1\varphi)_\Gamma/(D\varphi,\varphi)_\Gamma$, $\varphi\in H^{1/2}(\Gamma)$. Асимптотика операторов с такими вариационными отношениями известна из [9]. Теперь предельный переход с использованием леммы 6.3 доказывает выделенное выше утверждение. После этого фактически вариационное отношение, а значит, и асимптотика такие же, как в п. 6.2.

На случай почти гладкой поверхности результат распространяется при помощи соображений, аналогичных использованным в п. 6.1. Получается

Теорема 6.8. *Если $L=\widetilde{L}$ и поверхность Γ почти гладкая в окрестности замыкания области Γ_1, то для собственных значений оператора $D_{\Gamma_1}^{-1}$ имеет место асимптотика вида* (6.1) *с тем же коэффициентом, что и для N_{Γ_1}.*

Пример (ср. [23, с. 50]). Рассмотрим уравнение Лапласа в квадрате $\{(x,y):0<x<\pi,\,0<y<\pi\}$. Пусть Γ_1 — его левая сторона, а Γ_2 состоит из трех других сторон. Задача I имеет решения $\operatorname{ch}k(\pi-x)\cos ky$ $(k=0,1,\dots)$. Задача II — решения $\operatorname{sh}k(\pi-x)\sin ky$ $(k=1,2,\dots)$. Собственные функции: $\cos ky$ в задаче I и $\sin ky$ в задаче II. Собственные значения: соответственно $\operatorname{cth}k\pi/k$ и $\operatorname{th}k\pi/k$. Они разные в двух задачах, но асимптотика одинакова.

6.4. Замечания к работам [4] **и** [5]**.** Вариационное отношение для оператора H^{-1} имеет вид (ср. [5, предложение 9.1])

$$(\varphi,\varphi)_\Gamma/(H\varphi,\varphi)_\Gamma \qquad (\varphi=[u]\in H^{1/2}(\Gamma),\ u=\mathscr{B}\varphi). \tag{6.21}$$

Здесь $[Tu]=0$, и решения системы $Lu=0$ в $\Omega^\pm$ определяются скачком $[u]$. Соображения из п. 6.1 в случае почти гладкой Γ применимы к (6.21) непосредственно. По сравнению с [5] *удается снять условие* 3°. Далее, *для оператора H_S^{-1} можно получить аналог теоремы* 6.8 *по существу как в предыдущем пункте.* Подход в [4] к H_S^{-1} нуждается в некоторой ревизии, возможной при помощи вариационных соображений, но в этом уже нет нужды.

К операторам A и A_S тоже возможен вариационный подход, но он не дает ничего нового по сравнению с [36] и [4]. Ограничимся замечанием, что вариационному отношению для A можно придать вид $(u^\pm,u^\pm)_\Gamma/\Phi_{\mathbb{T}}(u,u)$.

§7. Некоторые обобщения

7.1. Более общие задачи Пуанкаре–Стеклова. Мы хотим теперь рассмотреть случай, когда граница Γ разбита на три области Γ_1, Γ_2 и Γ_3: в первой ставится однородное условие Дирихле, во второй — однородное условие Неймана и в третьей — спектральное условие Пуанкаре–Стеклова. Будем считать, что имеются две замкнутые липшицевы поверхности размерности $n-2$ без самопересечений и без общих точек, отделяющие эти области одну от другой. Ср. [34].

Рассмотрим для определенности случай, когда область Γ_3 разделяет области Γ_1 и Γ_2. Введем следующие обозначения. Через $\Gamma_{2,3}$ обозначим дополнение к $\overline{\Gamma}_1$ и через $\Gamma_{1,3}$ — дополнение к $\overline{\Gamma}_2$. Пусть $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ — пространство сужений на Γ_3 функций из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{2,3})$ с нормой inf и $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ — пространство сужений на Γ_3 элементов из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{1,3})$ с нормой inf. Далее, через $\mathscr{E}_2$ обозначим оператор продолжения функций из $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ через границу области Γ_2 до функций из

$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{2,3})$ и через $\mathscr{E}_1$ — оператор продолжения элементов из $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ через границу области Γ_1 до элементов из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{1,3})$. Эти два оператора получаются из известных нам операторов продолжения локализацией.

