Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров

А. В. Перескоков

Рассматривается задача об эффекте Зеемана во втором порядке по магнитному полю с использованием неприводимых представлений алгебры с квадратичными коммутационными соотношениями Карасева — Новиковой. Каждому представлению этой алгебры соответствует спектральный кластер вокруг уровня энергии невозмущенного атома водорода. На примере этой модели излагается общий метод построения асимптотических решений вблизи границ спектральных кластеров с помощью нового интегрального представления. Изучена задача вычисления квантовых средних вблизи нижних границ кластеров.

Библиография: 38 названий. *УДК:* 517.984 + 517.958. *MSC2010:* 81R30, 34Mxx, 81Q20, 33Cxx.
Ключевые слова и фразы: операторный метод усреднения, когерентное преобразование, ВКБ-приближение, точка поворота, спектральный кластер.

§ 1. Введение

Нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном магнитном поле имеет вид

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \tag{1}$$

где

$$\mathbb{H} = -\Delta - |x|^{-1}, \quad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3; параметр ε в (1) пропорционален напряженности поля. Задача об атоме водорода в магнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Ей посвящено большое число работ (см., например, [1]–[8]).

Алгебраический метод построения асимптотики спектра и собственных функций оператора (1) был предложен в [9]. Он основан на алгебраическом усреднении возмущения, последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе. В дальнейшем этот метод был

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00627-а), Министерства образования и науки РФ (соглашение 14.B37.21.0864) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2033.2012.1).

развит для широкого класса задач с частотными резонансами [10], [11]. Он хорошо отработан на ряде физических моделей [12]–[14].

Особый интерес представляют состояния системы (1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного оператора, где упомянутые лагранжевы подмногообразия почти схлопываются и интегральное представление решения над ними становится невозможным. Возможный подход к построению асимптотики около границ кластеров с помощью «деформированных» когерентных состояний был намечен в [9], но его обоснование в высших приближениях пока не осуществлено.

В работах [15], [16] на примере спектральной задачи для двумерного возмущенного осциллятора был предложен другой метод нахождения серий асимптотических собственных значений вблизи границ спектральных кластеров. Он основан на новом интегральном представлении для соответствующих асимптотических собственных функций. В данной работе этот метод будет применен для нахождения асимптотики спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров (см., теоремы 5 и 8, где приведены формулы для асимптотических собственных значений и собственных функций). Подчеркнем, что полученная формула для асимптотики собственной функции глобальна. Получить ее стандартными методами, такими как лучевой метод [17] или теория комплексного ростка [18], невозможно.

План дальнейшего изложения следующий. В § 2 производится регуляризация гамильтониана (1). Параграфы 3, 4 содержат описание квантового метода усреднения и определение когерентного преобразования в случае алгебры с коммутационными соотношениями Карасева — Новиковой. В § 5 найдено интегральное представление для асимптотических собственных функций, являющихся антиголоморфными многочленами степени $n-|m|-1$. В § 6, 7 и 8 рассмотрена многоточечная спектральная задача. Построено ее асимптотическое решение, а также вычислена поправка в спектральной серии. В § 9 изучается поведение асимптотических собственных функций. Произведено сравнение их асимптотики с ВКБ-приближением. В § 10 найдена асимптотика нормы. Наконец, § 11 содержит доказательства итоговых теорем. В нем получены формулы для квантовых средних.

Автор благодарен М. В. Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания.

§ 2. Регуляризация

Зафиксируем целое число m. Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ задачу на собственные значения для гамильтониана (1) и для третьей компоненты углового момента:

$$(\mathbb{H}_0+\varepsilon^2\mathbb{W})\psi = E\psi, \quad \mathbb{M}_3\psi = m\psi. \tag{2}$$

Следуя [9], произведем регуляризацию гамильтониана (1). Для каждого $n\geqslant 1$ и $E<0$ введем параметры ν и μ, новую переменную $q\in\mathbb{R}^3$ и функцию $\tilde{\psi}$ по формулам

$$E = -\frac{1}{4n^2\nu^2}, \quad \mu = \varepsilon^2 n^6 \nu^4, \quad q = \frac{x}{n^2\nu}, \quad \psi(x) = \frac{\tilde{\psi}(q)}{n^2}. \tag{3}$$

Кроме того, положим $\hbar=1/n$ и рассмотрим операторы

$$\boldsymbol{S}_0 = |q|\Big(\frac{1}{4}+\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\Big)^2\Big), \ \ \boldsymbol{S}_1 = \frac{|q|}{4}(q_1^2+q_2^2), \ \ \boldsymbol{M}_3 = q_1\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_2}\Big)-q_2\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}\Big).$$

Замена (3) приводит к следующей спектральной задаче:

$$(\boldsymbol{S}_0+\mu\boldsymbol{S}_1)\tilde{\psi} = \nu\tilde{\psi}, \quad \boldsymbol{M}_3\tilde{\psi} = \hbar m\tilde{\psi} \tag{4}$$

в гильбертовом пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$\langle\varphi,\varphi'\rangle_- = \frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(q)\bar{\varphi}'(q)}{|q|}dq.$$

Число ν в (4) — это искомое собственное значение, а $\mu\geqslant 0$ — параметр. Задача (2) на подпространстве, отвечающем отрицательному спектру $E<0$, эквивалентна спектральной задаче (4) в $L^2_-(\mathbb{R}^3)$.

Отметим, что в отсутствие магнитного поля спектр оператора $\boldsymbol{S}_0$ целочисленный $\{\hbar N\colon N=1,2,3,\dots\}$. В частности, $\boldsymbol{S}_0$ имеет собственное значение $\hbar n=1$. При $\mu>0$ будем рассматривать ветви собственных значений оператора $\boldsymbol{S}_0+\mu\boldsymbol{S}_1$, равные 1 в пределе при $\mu=0$. Они имеют вид $1+\mu\lambda_{k,m,n}(\mu)$, где $\lambda_{k,m,n}(\mu)$ — некоторые гладкие функции в окрестности $\mu=0$, k — номер ветви. Соответствующие собственные функции задачи (4) обозначим $\tilde{\psi}_{k,m,n}(q,\mu)$. (Ниже для краткости обозначений номера m и n в индексах будут опускаться.) Определив из (4) функции $\lambda_k(\mu)$, можно затем из системы уравнений

$$1+\mu\lambda_k(\mu) = \nu, \quad \mu = \varepsilon^2 n^6\nu^4 \tag{5}$$

найти $\nu=\nu_k(\varepsilon)$ и $\mu=\mu_k(\varepsilon)$.

§ 3. Алгебраическое усреднение

Предположим, что $\varepsilon^2 n^7\lesssim 1$ и ν порядка 1. Тогда $\mu\ll 1$ и к задаче (4) можно применить квантовую версию метода усреднения [19], [20], [9]. Исходная идея метода состоит в том, чтобы найти такой обратимый оператор $\boldsymbol{U}$ и такой оператор $\underline{\boldsymbol{S}_1}+\mu\underline{\boldsymbol{S}_2}$, чтобы

$$\begin{gathered}\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{S}_0+\mu\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{S}_0+\mu\underline{\boldsymbol{S}_1}+\mu^2\underline{\boldsymbol{S}_2}+O(\mu^3),\\ [\underline{\boldsymbol{S}_1}+\mu\underline{\boldsymbol{S}_2},\boldsymbol{S}_0] = [\underline{\boldsymbol{S}_1}+\mu\underline{\boldsymbol{S}_2},\boldsymbol{M}_3] = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Новый возмущающий оператор $\underline{\boldsymbol{S}_1}+\mu\underline{\boldsymbol{S}_2}$ коммутирует со старшей частью $\boldsymbol{S}_0$ и с оператором $\boldsymbol{M}_3$. Поэтому решение спектральной задачи (4) сводится к решению такой задачи для оператора $\underline{\boldsymbol{S}_1}+\mu\underline{\boldsymbol{S}_2}$ на $L[m,n]\subset L^2_-(\mathbb{R}^3)$ — совместном подпространстве функций, одновременно являющимися собственными функциями операторов $\boldsymbol{S}_0$ и $\boldsymbol{M}_3$. Так как

$$\nu = 1+\mu\lambda(\mu), \quad \tilde{\psi}(q,\mu) = \boldsymbol{U}\varphi(q,\mu), \tag{7}$$

то усредненная задача принимает вид

$$\boldsymbol{S}_0\varphi = \varphi, \quad \boldsymbol{M}_3\varphi = \hbar m\varphi, \tag{8}$$

$$(\underline{\boldsymbol{S}_1}+\mu\underline{\boldsymbol{S}_2}+O(\mu^2))\varphi = \lambda\varphi. \tag{9}$$

Отметим, что реализовать эту идею удается лишь при достаточно жестких ограничениях на оператор $\boldsymbol{S}_0$. А именно, должно быть выполнено условие

$$\exp\left\{\frac{2\pi i}{\hbar}\boldsymbol{S}_0\right\} = I, \tag{10}$$

где I — единичный оператор. Поскольку в рассматриваемой задаче спектр оператора $\boldsymbol{S}_0$ целочисленный, условие (10) выполнено.

Оператор $\boldsymbol{U}$ вычисляется явно [9]. Определим

$$\boldsymbol{S}_1^{\#} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\tau)\exp\left\{-\frac{i\tau}{\hbar}\boldsymbol{S}_0\right\}\boldsymbol{S}_1\exp\left\{\frac{i\tau}{\hbar}\boldsymbol{S}_0\right\}d\tau.$$

Тогда

$$\boldsymbol{U} = \exp\{-i\mu n\boldsymbol{S}_1^{\#}\}+O(\varepsilon^2 n^6). \tag{11}$$

Преобразование (11) называется деусредняющим. Оно позволяет перейти к приближенным собственным функциям исходной (неусредненной) задачи.

Решение задачи (8), (9) можно представить в виде $\varphi=\varphi_k+O(\varepsilon^2 n^6)$, где $\{\varphi_k(q)\}$ — ортонормированный базис собственных функций $\underline{\boldsymbol{S}_1}$, отвечающих некоторым собственным значениям ξ_k:

$$\boldsymbol{S}_0\varphi_k = \varphi_k, \quad \boldsymbol{M}_3\varphi_k = \hbar m\varphi_k, \quad \underline{\boldsymbol{S}_1}\varphi_k = \xi_k\varphi_k. \tag{12}$$

Собственные значения $\lambda=\lambda_k(\mu)$ полной задачи (8), (9) имеют вид

$$\lambda_k(\mu) = \xi_k+\mu\eta_k+O(\mu^2),$$

где

$$\eta_k = \langle\underline{\boldsymbol{S}_2}\varphi_k,\varphi_k\rangle_-. \tag{13}$$

Далее, приближенно решая систему (5), находим:

$$\nu_k(\varepsilon) = 1+\varepsilon^2 n^6\xi_k+\varepsilon^4 n^{12}(\eta_k+4\xi_k^2)+O(\varepsilon^6 n^{18}),$$
$$\mu_k(\varepsilon) = \varepsilon^2 n^6+4\varepsilon^4 n^{12}\xi_k+O(\varepsilon^6 n^{18}).$$

Подставляя эти выражения в (3), (7), (11), получаем, что асимптотика решения исходной задачи (2) задается формулами [9]

$$E_k = -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^4 \xi_k + \frac{1}{4}\varepsilon^4 n^{10}(2\eta_k + 5\xi_k^2) + O(\varepsilon^6 n^{16}), \tag{14}$$

$$\psi_k(x) = \frac{1}{n^2}\exp\{-i\varepsilon^2 n^7 \boldsymbol{S}_1^\#\}\ \varphi_k + O(\varepsilon^2 n^6), \tag{15}$$

где функции в правой части (15) берутся в точке $x/(n^2\nu_k(\varepsilon))$.

Рассмотрим алгебру $\mathscr{F}_{\mathrm{quant}}$ Карасева — Новиковой, состоящую из первых интегралов пары $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{M}_3$ [9], [21]. Ее образующие $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3$ подчинены следующим квадратичным коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}
[\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2] = i\hbar \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_3, \quad [\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1] = 2i\hbar \boldsymbol{B}_2,\\
[\boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3] = -\frac{i\hbar}{2}(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_0), \quad [\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_2] = -2i\hbar \boldsymbol{B}_1,\\
[\boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_1] = -\frac{i\hbar}{2}(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_0), \quad [\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_3] = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

В силу (6) усредненные гамильтонианы $\underline{\boldsymbol{S}_1}$, $\underline{\boldsymbol{S}_2}$ выражаются через образующие $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3)$ алгебры $\mathscr{F}_{\mathrm{quant}}$. Справедлива [9]

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\underline{\boldsymbol{S}_1} = \boldsymbol{S}_0 g_0(\boldsymbol{B}), \quad \underline{\boldsymbol{S}_2} = \boldsymbol{S}_0 g_{00}(\boldsymbol{B}),$$

где операторы $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3$ симметризованы по Вейлю, а символы заданы следующими равенствами:

$$g_0(b) = 12b_3 - 8b_2 - 4M_3^2 + 4\hbar^2, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
g_{00}(b) = -\frac{1}{3}\big(&4(108b_2^2 + 239b_3^2 - 308b_2b_3) + 4(-66S_0^2 + 100M_3^2 - 234\hbar^2)b_2 +\\
&+ 4(65S_0^2 - 130M_3^2 + 249\hbar^2)b_3 - 127S_0^2M_3^2 + 72M_3^4 + 127\hbar^2S_0^2 -\\
&- 277\hbar^2M_3^2 + 205\hbar^4\big).
\end{aligned} \tag{18}$$

§ 4. Когерентное преобразование

Пусть m, n — целые, $n > |m| \geqslant 0$. Обозначим через $\mathscr{P}[m,n]$ пространство антиголоморфных многочленов над $\mathbb{C}$ степени не выше $n - |m| - 1$, скалярное произведение в котором задается формулой

$$(\Phi_1, \Phi_2)_{\mathscr{P}[m,n]} = \int_{\mathbb{C}} \Phi_1(\bar z)\,\overline{\Phi_2(\bar z)}\,d\mu_{m,n}(z). \tag{19}$$

Здесь $d\mu_{m,n}(z) = \varrho(|z|^2)\,d\bar z\,dz$, функция

$$\varrho(r) = \frac{n(n-|m|)(|m|+1)_n}{2\pi(n+1)_{n+1}}\, r^{|m|} F(n+1, n+|m|+1; 2n+2; 1-r), \tag{20}$$

где F — гипергеометрический ряд [22], а операция $(l)_M$ определяется по формуле

$$(l)_M \equiv l(l+1)\ldots(l+M-1), \quad (l)_0 \equiv 1.$$

Отметим, что функция $\varrho(r)$ является единственным решением следующей задачи:

$$r(1-r)\varrho'' + ((1-|m|)-(2n-|m|+3)r)\varrho' - (n+1)(n-|m|+1)\varrho = 0, \tag{21}$$

$$\int_0^\infty \varrho(r)\,dr = \frac{1}{2\pi}, \quad \varrho(r) > 0. \tag{22}$$

Чтобы решить задачу (12), воспользуемся когерентным преобразованием [23], [9], [21]

$$\mathfrak{H}(\Phi) = \int_{\mathbb{C}} \Phi(\bar z)\mathfrak{H}_z\, d\mu_{m,n}(z). \tag{23}$$

Здесь гипергеометрические когерентные состояния имеют вид

$$\mathfrak{H}_z = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} \overline{P_j(\bar z)}\chi_j,$$

где

$$P_j(\bar z) = \sqrt{k_j}\,\bar z^j, \quad k_j = \frac{(n-j)_j(n-|m|-j)_j}{j!(1+|m|)_j}, \quad j = 0,\ldots,n-|m|-1, \tag{24}$$

— ортонормированный базис в $\mathscr{P}[m,n]$, а функции

$$\chi_j(q) = c_j(q_1 + i\ \mathrm{sgn}(m)q_2)^{|m|} \times$$
$$\times \exp\Bigl(-\frac{|q|}{2\hbar}\Bigr) L_j^{|m|}\Bigl(\frac{|q|+q_3}{2\hbar}\Bigr) L_{n-|m|-1-j}^{|m|}\Bigl(\frac{|q|-q_3}{2\hbar}\Bigr). \tag{25}$$

В формуле (25) $L_N^M(y)$ — полиномы Лагерра [22], а нормировочные константы c_j имеют вид

$$c_j = (-1)^j/\bigl(2^{|m|}\pi\hbar^{|m|+1}\sqrt{(n-|m|-j)_{|m|}(1+j)_{|m|}}\bigr).$$

Когерентное преобразование (23) отображает гильбертово пространство $\mathscr{P}[m,n]$ на гильбертово пространство $L[m,n]$. Преобразование $\mathfrak{H}$ унитарное, обратное преобразование $\mathfrak{H}^{-1}\colon L[m,n] \to \mathscr{P}[m,n]$ вычисляется по формуле

$$\mathfrak{H}^{-1}(\chi) = \langle \chi, \mathfrak{H}_z\rangle_{L[m,n]}.$$

Заметим, что интегральное представление

$$\varphi_k = \mathfrak{H}(\Phi_k) \tag{26}$$

дает точные решения первых двух уравнений (12) при любых амплитудах Φ_k. Поскольку в результате когерентного преобразования (23) $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3$

преобразуются в дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка

$$\mathring{B}_0 = \hbar\Big(2\bar{z}\frac{d}{d\bar{z}} - n + |m| + 1\Big),$$
$$\mathring{B}_1 = \frac{i\hbar^2}{2}\Big(\bar{z}(\bar{z}^2-1)\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - ((2n-|m|-3)\bar{z}^2+|m|+1)\frac{d}{d\bar{z}} + (n-1)(n-|m|-1)\bar{z}\Big),$$
$$\mathring{B}_2 = \frac{\hbar^2}{2}\Big(\bar{z}(\bar{z}^2+1)\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - ((2n-|m|-3)\bar{z}^2-|m|-1)\frac{d}{d\bar{z}} + (n-1)(n-|m|-1)\bar{z}\Big),$$
$$\mathring{B}_3 = -\hbar^2\Big(\bar{z}^2\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - (n-|m|-2)\bar{z}\frac{d}{d\bar{z}} - \frac{1}{2}(n-1)(|m|+1)\Big), \tag{27}$$

в силу (17), (12) получаем следующее уравнение для Φ_k:

$$(12\mathring{B}_3 - 8\mathring{B}_2 - 4\hbar^2 m^2 + 4\hbar^2)\Phi_k = \xi_k\Phi_k. \tag{28}$$

Собственными числами уравнения (28) назовем такие значения параметра ξ_k, при которых это уравнение имеет полиномиальные решения в пространстве $\mathscr{P}[m,n]$. Потребуем, чтобы

$$\|\Phi_k\|_{\mathscr{P}[m,n]} = 1. \tag{29}$$

Покажем, как связана точка $\bar{z}=1$ со спектром оператора $g_0(\boldsymbol{B})$. Положим $c=|m|/n$ и пусть

$$n\to\infty, \quad |m|\to\infty, \tag{30}$$

$$5^{-1/2} < c < 1. \tag{31}$$

Рассмотрим сужение функции (17) на симплектический лист Ω алгебры (16), задаваемый уравнениями

$$b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 = c^2/4, \quad b_0^2 + 4b_3 = c^2+1. \tag{32}$$

Введем на Ω кэлерову структуру с помощью комплексной координаты

$$z = \frac{2(b_3+ib_1)}{1-2b_3-b_0}. \tag{33}$$

Пусть $\bar{z}$ — комплексно сопряженная к (33) функция. Тогда в силу (32), (33) (см. [9])

$$b_0 = \frac{(c-1)(-2|z|^2 - c(|z|^2-1) + \sqrt{\varkappa(|z|^2)})}{2|z|^2 - c(|z|^2-1) + \sqrt{\varkappa(|z|^2)}}, \tag{34}$$

$$b_3 = \frac{c^2+1-b_0^2}{4} = \frac{c}{2} + \frac{2(c-1)^2|z|^2}{c(|z|^2-1)^2 + 4|z|^2 + (|z|^2+1)\sqrt{\varkappa(|z|^2)}}, \tag{35}$$

$$b_2 = \frac{(z+\bar{z})}{4}(1-2b_3-b_0) = \frac{(z+\bar{z})(1-c)(c(|z|^2+1)+\sqrt{\varkappa(|z|^2)})}{2(c(|z|^2-1)^2+4|z|^2+(|z|^2+1)\sqrt{\varkappa(|z|^2)})}, \tag{36}$$

$$b_1 = \frac{(z-\bar{z})b_2}{i(z+\bar{z})} = \frac{(z-\bar{z})(1-c)(c(|z|^2+1)+\sqrt{\varkappa(|z|^2)})}{2i(c(|z|^2-1)^2+4|z|^2+(|z|^2+1)\sqrt{\varkappa(|z|^2)})}. \tag{37}$$

Здесь

$$\varkappa(r) = c^2(r-1)^2 + 4r. \tag{38}$$

Далее перейдем в g_0 от координат b_0, b_1, b_2, b_3 к новым координатам $z, \bar{z}$ [9], [21]. В результате сужение функции g_0 на Ω примет вид

$$g_{0,\Omega}(z,\bar{z}) = 6c - 4c^2 + 4\hbar^2 + \frac{4(c-1)[6(c-1)|z|^2 + (z+\bar{z})(c(|z|^2+1) + \sqrt{\varkappa(|z|^2)})]}{c(|z|^2-1)^2 + 4|z|^2 + (|z|^2+1)\sqrt{\varkappa(|z|^2)}},$$

где $\varkappa(r)$ имеет вид (38).