Предложение 7.1. *Пространства $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ и $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ дуальны относительно продолжения формы $(\varphi,\psi)_{\Gamma_3}=(\mathscr{E}_1\varphi,\mathscr{E}_2\psi)_\Gamma$ на их прямое произведение.*

Поясним, что на границе с областью Γ_1 пространство $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ локально «похоже» на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_3)$, а $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ — на $H^{-1/2}(\Gamma_3)$, и на границе с Γ_2 пространство $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ локально «похоже» на $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$, а $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$ — на $H^{1/2}(\Gamma_3)$. Поэтому на обеих частях границы области Γ_3 ситуация стандартна с точки зрения двойственности, хотя формально эти пространства немного нового типа.

Формула Грина сейчас имеет вид $\Phi_\Omega(u,v)=(T^+u,v^+)_{\Gamma_3}$. Из наших результатов в §§2–3 следует, что решение в рассматриваемом классе однозначно определяется, если задать данные Дирихле в $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$, при этом данные Неймана на Γ_3 попадают в $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$. Точно так же решение в нашем классе однозначно определяется, если задать данные Неймана в $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$, при этом данные Дирихле на Γ_3 попадают в $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)$. Поэтому определены два обратимых и взаимно обратных оператора

$$D_{\Gamma_3}\colon \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3)\to\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3),\qquad N_{\Gamma_3}\colon \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)\to\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_3),\tag{7.1}$$

переводящие данные Дирихле на Γ_3 в данные Неймана на Γ_3 и обратно. На этих решениях мы имеем

$$\Phi_\Omega(u,u)=(T^+u,N_{\Gamma_3}T^+u)_{\Gamma_3}=(D_{\Gamma_3}u^+,u^+)_{\Gamma_3}.\tag{7.2}$$

Можно написать неравенства типа Гординга для наших операторов. Если $L=\widetilde{L}$, то в $\widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_3)$ можно ввести скалярное произведение $\langle\psi,\psi\rangle_{\Gamma_3}=(N_{\Gamma_3}\psi,\psi)_{\Gamma_3}$ и рассматривать N_{Γ_3} как компактный самосопряженный оператор. Можно получить аналоги теорем 4.1 и 6.7. На деталях останавливаться не будем.

Два других варианта расположения области Γ_3 не сложнее, и останавливаться на них тоже не будем.

7.2. Третье граничное условие вместо условия Неймана. Вернемся к задаче (1.1)–(1.2), но заменим второе условие в (1.2) следующим:

$$T^+u+\sigma u^+=h\quad\text{на }\Gamma_2.\tag{7.3}$$

Здесь $\sigma(x)$ — заданная матрица из $L_\infty(\Gamma_2)$. Подобное граничное условие рассматривалось в очень многих работах, например, в [24] (случай $\Gamma_2=\Gamma$) и [34] (скалярное уравнение). Подробно мы рассматривать его не будем, на это потребовалось бы много места. Ограничимся следующими соображениями. Подставляя в формулу Грина $T^+u=h-\sigma u^+$, приходим к формуле

$$\Phi_\Omega(u,v)+(\sigma u^+,v^+)_{\Gamma_2}=(Lu,v)_\Omega+(h,v^+)_{\Gamma_2}.\tag{7.4}$$

Теперь слева при $u=v$ мы имеем квадратичную форму

$$\Phi_\Omega(u,u)+(\sigma u^+,u^+)_{\Gamma_2}\tag{7.5}$$

и можем обобщать наши результаты, если она коэрцитивна в нашем смысле на $H^1(\Omega)$. Проще всего случай, когда $\operatorname{Re}(\sigma u^+,u^+)_{\Gamma_2}\geqslant 0$. Если же это условие не выполнено, то следует учесть, что в левую часть добавлено слагаемое меньшего порядка. Действительно, при сколь угодно малых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$

$$\begin{aligned}|(\sigma u^+, u^+)_{\Gamma_2}| &\leqslant C_1 \|u^+\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant C_1 \|u^+\|^2_{H^\alpha(\Gamma)} \leqslant C_1 \|u\|^2_{H^{1/2+\alpha}(\Omega)} \\ &\leqslant \beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + C_\beta \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Поэтому нужная коэрцитивность опять имеет место, если форма $\mathrm{Re}(cu, u)_\Omega$ достаточно велика.