Теорема 1. *Глобальный минимум функции $g_{0,\Omega}(z,\bar{z})$ при выполнении условий* (30), (31) *достигается в точке $z=\bar{z}=1$. Он равен*

$$g_{0,\Omega}(1,1) = 1 + c^2 + O(\hbar^2).$$

Доказательство. Пусть $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Тогда функцию $g_{0,\Omega}$ можно представить в виде

$$g_{0,\Omega}(x,y) = g_1(x^2+y^2) + 2xg_2(x^2+y^2),$$

где

$$g_1(r) = 6c - 4c^2 + 4\hbar^2 + \frac{24(c-1)^2 r}{c(r-1)^2 + 4r + (r+1)\sqrt{\varkappa(r)}},$$

$$g_2(r) = \frac{4(c-1)[c(r+1) + \sqrt{\varkappa(r)}]}{c(r-1)^2 + 4r + (r+1)\sqrt{\varkappa(r)}}.$$

Стационарные точки $g_{0,\Omega}$ удовлетворяют следующей системе:

$$\frac{\partial g_{0,\Omega}(x,y)}{\partial x} = 2[xg_1'(x^2+y^2) + 2x^2 g_2'(x^2+y^2) + g_2(x^2+y^2)] = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial g_{0,\Omega}(x,y)}{\partial y} = 2y[g_1'(x^2+y^2) + 2xg_2'(x^2+y^2)] = 0. \tag{40}$$

Если $y \neq 0$, $x \neq \infty$, то выразим x из уравнения (40) и подставим в (39). В результате, приходим к уравнению

$$g_2(x^2+y^2) = 0,$$

которое не имеет решений.

Если же $y = 0$, то x удовлетворяет уравнению

$$xg_1'(x^2) + 2x^2 g_2'(x^2) + g_2(x^2) = 0. \tag{41}$$

Поскольку

$$g_1'(r) = -\frac{24(c-1)^2(r-1)[c^2(r^2+1) + 2r + c(r+1)\sqrt{\varkappa(r)}]}{\sqrt{\varkappa(r)}[c(r-1)^2 + 4r + (r+1)\sqrt{\varkappa(r)}]^2},$$

$$g_2(r) + 2rg_2'(r) = -8(c-1)(r-1) \times$$
$$\times \frac{c(r+1)[c^2(r^2+1) - 2(c-2)r] + [c^2(r+1)^2 - 2(c-1)r]\sqrt{\varkappa(r)}}{\sqrt{\varkappa(r)}[c(r-1)^2 + 4r + (r+1)\sqrt{\varkappa(r)}]^2},$$

то (41) имеет вид

$$g_3(x)(x^2-1)=0, \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned} g_3(x)&=3(c-1)x[c^2(x^4+1)+2x^2+c(x^2+1)\sqrt{\varkappa(x^2)}]+\\ &+c(x^2+1)[c^2(x^4+1)-2(c-2)x^2]+[c^2(x^2+1)^2-2(c-1)x^2]\sqrt{\varkappa(x^2)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Корнями (42) являются $x=\pm 1$. Покажем, что при выполнении условия (31) это уравнение других корней не имеет. Действительно, при $x\leqslant 0$ функция $g_3(x)$ положительна, так как первое слагаемое в (43) неотрицательно, а остальные положительны.

В случае $x>0$ после замены $u=x+1/x$ уравнение

$$g_3(x)=0 \tag{44}$$

принимает вид

$$\begin{aligned} &[c^2u^2+3c(c-1)u-2(c-1)]\sqrt{c^2(u^2-4)+4}=\\ &\qquad=-c^3u^3-3c^2(c-1)u^2+c(2c^2+2c-4)u+6(c^2-1)(c-1). \end{aligned} \tag{45}$$

После возведения правой и левой частей равенства (45) в квадрат, получаем уравнение

$$u^2+6u-5c^{-2}+9=0,$$

корни которого $u_\pm=-3\pm\sqrt{5}c^{-1}$ меньше 2. Поэтому уравнение

$$x+1/x=u_\pm,$$

а следовательно и уравнение (44), при $x>0$ не имеют решений.

Проверим, что в точке $z=\bar z=1$ выполнены достаточные условия локального минимума. Так как

$$\frac{\partial^2 g_{0,\Omega}(1,0)}{\partial x\partial y}=0,$$

то достаточно показать, что

$$\frac{\partial^2 g_{0,\Omega}(1,0)}{\partial x^2}=2g_1'(1)+12g_2'(1)+4g_1''(1)+8g_2''(1)>0,$$

$$\frac{\partial^2 g_{0,\Omega}(1,0)}{\partial y^2}=2g_1'(1)+4g_2'(1)>0.$$

Поскольку

$$g_1'(1)=0,\quad g_2'(1)=\frac{1-c^2}{2},\quad g_1''(1)=-\frac{3}{8}(1-c^2)^2,\quad g_2''(1)=\frac{(c^2-1)(5-c^2)}{8},$$

то в силу (31)

$$\frac{\partial^2 g_{0,\Omega}(1,0)}{\partial x^2}=\frac{(1-c^2)(5c^2-1)}{2}>0,\qquad \frac{\partial^2 g_{0,\Omega}(1,0)}{\partial y^2}=2(1-c^2)>0,$$

а значит, $z=\bar z=1$ — точка локального минимума $g_{0,\Omega}$. Так как значения функции

$$g_{0,\Omega}\Big|_{z=\bar z=1}=c^2+1+4\hbar^2,\quad g_{0,\Omega}\Big|_{z=\bar z=-1}=-3c^2+5+4\hbar^2,$$
$$g_{0,\Omega}\Big|_{z=\bar z=\infty}=6c-4c^2+4\hbar^2$$

удовлетворяют неравенствам

$$c^2+1<6c-4c^2<-3c^2+5,$$

то эта точка является точкой глобального минимума $g_{0,\Omega}$.

□

Число $g_{0,\Omega}(1,1)$ определяет нижнюю границу спектрального кластера. Далее в статье будет вычислена поправка к этому числу (см. формулу (105)).

Наряду с задачей о нахождении спектра рассмотрим задачу вычисления средних значений дифференциальных операторов на решениях (2) вблизи границ спектральных кластеров. Квантовые средние играют важную роль в приложениях и могут быть найдены экспериментально. Заметим, что при

$$\xi_k\sim 1+c^2 \tag{46}$$

у уравнения

$$g_{0,\Omega}(z,\bar z)\varphi_k=\xi_k\varphi_k,$$

к которому сводится (4) на собственном подпространстве $L[m,n]$, собственные функции φ_k будут локализованы в малой окрестности точки $z=\bar z=1$. Поэтому формула для квантовых средних принимает вид

$$(F(b_0,b_1,b_2,b_3)\varphi_k,\varphi_k)\sim F(0,0,(1-c^2)/4,(1+c^2)/4)(\varphi_k,\varphi_k). \tag{47}$$

Здесь функции b_0,b_1,b_2,b_3 были приближенно заменены их значениями в точке $z=\bar z=1$, вычисленными по формулам (34)–(37). Кроме того,

$$F(0,0,(1-c^2)/4,(1+c^2)/4)\neq 0.$$

Приведенные выше формальные рассуждения будут далее строго обоснованы (см. теорему 6).

§ 5. Интегральное представление для асимптотических собственных функций

Рассмотрим уравнение (28). Учитывая формулы (27), приходим к уравнению

$$\frac{R(\bar z)}{|m|^2}\frac{d^2\Phi_k}{d\bar z^2}-\frac{1}{|m|}\Big[\Big(2\sqrt a-1-\frac{3}{|m|}\Big)\bar z^2+3\Big(\sqrt a-1-\frac{2}{|m|}\Big)\bar z-1-\frac{1}{|m|}\Big]\frac{d\Phi_k}{d\bar z}+$$
$$+\Big[(\sqrt a-1)\Big(\sqrt a-1-\frac{1}{|m|}\Big)\bar z-\frac12\Big(1+\frac{1}{|m|}\Big)\Big(3\sqrt a-2-\frac{1}{|m|}\Big)+\frac{\tilde\xi_k}{4}\Big]\Phi_k=0, \tag{48}$$

где

$$R(\bar{z}) = \bar{z}(\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1), \tag{49}$$

$$a = \frac{n^2}{|m|^2} = \frac{1}{c^2}, \quad \tilde{\xi}_k = \frac{n^2}{|m|^2}\xi_k. \tag{50}$$

(Для упрощения обозначений индекс k у функции Φ будет ниже опущен.) Уравнение имеет три особые точки

$$\bar{z}_1 = 0, \quad \bar{z}_2 = (-3+\sqrt{5})/2, \quad \bar{z}_3 = (-3-\sqrt{5})/2, \tag{51}$$

которые являются корнями уравнения $R(\bar{z}) = 0$, а также особую точку $\bar{z}_4 = \infty$. Так как все четыре особые точки являются регулярными, (48) есть уравнение класса Фукса [24], [25]. Фуксовы уравнения с четырьмя особыми точками называются уравнениями Гойна.

Фуксовы уравнения с тремя особыми точками порождают хорошо известные системы классических ортогональных полиномов [22]. Для фуксовых уравнений с четырьмя и с большим числом особых точек подобной теории не существует. Как отмечено в [25], имеются лишь частные случаи, когда для уравнений класса Гойна можно построить решения, являющиеся полиномами. В данной статье будут найдены асимптотические собственные значения и соответствующие собственные функции (многочлены) для задачи (48), (29), если выполнены условия (30), (31).

Нам потребуется ряд результатов из теории когерентных преобразований [21]. Наряду с пространством $\mathscr{P}[m,n]$ рассмотрим дуальное ему гильбертово пространство $\tilde{\mathscr{P}}[m,n]$, состоящее из мероморфных распределений на $\mathbb{C}/\{0\}$ вида

$$\tilde{g}(z) = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} \frac{\tilde{g}_j}{z^{j+1}}.$$

Норма в пространстве $\tilde{\mathscr{P}}[m,n]$ вычисляется по формуле

$$\|\tilde{g}\|^2_{\tilde{\mathscr{P}}[m,n]} = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_\gamma \oint_\gamma K(\overline{w}, z)\tilde{g}(z)\,\overline{\tilde{g}(\overline{w})}\,dz\,d\overline{w},$$

где контурные интегралы взяты по циклам γ вокруг точки $z=0$, которые ориентированы против часовой стрелки, а

$$K(\overline{w}, z) = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} k_j (z\overline{w})^j \tag{52}$$

— воспроизводящее ядро. Константы k_j в (52) заданы равенствами (24). Справедлива [21]

Лемма 2. *Двойственность между пространствами $\tilde{\mathscr{P}}[m,n]$ и $\mathscr{P}[m,n]$ задается отображением*

$$\mathscr{K}: \tilde{\mathscr{P}}[m,n] \to \mathscr{P}[m,n], \quad (\mathscr{K}\tilde{g})(\overline{w}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma K(\overline{w}, z)\tilde{g}(z)\,dz. \tag{53}$$

Обратное отображение имеет вид

$$(\mathscr{K}^{-1}g)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \tilde{L}(\overline{w}, z)g(\overline{w})\,d\overline{w}, \tag{54}$$

где

$$\tilde{L}(\overline{w}, z) = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} \frac{1}{k_j(\overline{w}z)^{j+1}} \tag{55}$$

— *мероморфное воспроизводящее ядро.*

Отметим, что в случае коммутационных соотношений Гейзенберга версия мероморфных когерентных состояний, а также преобразования, подобные (53), (54), были введены в работе Дирака [26].

Обозначим через $G(\bar{u}, \overline{w})$ ядро суперпозиции операторов $\mathscr{K}^{-1}$ и $\mathscr{K}$. Из формул (52), (55) вытекает, что

$$\begin{aligned} G(\bar{u}, \overline{w}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma K(\overline{w}, z)\tilde{L}(\bar{u}, z)\,dz = \\ = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left(\sum_{j=0}^{n-|m|-1} k_j(z\overline{w})^j\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-|m|-1} \frac{1}{k_\ell(\bar{u}z)^{\ell+1}}\right) dz = \\ = \frac{1}{\bar{u}}\sum_{j=0}^{n-|m|-1}\left(\frac{\overline{w}}{\bar{u}}\right)^j = \frac{\bar{u}^{n-|m|} - \overline{w}^{n-|m|}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\overline{w})}. \end{aligned} \tag{56}$$

Ядро (56) в пространстве $\mathscr{P}[m,n]$ определяет тождественный оператор, а на множестве J антиголоморфных в окрестности нуля функций является проектором на пространство $\mathscr{P}[m,n]$. Действительно, если

$$g(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \bar{z}^j \in J,$$

то

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma G(\bar{u}, \overline{w})g(\bar{u})\,d\bar{u} = \sum_{j=0}^{n-|m|-1} g_j\overline{w}^j.$$

Будем искать решение уравнения (48) в виде

$$\Phi(\bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma G(\bar{u}, \bar{z})p(\bar{u})d\bar{u}, \tag{57}$$

где функция $p \in J$, а G задается формулой (56). Под действием отображения (57) операторы $\mathring{B}_2, \mathring{B}_3$ преобразуются в операторы $\widehat{B}_2, \widehat{B}_3 : J \to J$, а уравнение (48) — в уравнение

$$\left(12\widehat{B}_3 - 8\widehat{B}_2 - 4\hbar^2m^2 + 4\hbar^2 - \xi_k\right)p = 0. \tag{58}$$

Чтобы вычислить $\widehat{B}_2, \widehat{B}_3$, воспользуемся представлением

$$\mathring{B}_2 = \frac{\mathring{A}(\mathring{B}-\mathring{C})}{2} + \frac{\hbar}{4}(n+|m|+1)(\mathring{B}+\mathring{C}), \quad \mathring{B}_3 = -(\mathring{A})^2 + \frac{\hbar^2}{4}(n^2+m^2-1), \quad (59)$$

где

$$\mathring{A} = \hbar\Big(\frac{\ell}{2} - \bar{z}\frac{d}{d\bar{z}}\Big), \quad \mathring{B} = \hbar\bar{z}\Big(\ell - \bar{z}\frac{d}{d\bar{z}}\Big), \quad \mathring{C} = \hbar\frac{d}{d\bar{z}}, \quad (60)$$

а

$$\ell = n - |m| - 1.$$

В силу условий (30), (31) $\ell \to \infty$. Отметим, что операторы (60) связаны равенствами

$$\mathring{A} = \mathring{S}_3, \quad \mathring{B} = \mathring{S}_1 - i\mathring{S}_2, \quad \mathring{C} = \mathring{S}_1 + i\mathring{S}_2$$

с удовлетворяющими циклическим коммутационным соотношениям

$$[\mathring{S}_1, \mathring{S}_2] = i\hbar\mathring{S}_3, \quad [\mathring{S}_2, \mathring{S}_3] = i\hbar\mathring{S}_1, \quad [\mathring{S}_3, \mathring{S}_1] = i\hbar\mathring{S}_2$$

образующими алгебры $\mathfrak{su}(2)$ $\mathring{S}_1, \mathring{S}_2, \mathring{S}_3$.

Под действием отображения (57) операторы $\mathring{A}, \mathring{B}, \mathring{C}$ преобразуются в операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\colon J \to J$, определяемые равенствами

$$\widehat{A} = \hbar\Big(\frac{\ell}{2} - \bar{u}\frac{d}{d\bar{u}}\Big), \quad \widehat{B} = \hbar\bar{u}\Big(\ell - \bar{u}\frac{d}{d\bar{u}}\Big), \quad \widehat{C} = \hbar\Big(\frac{d}{d\bar{u}} - \frac{\bar{u}^\ell}{\ell!}\frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}}\Big). \quad (61)$$

Наконец, из (59), (61) вытекает

Лемма 3. *Операторы $\widehat{B}_2, \widehat{B}_3$ имеют вид*

$$\widehat{B}_2 = \frac{\hbar^2}{2}\Big(\bar{u}(\bar{u}^2+1)\frac{d^2}{d\bar{u}^2} - ((2n-|m|-3)\bar{u}^2 - |m| - 1)\frac{d}{d\bar{u}} + \\ + (n-1)(n-|m|-1)\bar{u}\Big) - \frac{\hbar^2}{2}(\bar{u}\frac{d}{d\bar{u}} + |m| + 1)\frac{\bar{u}^\ell}{\ell!}\frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}},$$

$$\widehat{B}_3 = -\hbar^2\Big(\bar{u}^2\frac{d^2}{d\bar{u}^2} - (n-|m|-2)\bar{u}\frac{d}{d\bar{u}} - \frac{1}{2}(n-1)(|m|+1)\Big).$$

Рассмотрим окрестность нуля, задаваемую неравенством

$$|\bar{u}| < |\bar{z}_2| - \delta, \quad (62)$$

где $\bar{z}_2 = (-3+\sqrt{5})/\sqrt{2}$, а $\delta > 0$ — константа. В этой окрестности асимптотическое решение уравнения (48) задается ВКБ-приближением [27], [28]

$$\Phi^{WKB}(\bar{z}) = t(\bar{z})e^{\ell s(\bar{z})}(1 + O(\ell^{-1})), \quad \ell \to \infty.$$

Здесь $s(\bar{z}), t(\bar{z})$ — антиголоморфные функции, причем $t(\bar{z}) \neq 0$. При подстановке $\Phi^{WKB}(\bar{u})$ в (58) возникает невязка W, которая в области (62) имеет вид

$$W = O(\ell^{-2}\Phi^{WKB}) + \hat{r}\Phi^{WKB}, \quad (63)$$

где оператор

$$\hat{r} = 4\hbar^2\Big(\bar{u}\frac{d}{d\bar{u}} + |m| + 1\Big)\frac{\bar{u}^\ell}{\ell!}\frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}}.$$

Выражение $O(\ell^{-2}\Phi^{WKB})$ в (63) представляет собой оценку невязки ВКБ-приближения, когда в уравнении (58) вместо $\widehat{B}_2, \widehat{B}_3$ фигурируют $\mathring{B}_2, \mathring{B}_3$, а $\hat{r}\Phi^{WKB}$ возникает из-за наличия в $\widehat{B}_2$ дополнительного слагаемого

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left(\bar{u}\frac{d}{d\bar{u}}+|m|+1\right)\frac{\bar{u}^\ell}{\ell!}\,\frac{d^{\ell+1}}{d\bar{u}^{\ell+1}}.$$

Покажем, что $\hat{r}\Phi^{WKB}$ дает экспоненциально малый вклад по сравнению с $\ell^{-2}\Phi^{WKB}$.

Теорема 2. *В достаточно малой окрестности нуля справедлива оценка*

$$\hat{r}\Phi^{WKB} = O(\ell^{-\infty}\Phi^{WKB}), \quad \ell\to\infty.$$

Доказательство. Пусть γ — окружность с центром в нуле радиуса R_0, причем $R_0 < |\overline{z}_2| - \delta$. Тогда в силу интегральной формулы Коши при $|\bar{u}| < R_0$ имеем:

$$\hat{r}\Phi^{WKB} = -\frac{2(\ell+1)}{n^2\pi i}\oint_\gamma \frac{(n\overline{v}-(|m|-1)\bar{u})\bar{u}^\ell}{(\overline{v}-\bar{u})^{\ell+3}}\Phi^{WKB}(\overline{v})\,d\overline{v}. \tag{64}$$

Применим к (64) неравенства Коши [29]. В результате если $|\bar{u}|\leqslant R_0/2$, то получаем оценку

$$|\hat{r}\Phi^{WKB}(\bar{u})| \leqslant \frac{(\ell+1)(2n+|m|-1)2^{\ell+3}|\bar{u}|^\ell}{a|m|^2R_0^{\ell+1}}\max_{\bar{u}\in\gamma}|t(\bar{u})|\exp(\ell\max_{\bar{u}\in\gamma}\operatorname{Re}s(\bar{u})).$$

Далее, поскольку в области (62) $|t(\bar{u})|>0$, в силу принципа максимума при $|\bar{u}|\leqslant R_0$

$$|\Phi^{WKB}(\bar{u})| \geqslant \min_{\bar{u}\in\gamma}|t(\bar{u})|\exp(\ell\min_{\bar{u}\in\gamma}\operatorname{Re}s(\bar{u})) > 0.$$

Следовательно, если $|\bar{u}|\leqslant R_0/2$, то

$$\left|\frac{\hat{r}\Phi^{WKB}(\bar{u})}{\Phi^{WKB}(\bar{u})}\right| \leqslant \frac{(\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}+1)8}{aR_0}\,\frac{\max_{\bar{u}\in\gamma}|t(\bar{u})|}{\min_{\bar{u}\in\gamma}|t(\bar{u})|}\times$$
$$\times\exp\bigl(\ell\{\ln|\bar{u}|-\ln R_0+\ln 2+\max_{\bar{u}\in\gamma}\operatorname{Re}s(\bar{u})-\min_{\bar{u}\in\gamma}\operatorname{Re}s(\bar{u})\}\bigr), \tag{65}$$

а, значит, при

$$|\bar{u}| < R_1, \tag{66}$$

где

$$0 < R_1 < \frac{R_0}{2}\exp\bigl(\min_{\bar{u}\in\gamma}\operatorname{Re}s(\bar{u})-\max_{\bar{u}\in\gamma}\operatorname{Re}s(\bar{u})\bigr),$$

правая часть (65) экспоненциально мала. □

Таким образом, если в формуле (57) цикл γ вокруг $\bar{u}=0$ лежит в области (66), то вместо асимптотического решения уравнения (58) $\ell+2$ порядка в правую часть (57) можно подставить асимптотическое решение уравнения 2 порядка (48).