7.3. Случай, когда граница разделена на несколько областей. Результаты заведомо можно обобщать на случай, когда поверхность разбита на конечное число областей конечным набором липшицевых $(n-2)$-мерных замкнутых поверхностей без самопересечений и без общих точек (предполагаем это из осторожности), в каждой из этих областей ставится или условие Дирихле, или условие Неймана, или спектральное условие. Ср. [34], [23] и [50].

Автор искренне благодарит Н. Д. Филонова и особенно Т. А. Суслину за обсуждение работы и ценные советы. Как отмечено в п. 6.3, теорему 6.8 мы получили с ней вместе.

Наш список литературы содержит далеко не все работы по смешанным задачам. Много дополнительных ссылок можно найти в работах этого списка.

Литература

[1] M. S. Agranovich, *On a mixed Poincaré–Steklov type spectral problem in a Lipschitz domain*, Russian J. Math. Phys., **13**:3 (2006), 239–244.

[2] M. S. Agranovich, *Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary*, Russian J. Math. Phys., **15**:2 (2008), 146–155.

[3] М. С. Агранович, *Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей*, Функц. анализ и его прил., **43**:3 (2009), 3–25.

[4] М. С. Агранович, *Сильно эллиптические системы 2-го порядка с граничными условиями на незамкнутой липшицевой поверхности*, Функц. анализ и его прил., **45**:1 (2011), 1–15.

[5] М. С. Агранович, *Спектральные задачи в липшицевых областях*, Современная математика. Фундаментальные направления, **39** (2011) (в печати).

[6] М. С. Агранович, Б. А. Амосов, *Оценки s-чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях*, Функц. анализ и его прил., **30**:2 (1996), 1–18.

[7] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений*, Сиб. матем. журн., **20**:1 (1979), 3–22.

[8] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории*, в кн.: «Десятая математическая школа», Инст. матем. АН УССР, Киев, 1974, 5–189.

[9] М. Ш. Бирман, М. С. Соломяк, *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами*, Вестник ЛГУ, №13, матем. механ. астрон., вып. 3 (1977), 13–21.

[10] R. M. Brown, *The mixed problem for Laplace's equation in a class of Lipschitz domains*, Comm. Partial Differential Equations, **19**:7–8 (1994), 1217–1233.

[11] R. M. Brown, I. Mitrea, *The mixed problem for the Lamé system in a class of Lipschitz domains*, J. Differential Equations, **246**:7 (2009), 2577–2589.

[12] M. Costabel, *Boundary integral operators in Lipschitz domains: elementary results*, SIAM J. Math. Anal., **19**:3 (1988), 613–626.

[13] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики, т.* I, ГТТИ, М., 1934.

[14] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, G. C. Verchota, *Boundary value problems for the system of elastostatics in Lipschitz domains*, Duke Math. J., **57**:3 (1988), 795–818.

[15] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973.

[16] V. I. Fabrikant, *Mixed Boundary Value Problems of Potential Theory and their Applications in Engineering*, Kluwer, Dorderecht, 1991.

[17] J. A. Griepentrog, K. Gröger, H.-Chr. Kaiser, J. Rehrberg, *Interpolation for function spaces related to mixed boundary value problems*, Math. Nachr., **241** (2002), 110–120.

[18] J. A. Griepentrog, H.-Chr. Kaiser, J. Rehrberg, *Heat kernel and resolvent properties for second order elliptic differential operators with general boundary conditions on* L_p, Adv. Math. Sci. Appl., **11** (2001), 87–112.