§ 6. Многоточечная спектральная задача

Изучим поведение решений (48) вблизи особых точек. Разлагая дробь на простейшие, получаем равенство

$$-\frac{|m|}{R(\bar z)}\left[\left(2\sqrt{a}-1-\frac{3}{|m|}\right)\bar z^2+3\left(\sqrt{a}-1-\frac{2}{|m|}\right)\bar z-1-\frac{1}{|m|}\right]=\sum_{j=1}^{3}\frac{A_j}{\bar z-\bar z_j},$$

где $A_1=|m|+1$, $A_2=A_3=-n+1$. Решая затем определяющие (или характеристические) уравнения

$$\rho_j^{(i)}(\rho_j^{(i)}-1)+A_j\rho_j^{(i)}=0,\quad j=1,2,3;\ i=1,2.$$

находим, что характеристические показатели в особых точках (51) равны

$$\rho_j^{(1)}=0,\quad j=1,2,3;\quad \rho_1^{(2)}=-|m|,\quad \rho_j^{(2)}=n,\quad j=2,3,$$

Из определяющего уравнения для особой точки $\bar z_4=\infty$

$$\rho_\infty^{(i)}(\rho_\infty^{(i)}-1)+(2n-|m|-1)\rho_\infty^{(i)}+(n-1)(n-|m|-1)=0,\quad i=1,2,$$

находятся характеристические показатели $\rho_\infty^{(1)}=-n+|m|+1$, $\rho_\infty^{(2)}=-n+1$.

При $\tilde\xi=\tilde\xi_k$ точными решениями спектральной задачи (48), (29) являются многочлены из пространства $\mathscr{P}[m,n]$. Их характеристические показатели в особых точках (51) равны нулю, а в точке $\bar z_4=\infty$ — $\rho_\infty^{(1)}$. Отметим, что при выполнении условий (30), (31) решения с характеристическими показателями $\rho_j^{(2)}$, $j=1,2,3,4$, не лежат в пространстве $\mathscr{P}[m,n]$ (и не являются асимптотикой полиномов из $\mathscr{P}[m,n]$). Действительно, для $j=2,3$ $\rho_j^{(2)}>n-|m|-1$, а при $|m|>0$ $\rho_1^{(2)}<0$, $-\rho_\infty^{(2)}>n-|m|-1$.

При построении асимптотических решений уравнения (48) существенную роль играет их поведение вблизи особых точек. Наряду со спектральной задачей (48), (29) рассмотрим многоточечную спектральную задачу. Она состоит в нахождении чисел $\tilde\xi_k$ (собственных значений), при которых у уравнения (48) существуют ненулевые антиголоморфные решения, характеристические показатели которых в особых точках (51) равны нулю, а в особой точке $\bar z_4=\infty$ показатель равен $-n+|m|+1$.

Если число $\tilde\xi_k$ и функция $p(\bar u)$ — асимптотическое решение такой многоточечной спектральной задачи, то при подстановке $p(\bar u)$ в правую часть формулы (57) получаем многочлен $\Phi(\bar z)$ — асимптотическое решение уравнения (48) из пространства $\mathscr{P}[m,n]$. Условие нормировки (29) для $\Phi(\bar z)$ позволяет определить содержащийся в $p(\bar u)$ произвольный множитель. Таким образом, число $\tilde\xi_k$ и многочлен $\Phi(\bar z)$ являются асимптотическим решением исходной спектральной задачи (48), (29).

§ 7. ВКБ-приближение. Линии Стокса

Перейдем к построению асимптотических решений уравнения (48). С помощью подстановки [24]

$$\Phi(\bar z) = E(\bar z) Y(\bar z), \tag{67}$$

где

$$E(\bar z) = (\bar z^2 + 3\bar z + 1)^{(\sqrt{a}|m|-1)/2}, \bar z^{\,-(|m|+1)/2}. \tag{68}$$

уравнение (48) преобразуется к виду

$$\frac{d^2Y}{d\bar z^2} - Q(\bar z) Y = 0. \tag{69}$$

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$Q(\bar z) = \frac{(|m|^2-1)}{4R^2(\bar z)}\left[\bar z^4 + 2\bar z^3 + \left(\frac{5(a-|m|^{-2})}{1-|m|^{-2}} - 1\right)\bar z^2 + 2\bar z + 1\right] - \frac{\tilde\xi_k |m|^2}{4R(\bar z)}. \tag{70}$$

Поскольку выполнены условия (30), из (70) вытекает, что

$$Q(\bar z) = \frac{|m|^2 P(\bar z)}{4R^2(\bar z)} - \frac{\tilde\xi_k |m|^2}{4R(\bar z)} + O(1) + O\left(\frac{1}{R^2(\bar z)}\right). \tag{71}$$

Здесь $P(\bar z) = \bar z^4 + 2\bar z^3 + (5a-1)\bar z^2 + 2\bar z + 1$, а $R(\bar z)$ задается формулой (49).

Далее покажем, как условие существования у уравнения (69) кратной точки поворота $\bar z_0$ позволяет найти асимптотику (46) для ξ_k. Рассмотрим уравнения $Q(\bar z_0) = 0$, $Q'(\bar z_0) = 0$ с точностью $O(1)$. В силу (71) имеем:

$$P(\bar z_0) - \tilde\xi_k R(\bar z_0) = 0, \quad P'(\bar z_0) - \tilde\xi_k R'(\bar z_0) = 0.$$

Из этих равенств вытекает уравнение для нахождения $\bar z_0$:

$$\begin{aligned}[\bar z_0^4 + 2\bar z_0^3 + (5a-1)\bar z_0^2 + 2\bar z_0 + 1][3\bar z_0^2 + 6\bar z_0 + 1] -{}&\\ - [4\bar z_0^3 + 6\bar z_0^2 + 2(5a-1)\bar z_0 + 2][\bar z_0^3 + 3\bar z_0^2 + \bar z_0] = 0,&\end{aligned} \tag{72}$$

а также асимптотика

$$\tilde\xi_k \sim \frac{P(\bar z_0)}{R(\bar z_0)}. \tag{73}$$

Разлагая левую часть (72) на множители

$$(\bar z_0^2 - 1)(\bar z_0^2 + (3 - \sqrt{5a})\bar z_0 + 1)(\bar z_0^2 + (3 + \sqrt{5a})\bar z_0 + 1) = 0,$$

получаем, что у (72) имеется 6 корней $\bar z_{0,1} = 1$, $\bar z_{0,2} = -1$,

$$\bar z_{0,3} = \frac{-3 + \sqrt{5a} + 5i\sqrt{(\sqrt5 - \sqrt a)(\sqrt a - 1/\sqrt5)}}{2},$$

$$\bar z_{0,4} = \frac{-3 + \sqrt{5a} - 5i\sqrt{(\sqrt5 - \sqrt a)(\sqrt a - 1/\sqrt5)}}{2},$$

$$\bar z_{0,5} = \frac{-3 - \sqrt{5a} + \sqrt5\sqrt{(\sqrt5 + \sqrt a)(\sqrt a + 1/\sqrt5)}}{2},$$

$$\bar{z}_{0,6} = \frac{-3 - \sqrt{5a} - \sqrt{5}\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1/\sqrt{5})}}{2}.$$

Если в (73) положить $\bar{z}_0 = 1$, то получаем

$$\tilde{\xi}_k \sim a + 1. \tag{74}$$

В силу (50) из (74) вытекает асимптотика (46). Отметим, что если в (73) положить $\bar{z}_0 = -1$, то при $a > 1$ число $\tilde{\xi}_k \sim 5a - 3$ определяет верхнюю границу спектрального кластера.

Будем искать $\tilde{\xi}_k$ в виде

$$\tilde{\xi}_k = a + 1 + \frac{\tilde{\xi}_k^{(1)}}{|m|} + O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big), \tag{75}$$

где числа $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ упорядочены по возрастанию. Тогда уравнение (69) примет вид

$$\frac{1}{|m|^2}\frac{d^2Y}{d\bar{z}^2} - \Big(Q_0(\bar{z}) - \frac{\tilde{\xi}_k^{(1)}}{|m|4R(\bar{z})} + O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|^2R^2(\bar{z})}\Big)\Big)Y = 0. \tag{76}$$

Здесь $Q_0(\bar{z}) = 4^{-1}(\bar{z} - 1)^2\Lambda(\bar{z})R^{-2}(\bar{z})$, многочлен $R(\bar{z})$ задан формулой (49),

$$\Lambda(\bar{z}) = \bar{z}^2 + (3 - a)\bar{z} + 1. \tag{77}$$

Приравнивая $Q_0(\bar{z})$ к нулю, находим, что уравнение (76) имеет точку поворота $\bar{z} = 1$ кратности 2, а также простые точки поворота

$$\bar{z}_\pm = (-3 + a \pm i\sqrt{(a-1)(5-a)})/2. \tag{78}$$

Они лежат на окружности $|\bar{z}| = 1$ и перемещаются по ней от -1 к 1 при возрастании параметра a от 1 до 5.

Построим ВКБ-приближения для решений уравнения (76). Они справедливы вне малых окрестностей точек поворота и имеют вид

$$Y_\pm^{WKB} = \frac{\tilde{c}_\pm}{\sqrt[4]{Q_0(\bar{z})}}\exp\Big(\pm|m|\int\sqrt{Q_0(\bar{z})}\,d\bar{z} \mp \frac{\tilde{\xi}_k^{(1)}}{8}\int\frac{d\bar{z}}{R(\bar{z})\sqrt{Q_0(\bar{z})}}\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-1)^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-\bar{z}_+)^{3/2}}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-\bar{z}_-)^{3/2}}\Big)\Big), \quad |m| \to \infty. \tag{79}$$

Здесь $\tilde{c}_\pm$ — константы, в степенных функциях берутся главные значения. Кроме того, вдоль дуги окружности $\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$, которая соединяет точки $\bar{z}_-, \bar{z}_+$ и проходит через -1, проведен разрез.

Вычислим возникающие в (79) интегралы. Справедлива

Лемма 5. *ВКБ-приближения $Y_\pm^{WKB}$ представимы в виде*

$$Y_\pm^{WKB}=\frac{c_\pm(\bar z^2+3\bar z+1)^{\pm n/2+1/2}}{\sqrt{\bar z-1}\,\sqrt[4]{\Lambda(\bar z)}\;\bar z^{\pm|m|/2-1/2}}\left(\frac{2\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\sqrt{5-a}(\bar z+1)}{\bar z-1}\right)^{\pm\tilde\xi_k^{(1)}/(4\sqrt{5-a})}\times$$
$$\times\frac{[\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\bar z+1]^{\pm|m|}}{[\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\sqrt{a}(\bar z+1)]^{\pm n}}\left(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z-1)^2}\Big)+\right.$$
$$\left.+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z-\bar z_+)^{3/2}}\Big)+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z-\bar z_-)^{3/2}}\Big)\right),\quad |m|\to\infty. \tag{80}$$

Здесь $c_\pm$ — константы.

Доказательство. Воспользуемся следующими интегралами [30]:

$$\int\frac{d\bar z}{\bar z\sqrt{X(\bar z)}}=-\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{2\sqrt{cX(\bar z)}}{\bar z}+\frac{2c}{\bar z}+b\right)+C, \tag{81}$$

$$\int\frac{\sqrt{X(\bar z)}}{\bar z}\,d\bar z=\sqrt{X(\bar z)}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\ln\big(2\sqrt{aX(\bar z)}+2a\bar z+b\big)+c\int\frac{d\bar z}{\bar z\sqrt{X(\bar z)}}, \tag{82}$$

где $X(\bar z)=a\bar z^2+b\bar z+c$, константы $a>0$, $c>0$; C — произвольная константа. Из (81) вытекает, что

$$\int\frac{d\bar z}{(\bar z-1)\sqrt{\bar z^2+(3-a)\bar z+1}}=-\frac{1}{\sqrt{5-a}}\ln\left(\frac{2\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\sqrt{5-a}(\bar z+1)}{\bar z-1}\right)+C. \tag{83}$$

Поскольку

$$\frac{\bar z-1}{R(\bar z)}=\frac12\left(-\frac{2}{\bar z}+\frac{1+\sqrt5}{\bar z-\bar z_2}+\frac{1-\sqrt5}{\bar z-\bar z_3}\right),$$

то в силу (81), (82)

$$\int\frac{(\bar z-1)\sqrt{\bar z^2+(3-a)\bar z+1}}{R(\bar z)}d\bar z=\sqrt{\Lambda(\bar z)}\left[-1+\frac{1+\sqrt5}{2}+\frac{1-\sqrt5}{2}\right]+$$
$$+\left[-\frac{3-a}{2}+\frac{(1+\sqrt5)(\sqrt5-a)}{4}-\frac{(1-\sqrt5)(\sqrt5+a)}{4}\right]\times$$
$$\times\ln(2\sqrt{\Lambda(\bar z)}+2\bar z+3-a)+\ln\left(\frac{2\sqrt{\Lambda(\bar z)}+2+(3-a)\bar z}{\bar z}\right)-$$
$$-\frac{(1+\sqrt5)(\sqrt5-1)\sqrt a}{4}\ln\left(\frac{(\sqrt5-1)\sqrt a\sqrt{\Lambda(\bar z)}+(\sqrt5-a)\bar z+(3-\sqrt5)(a+\sqrt5)/2}{\bar z-\bar z_2}\right)-$$
$$-\frac{(1-\sqrt5)(\sqrt5+1)\sqrt a}{4}\ln\left(\frac{(\sqrt5+1)\sqrt a\sqrt{\Lambda(\bar z)}-(\sqrt5+a)\bar z+(3+\sqrt5)(a-\sqrt5)/2}{\bar z-\bar z_3}\right)+C=$$
$$=\ln\left(\frac{(2\sqrt{\Lambda(\bar z)}+2\bar z+3-a)(2\sqrt{\Lambda(\bar z)}+2+(3-a)\bar z)}{\bar z}\right)-$$
$$-\frac{n}{|m|}\ln\left(\frac{(\sqrt5-1)\sqrt a\sqrt{\Lambda(\bar z)}+(\sqrt5-a)\bar z+(3-\sqrt5)(a+\sqrt5)/2}{\bar z-\bar z_2}\right)-$$

$$-\frac{n}{|m|}\ln\left(\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{a}\sqrt{\Lambda(\bar z)}+(\sqrt{5}+a)\bar z+(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-a)/2}{(5-a)(a-1)(\bar z-\bar z_3)}\right)+C=$$

$$=\ln\left(\frac{(5-a)(\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\bar z+1)^2}{\bar z}\right)-\frac{n}{|m|}\ln\left(\frac{(\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\sqrt{a}(\bar z+1))^2}{(a-1)(\bar z^2+3\bar z+1)}\right)+C. \quad (84)$$

Подставляя интегралы (83), (84) в (79), приходим к равенству (80). □

Важную роль при построении асимптотических решений в комплексной плоскости играют линии Стокса [27], [31]. На рис. 1 помимо особых точек и точек поворота изображены линии Стокса для уравнения (76).

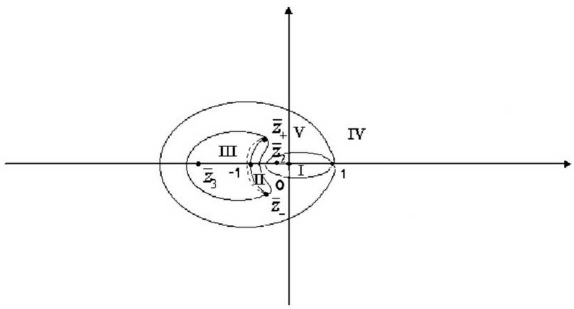

Рис. 1

В граф Стокса, в частности, входит дуга $\smile\bar z_-,\bar z_+$. Для доказательства данного утверждения определим функцию

$$W(\bar z)=\frac{|\bar z^2+3\bar z+1|^{\sqrt{a}/2}|\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\bar z+1|}{|\bar z|^{1/2}|\sqrt{\Lambda(\bar z)}+\sqrt{a}(\bar z+1)|^{\sqrt{a}}}.$$

Так как в силу (80)

$$W(\bar z)=W(\bar z_\pm)\exp\left(\operatorname{Re}\int_{\bar z_\pm}^{\bar z}\sqrt{Q_0(\bar z)}\,d\bar z\right),$$

выходящие из точки поворота $\bar z_\pm$ линии Стокса задаются уравнением

$$W(\bar z)=W(\bar z_\pm), \quad (85)$$

где $W(\bar z_\pm)=(a-1)^{(\sqrt{a}-1)/2}$. После замены $\tau=\bar z/(\bar z+1)^2$ уравнение (85) принимает вид

$$\frac{|1+\tau|^{\sqrt{a}/2}\,|\sqrt{1+(1-a)\tau}+1|}{|\tau|^{1/2}\,|\sqrt{1+(1-a)\tau}+\sqrt{a}|^{\sqrt{a}}}=(a-1)^{(\sqrt{a}-1)/2}. \quad (86)$$

Если $\bar z$ перемещается по дуге $\smile\bar z_-,\bar z_+$ от точки $\bar z_-$ к точке $\bar z_+$, то переменная τ дважды проходит промежуток $[1/(a-1),+\infty)$. Поскольку при этом справедливы равенства

$$|\sqrt{1+(1-a)\tau}+1|=\sqrt{(a-1)\tau},\quad |\sqrt{1+(1-a)\tau}+\sqrt{a}|=\sqrt{(a-1)(\tau+1)},$$

уравнение (86) на дуге $\smile\bar z_-,\bar z_+$ выполнено.

Изучим поведение ВКБ-приближений $Y_{\pm}^{WKB}$ вблизи точек поворота. Разлагая входящие в (79) функции по формуле Тейлора, получаем

Лемма 6. *Справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$Y_{\pm}^{WKB} = \frac{c_{\pm}^{(+)}}{\sqrt[4]{\bar z - \bar z_+}} \exp\Big(\pm|m|\tau_+ \frac{2}{3}(\bar z - \bar z_+)^{3/2}\Big)\Big(1 + O(|m|(\bar z - \bar z_+)^{5/2}) + + O(\sqrt{\bar z - \bar z_+}) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - \bar z_+)^{3/2}}\Big)\Big) \quad (87)$$

при $\bar z \to \bar z_+$, $|\arg(\tau_+^{2/3}(\bar z - \bar z_+))| < \pi$;

$$Y_{\pm}^{WKB} = \frac{c_{\pm}^{(-)}}{\sqrt[4]{\bar z - \bar z_-}} \exp\Big(\pm|m|\tau_- \frac{2}{3}(\bar z - \bar z_-)^{3/2}\Big)\Big(1 + O(|m|(\bar z - \bar z_-)^{5/2}) + + O(\sqrt{\bar z - \bar z_-}) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - \bar z_-)^{3/2}}\Big)\Big) \quad (88)$$

при $\bar z \to \bar z_-$, $|\arg(\tau_-^{2/3}(\bar z - \bar z_-))| < \pi$;

$$Y_{\pm}^{WKB} = c_{\pm}^{(1)}(\bar z - 1)^{-1/2 \mp \tilde\xi_k^{(1)}/(4\sqrt{5-a})} \exp\Big(\pm\frac{|m|\sqrt{5-a}}{20}[(\bar z - 1)^2 - (\bar z - 1)^3]\Big) \times \times \Big(1 + O(\bar z - 1) + O(|m|(\bar z - 1)^4) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - 1)^2}\Big)\Big) \quad (89)$$

при $\bar z \to 1$. *Здесь* $c_{\pm}^{(+)}$, $c_{\pm}^{(-)}$, $c_{\pm}^{(1)}$ — *константы,*

$$\tau_{\pm} = \frac{(\bar z_{\pm} - 1)\sqrt{|\bar z_+ - \bar z_-|}}{2\bar z_{\pm}^2 a} e^{\pm i\pi/4} = \frac{(a - 5 \pm i\sqrt{(a-1)(5-a)})\sqrt[4]{(a-1)(5-a)}}{4\bar z_{\pm}^2 a} e^{\pm i\pi/4}. \quad (90)$$

Найдем, наконец, ВКБ-приближения для решений уравнения (48). В силу (67), (68), (80) имеем:

$$\Phi_-^{WKB} = \frac{c_-}{\sqrt[4]{(\bar z - \bar z_-)(\bar z - \bar z_+)}}(\bar z - 1)^{-1/2 + \tilde\xi_k^{(1)}/(4\sqrt{5-a})} \times \times \big(2\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \sqrt{5-a}(\bar z + 1)\big)^{-\tilde\xi_k^{(1)}/(4\sqrt{5-a})} \frac{[\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \sqrt{a}(\bar z + 1)]^n}{[\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \bar z + 1]^{|m|}} \times \times \Big(1 + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - 1)^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - \bar z_+)^{3/2}}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - \bar z_-)^{3/2}}\Big)\Big), \quad (91)$$

$$\Phi_+^{WKB} = \frac{c_+(\bar z - 1)^{-1/2 - \tilde\xi_k^{(1)}/(4\sqrt{5-a})}(\bar z^2 + 3\bar z + 1)^n}{\sqrt[4]{(\bar z - \bar z_-)(\bar z - \bar z_+)}\,\bar z^{|m|}} \times \times \big(2\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \sqrt{5-a}(\bar z + 1)\big)^{\tilde\xi_k^{(1)}/(4\sqrt{5-a})} \frac{[\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \bar z + 1]^{|m|}}{[\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \sqrt{a}(\bar z + 1)]^n} \times \times \Big(1 + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - 1)^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - \bar z_+)^{3/2}}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z - \bar z_-)^{3/2}}\Big)\Big).$$

Здесь $\Lambda(\bar z)$ задана формулой (77), $c_{\pm}$ — константы.