[19] K. Gröger, *A* $W^{1,p}$*-estimate for solutions to mixed boundary value problems for second order elliptic differential equations*, Math. Ann., **283**:4 (1989), 679–687.

[20] G. C. Hsiao, W. L. Wendland, *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[21] D. Jerison, C. E. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130**:1 (1995), 161–219.

[22] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets of* $\mathbb{R}^n$, Harwood Academic Publishers, 1984.

[23] В. И. Лебедев, В. И. Агошков, *Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе*, Отдел вычислительной математики АН СССР, М., 1983.

[24] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[25] G. Métivier, *Valeurs propres de problémes aux limites elliptiques irreguliers*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **51–52** (1977), 125–219.

[26] S. E. Mikhailov, *Traces, extensions, co-normal derivatives and solution regularity of elliptic systems with smooth and non-smooth coefficients*, `http://arxiv.org/abs/0906.3875v1`.

[27] I. Mitrea, M. Mitrea, *The Poisson problem with mixed boundary conditions in Sobolev and Besov spaces in non-smooth domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **359**:9 (2007), 4143–4182.

[28] M. Mitrea, M. Taylor, *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., **163**:2 (1999), 181–251.

[29] M. Mitrea, M. Taylor, *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem*, J. Funct. Anal., **176**:1 (2000), 1–79.

[30] Д. Г. Натрошвили, О. О. Чкадуа, Е. М. Шаргородский, *Смешанные задачи для однородных анизотропных упругих сред*, Труды Института прикладной математики им. Векуа, **39** (1990), 133–178.

[31] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[32] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North Holland, Amsterdam, 1992.

[33] K. A. Ott, R. M. Brown, *The mixed problem for the Laplacian in Lipschitz domains* `http://arxiv.org/abs/0909.0061v2`.

[34] Б. В. Пальцев, *О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях*, Матем. сб., **187**:4 (1996), 59–116.

[35] T. von Petersdorff, *Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems*, Math. Methods Appl. Sci., **11**:2 (1989), 183–213.
[36] G. Rozenblum, G. Tashchiyan, *Eigenvalue asymptotics for potential type operators on Lipschitz surfaces*, Russian J. Math. Phys., **13**:3 (2006), 326–339.
[37] V. S. Rychkov, *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. (2), **60**:1 (1999), 237–257.
[38] G. Savaré, *Regularity and perturbation results for mixed second order elliptic problems*, Comm. Partial Differential Equations, **22**:5–6 (1997), 869–899.
[39] E. Shamir, *Regularization of mixed second-order elliptic equations*, Israel J. Math., **6** (1968), 150–168.
[40] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств*, Матем. исслед., **9**:2 (1974), 214–227.
[41] I. N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*, Elsevier, New York, 1966.
[42] E. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems, screen and transmission problems in* $\mathbb{R}^3$, *Habilitationsschrift*, *Darmstadt*, 1984 (*THD-preprint* 848).
[43] E. P. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in* $\mathbb{R}^3$, Math. Nachr., **134** (1987), 21–53.
[44] Т. А. Суслина, *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях однородного эллиптического уравнения при наличии связей на части границы*, в кн.: Проблемы мат. анализа, т. 9, ЛГУ, 1984, 84–97.
[45] T. A. Suslina, *Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary*, Russian J. Math. Phys., **6**:2 (1999), 214–234.
[46] J. D. Sykes, R. M. Brown, *The mixed boundary problem in* L^p *an Hardy spaces for Laplace's equation on a Lipschitz domain*, in: Contemporary Mathematics, vol. 227, Amer. Math. Soc., 2001, 1–18.
[47] H. Triebel, *Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers*, Rev. Mat. Complut., **15**:2 (2002), 475–524.
[48] G. Uhlmann, *Inverse boundary problems and applications*, Astérisque, **207** (1992), 153–207.
[49] G. Verchota, *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **59**:3 (1984), 572–611.
[50] В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский, П. А. Старков, *Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи*, Современная математика. Фундаментальные направления, **34** (2009), 5–44.

Московский институт электроники и математики
e-mail: magran@orc.ru

Поступило в редакцию
16 декабря 2010 г.