§ 8. Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи. Вычисление поправки в спектральной серии

Перейдем к построению асмптотического решения многоточечной спектральной задачи $p(\bar z)$. Вблизи особых точек (51) выбираются решения с характеристическими показателями, равными нулю, а в особой точке $\bar z_4 = \infty$ — с показателем, равным $-n+|m|+1$. Согласно формуле (91) нулевые показатели в особых точках (51) имеет $\Phi_-^{WKB}(\bar z)$. Кроме того, если выполнены условия (30), (31), то при $|\bar z| \gg |m|$ справедлива асимптотика

$$\Phi_-^{WKB}(\bar z) = \frac{c_-(\sqrt{a}+1)^n}{(2+\sqrt{5-a})^{\tilde\xi_k^{(1)}/(4\sqrt{5-a})}2^{|m|}}\,\bar z^{n-|m|-1}\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)+O\Big(\frac{|m|}{\bar z}\Big)\Big). \tag{92}$$

Поэтому ВКБ-приближение $\Phi_-^{WKB}(\bar z)$ задает асмптотическое решение многоточечной спектральной задачи в областях I–IV (см. рис. 1).

Найдем асимптотические решения около точек поворота $\bar z_\pm$. Из уравнения (76) вытекает, что вблизи $\bar z_\pm$

$$\hbar^2\frac{d^2Y}{d\bar z^2} - \Big(\tau_\pm^2(\bar z-\bar z_\pm)+O((\bar z-\bar z_\pm)^2)+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)\Big)Y = 0.$$

Следовательно, главные члены асимптотических разложений вблизи $\bar z_\pm$ выражаются через функции Эйри:

$$y_\pm^0 = \alpha_{1,\pm}\,\mathrm{Ai}(|m|^{2/3}\tau_\pm^{2/3}(\bar z-\bar z_\pm)) + \alpha_{2,\pm}\,\mathrm{Bi}(|m|^{2/3}\tau_\pm^{2/3}(\bar z-\bar z_\pm)). \tag{93}$$

Здесь $\alpha_{1,\pm}, \alpha_{2,\pm}$ — константы, $\tau_\pm$ заданы формулой (90).

Построим решение многоточечной спектральной задачи вблизи точки поворота $\bar z = 1$, а также определим числа $\tilde\xi_k^{(1)}$. Разложим в уравнении (76) функции $Q_0(\bar z)$ и $R(\bar z)$ по формуле Тейлора в окрестности $\bar z = 1$. В результате после замены

$$\bar u = \frac{\sqrt{|m|}(\bar z-1)}{\beta}, \tag{94}$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt5}{\sqrt[4]{5-a}}, \tag{95}$$

получаем, что

$$\frac{d^2Y}{d\bar u^2} + \Big\{-\frac{\bar u^2}{4} + v + \frac12 + \frac{1}{\sqrt{|m|}}\Big(\frac34\beta\bar u^3 - \frac{\tilde\xi_k^{(1)}\beta^3\bar u}{10}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{\bar u^4}{|m|}\Big)\Big\}\,Y = 0. \tag{96}$$

Здесь

$$v = \frac{\tilde\xi_k^{(1)}\beta^2}{20} - \frac12. \tag{97}$$

Будем искать асимптотическое решение (96) в виде

$$Y = y_0(\bar u) + \frac{y_1(\bar u)}{\sqrt{|m|}} + O\Big(\frac{y_0}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{\bar u^6 y_0}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{\bar u}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Big) + O\Big(\frac{\bar u^3}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Big). \tag{98}$$

Тогда главный член асимптотики удовлетворяет уравнению Вебера

$$\frac{d^2y_0}{d\bar{u}^2}+\Big(-\frac{\bar{u}^2}{4}+\nu+\frac{1}{2}\Big)y_0=0,$$

общее решение которого представимо в виде линейной комбинации функций параболического цилиндра

$$y_0=\alpha_1D_\nu(\bar{u})+\alpha_2D_{-\nu-1}(i\bar{u}). \tag{99}$$

Здесь α_1, α_2 — константы.

Произведем согласование асимптотических разложений. Воспользуемся асимптотическими разложениями для функций параболического цилиндра [22]. При $|z|\to\infty$ имеем:

$$D_\nu(z)=z^\nu e^{-z^2/4}(1+O(z^{-2})),\quad |\arg z|<\frac{3\pi}{4}; \tag{100}$$

$$D_\nu(z)=z^\nu e^{-z^2/4}(1+O(z^{-2}))-\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}\,e^{\nu\pi i}z^{-\nu-1}e^{z^2/4}(1+O(z^{-2})),\\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{5\pi}{4}, \tag{101}$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма функция. Следовательно, при $|\bar{u}|\to\infty$, $|\arg\bar{u}|<\pi/4$

$$y_0=\alpha_1\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\bar{z}-1)}{\beta}\Big)^\nu\exp\Big(-\frac{|m|\sqrt{5-a}(\bar{z}-1)^2}{20}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-1)^2}\Big)\Big)+\\ +\alpha_2\Big(\frac{i\sqrt{|m|}(\bar{z}-1)}{\beta}\Big)^{-\nu-1}\exp\Big(\frac{|m|\sqrt{5-a}(\bar{z}-1)^2}{20}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-1)^2}\Big)\Big). \tag{102}$$

Первое слагаемое в (102) экспоненциально убывает, а второе — экспоненциально растет. В области IV вблизи $\bar{z}=1$ (на расстоянии порядка $|m|^{-3/8}$) при $|\arg\bar{u}|<\pi/4$ функция y_0 должна согласовываться с Y_-^{WKB}, имеющим разложение (89). Поскольку члены этого разложения экспоненциально убывают при $|\arg\bar{u}|<\pi/4$, константа

$$\alpha_2=0. \tag{103}$$

Далее, в силу (101) при $|\bar{u}|\to\infty$, $3\pi/4<\arg\bar{u}<5\pi/4$

$$y_0=\alpha_1\Big[\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\bar{z}-1)}{\beta}\Big)^\nu\exp\Big(-\frac{|m|\sqrt{5-a}(\bar{z}-1)^2}{20}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-1)^2}\Big)\Big)-\\ -\frac{\sqrt{2\pi}\exp(\nu\pi i)}{\Gamma(-\nu)}\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\bar{z}-1)}{\beta}\Big)^{-\nu-1}\exp\Big(\frac{|m|\sqrt{5-a}(\bar{z}-1)^2}{20}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-1)^2}\Big)\Big)\Big].$$

Здесь первое слагаемое экспоненциально убывает, а второе — экспоненциально растет. В области I вблизи $\bar{z}=1$ при $3\pi/4<\arg\bar{u}<5\pi/4$ функция y_0 также должна согласовываться с Y_-^{WKB}, имеющим разложение (89). Поскольку члены этого разложения экспоненциально убывают при $3\pi/4<\arg\bar{u}<5\pi/4$, приходим к условию

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu)}=0.$$

Как известно [32], гамма функция $\Gamma(-v)$ имеет полюсы лишь при

$$v = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{104}$$

Так как v и $\tilde{\xi}_k^{(1)}$ связаны равенством (97), поправка в спектральной серии найдена. Доказана

Лемма 7. *Числа* $\tilde{\xi}_k^{(1)}$ *в формуле* (75) *имеют вид*

$$\tilde{\xi}_k^{(1)} = 4\sqrt{5-a}\Big(k+\frac{1}{2}\Big), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{105}$$

Из равенств (99), (103)–(105) вытекает, что

$$y_0 = \alpha_1 D_k(\bar{u}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{106}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{c_-^{(1)}\beta^k}{|m|^{k/2}} = \frac{c_- 5^{(k+1)/2}}{|m|^{k/2}(\sqrt{5-a})^{3k/2+1}4^{k+1/2}}\left(\frac{(\sqrt{5-a}+2\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}{(\sqrt{5-a}+2)\,5^{\sqrt{a}/2}}\right)^{|m|}. \tag{107}$$

Функции в правой части (106) выражаются через полиномы Эрмита:

$$y_0 = \frac{\alpha_1}{2^{k/2}}H_k\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)e^{-\bar{u}^2/4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{108}$$

Найдем следующий член в разложении (98). Из (96), (97), (104)–(106) вытекает, что y_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y_1}{d\bar{u}^2} + \Big(-\frac{\bar{u}^2}{4}+k+\frac{1}{2}\Big)y_1 = \Big(-\frac{3}{4}\bar{u}^3+2\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\bar{u}\Big)\beta\alpha_1 D_k(\bar{u}). \tag{109}$$

Непосредственным дифференцированием доказывается, что общее решение уравнения (109) имеет вид

$$y_1 = -\frac{\beta\alpha_1}{2}[\bar{u}^2 D_k'(\bar{u}) - \bar{u}D_k(\bar{u})] + \alpha_{1,1}D_k(\bar{u}) + \alpha_{1,2}D_{-k-1}(i\bar{u}).$$

Здесь $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$ — константы. Из условия согласования функции y_1 с ВКБ-приближением вытекает, что $\alpha_{1,2}=0$. Положим, кроме того, $\alpha_{1,1}=0$, считая при этом, что в α_1 содержится поправка порядка $|m|^{-1/2}$. Функция y_1 также выражается через полиномы Эрмита:

$$y_1 = \frac{\beta\alpha_1}{2^{(k+1)/2}}\left\{\left[\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^3+\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right]H_k\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)^2 H_k'\left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\right)\right\}e^{-\bar{u}^2/4}. \tag{110}$$

Так как справедливо равенство (67), то для нахождения асимптотического решения многоточечной спектральной задачи вблизи $\bar{z}=1$ остается разложить функцию $E(\bar{z})$ по степеням $\bar{z}-1$. Делая замену (94), получаем:

$$E(\bar{z}) = 5^{|m|\sqrt{a}/2-1/2}\exp\left(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta\bar{u}}{2}+\frac{(5-3\sqrt{a})\beta^2\bar{u}^2}{20}\right)\Big\{1+ \\ +\frac{\beta}{\sqrt{|m|}}\left[\frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{a}}{5}-\frac{1}{2}\Big)\beta^2\bar{u}^3-\bar{u}\right]+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)+O\Big(\frac{\bar{u}^4}{|m|}\Big)\Big\}. \tag{111}$$

Далее перемножим (111) и (98). Поскольку y_0, y_1 определены соотношениями (108), (110), приходим к разложению

$$p(\bar z) = p_0(\bar u) + \frac{p_1(\bar u)}{\sqrt{|m|}} + O\Big(\frac{p_0}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{\bar u^6 p_0}{|m|}\Big) +$$

$$+\exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta\bar u}{2} + \frac{(5-3\sqrt{a})\beta^2\bar u^2}{20}\Big)\Big(O\Big(\frac{\bar u}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Big) + O\Big(\frac{\bar u^5}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Big)\Big), \quad (112)$$

где

$$p_0 = \alpha_1\mu\exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta\bar u}{2} + \Big(-1+\frac{(5-3\sqrt{a})}{\sqrt{5-a}}\Big)\frac{\bar u^2}{4}\Big) H_k\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big), \quad (113)$$

$$p_1 = \frac{\beta\alpha_1\mu}{\sqrt2}\exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta\bar u}{2} + \Big(-1+\frac{(5-3\sqrt{a})}{\sqrt{5-a}}\Big)\frac{\bar u^2}{4}\Big)\times$$
$$\times\Big\{\Big[\Big(\frac{2(2\sqrt{a}-5)}{3\sqrt{5-a}}+1\Big)\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big)^3 - \frac{\bar u}{\sqrt2}\Big]H_k\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big) - \Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big)^2 H_k'\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big)\Big\}.$$

Здесь константа

$$\mu = 5^{|m|\sqrt{a}/2-1/2}2^{-k/2}.$$

Доказана

Лемма 8. *Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи вблизи точки поворота* $\bar z = 1$ *имеет вид* (112).

Продолжим процесс согласования асимптотик. В силу (89), (100) в области V вблизи $\bar z = 1$ функция (112) согласуется с $\Phi_-^{WKB}(\bar z)$. Поэтому и в этой области ВКБ-приближение равно $\Phi_-^{WKB}(\bar z)$.

Далее, в силу известных асимптотик для функций Эйри [32]

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}}\exp\Big(-\frac{2}{3}z^{3/2}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{z^2}\Big)\Big), \quad |\arg z| < \pi,\ |z|\to\infty,$$

и

$$\mathrm{Bi}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}}\exp\Big(\frac{2}{3}z^{3/2}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{z^2}\Big)\Big), \quad |\arg z| < \frac{\pi}{3},\ |z|\to\infty,$$

при $|\arg(\tau_\pm^{2/3}(\bar z-\bar z_\pm))| < \pi/3$, $|m|^{2/3}(\bar z-\bar z_\pm)\to\infty$,

$$y_\pm^0 = \frac{\alpha_{1,\pm}}{|m|^{1/6}2\sqrt{\pi}\tau_\pm^{1/6}\sqrt[4]{\bar z-\bar z_\pm}}\exp\Big(-\frac{2|m|\tau_\pm(\bar z-\bar z_\pm)^{3/2}}{3}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z-\bar z_+)^{3/2}}\Big)\Big) +$$

$$+\frac{\alpha_{2,\pm}}{|m|^{1/6}\sqrt{\pi}\tau_\pm^{1/6}\sqrt[4]{\bar z-\bar z_\pm}}\exp\Big(\frac{2|m|\tau_\pm(\bar z-\bar z_\pm)^{3/2}}{3}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|(\bar z-\bar z_+)^{3/2}}\Big)\Big). \quad (114)$$

В формуле (114) первое слагаемое экспоненциально убывает, а второе — экспоненциально возрастает. Согласуем разложение (114) вблизи $\bar z_\pm$ (на расстоянии порядка $|m|^{-1/2}$) с ВКБ-приближением $Y_-^{WKB}(\bar z)$, которое справедливо в области V (см. рис. 1). В силу (87), (88) $\Phi_-^{WKB}(\bar z)$ имеет экспоненциально убывающую асимптотику при стремлении $\bar{z}$ к $\bar{z}_+$ и $\bar{z}_-$ в пределах этой области. Следовательно, в формуле (93) $\alpha_{2,\pm}=0$, а константа

$$\alpha_{1,\pm} = c_-^{(\pm)} 2\sqrt{\pi}\tau_\pm^{1/6}|m|^{1/6}. \tag{115}$$

Асимптотические разложения, построенные вблизи точек $\bar{z}_+$, $\bar{z}_-$, в областях II и III также согласуются с $Y_-^{WKB}(\bar{z})$.

Определим

$$\mu_{1,\pm} = \Big(\frac{3}{\sqrt{a}} - 1\Big)\bar{z}_\mp + \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad \mu_{2,\pm} = \Big(\frac{15}{a^{3/2}} - \frac{7}{a^{1/2}} - 3 + a\Big)\bar{z}_\mp + \frac{5}{a^{3/2}} - 1.$$

Разлагая в окрестностях точек $\bar{z}_+$ и $\bar{z}_-$ функцию (68) по формуле Тейлора, получаем

Лемма 9. *Асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи вблизи точки $\bar{z}_\pm$ имеет вид*

$$p(\bar{z}) = E(\bar{z}_\pm)\exp\Big(\mu_{1,\pm}|m|\frac{\bar{z}-\bar{z}_\pm}{2} + \mu_{2,\pm}|m|\frac{(\bar{z}-\bar{z}_\pm)^2}{4}\Big)\Big(y_\pm^0 + O\big((\bar{z}-\bar{z}_\pm)y_\pm^0\big) + \\ + O\big(|m|(\bar{z}-\bar{z}_\pm)^3 y_\pm^0\big) + O\Big(\frac{1}{|m|}\frac{dy_\pm^0}{d\bar{z}}\Big) + O\Big((\bar{z}-\bar{z}_\pm)^2\frac{dy_\pm^0}{d\bar{z}}\Big)\Big), \tag{116}$$

где $y_\pm^0 = \alpha_{1,\pm}\operatorname{Ai}(|m|^{2/3}\tau_\pm^{2/3}(\bar{z}-\bar{z}_\pm))$*, а константа* $\alpha_{1,\pm}$ *задана формулой* (115).

Формула (105) для $\tilde{\xi}_k^{(1)}$ позволяет записать в окончательной форме выражение (91) для $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$:

$$\Phi_-^{WKB}(\bar{z}) = \Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z})\Big(1 + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-1)^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-\bar{z}_+)^{3/2}}\Big) + \\ + O\Big(\frac{1}{|m|(\bar{z}-\bar{z}_-)^{3/2}}\Big)\Big), \tag{117}$$

где

$$\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z}) = \frac{c_-(\bar{z}-1)^k\big[\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{a}(\bar{z}+1)\big]^n}{\sqrt[4]{\Lambda(\bar{z})}\big[2\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \sqrt{5-a}(\bar{z}+1)\big]^{k+1/2}\big[\sqrt{\Lambda(\bar{z})} + \bar{z} + 1\big]^{|m|}}, \tag{118}$$

$k=0, 1, 2, \ldots$, c_- — константа, $\Lambda(\bar{z})$ определен формулой (77).

Таким образом, асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи построено. Числа $\tilde{\xi}_k$ задаются формулами (75), (105), а антиголоморфная функция $p(\bar{z})$ получается в результате согласования асимптотик. А именно, $p(\bar{z}) = \Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ является асимптотическим решением уравнения (48) на всей комплексной плоскости за исключением малых окрестностей точек поворота $\bar{z}_+, \bar{z}_-, 1$, а также дуги $\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$. Вблизи точек $\bar{z}_+, \bar{z}_-, 1$ функция $p(\bar{z})$ задается формулами (116), (112) соответственно. Асимптотики согласуются между собой на расстояниях порядка $|m|^{-1/2}$ от точек $\bar{z}_\pm$ и порядка $|m|^{-3/8}$ от точки 1.

Наконец, вблизи дуги $\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$, которая является линией Стокса, искомая асимптотика представима в виде суммы двух функций $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$, причем в первой функции берется ветвь, отвечающая обходу точек $\bar{z}_\pm$ против часовой стрелки, а во второй — по часовой стрелке. Такое представление для $p(\bar{z})$ вытекает из известного разложения функции Эйри [32]

$$\mathrm{Ai}(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{z}} \sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{7/4}}\right), \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3},\ |z| \to \infty.$$

§ 9. Асимптотика многочленов $\Phi(\bar{z})$. Дискретный метод ВКБ

Подставим асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи $p(\bar{z})$ в правую часть формулы (57) и вычислим асимптотику возникающего интеграла. Подынтегральная функция в (57) не имеет точек перевала. Поэтому воспользуемся интегральной теоремой Коши.

Лемма 10. *При $\bar{z} \notin \smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$ и таких, что*

$$|\bar{z} - 1| \gtrsim |m|^{-3/8}, \quad |\bar{z} - \bar{z}_\pm| \gtrsim |m|^{-1/2}, \tag{119}$$

определенный формулой (57) *многочлен* $\Phi(\bar{z})$ *представи́м в виде*

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_-^{WKB}(\bar{z}) + N(\bar{z}), \tag{120}$$

где

$$N(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i} \oint_{\gamma_{+,-}} \frac{\Phi_-^{WKB}(\bar{u})\, d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u} - \bar{z})}. \tag{121}$$

Здесь замкнутый контур $\gamma_{+,-}$ является дугой окружности $\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$, проходимой дважды по берегам разреза, соединяющего точки $\bar{z}_-, \bar{z}_+$, который ориентирован против часовой стрелки.

Доказательство. Пусть $\bar{z}$ лежит вне цикла γ, $\bar{z} \notin \smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$ и выполнены условия (119). Рассмотрим контуры, изображенные на рис. 2. Окружность с центром в точке $\bar{z} = 1$ имеет радиус порядка $|m|^{-3/8}$, а окружности с центром в $\bar{z}_\pm$ — порядка $|m|^{-1/2}$. Воспользовавшись интегральной теоремой Коши и

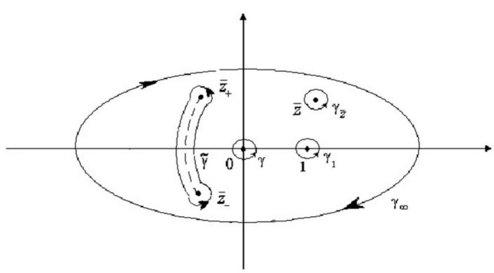

Рис. 2

интегральной формулой Коши, представим интеграл по γ в следующем виде:

$$\Phi(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} = -\frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma_{\bar{z}}}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} -$$
$$-\frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} - \frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} - \frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma_\infty}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})}. \tag{122}$$

Изучим входящие в (122) слагаемые. Из интегральной формулы Коши вытекает, что

$$-\frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma_{\bar{z}}}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} = \Phi_{-}^{WKB}(\bar{z}).$$

Далее, в силу антиголоморфности подынтегральной функции

$$\oint_{\gamma_1}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} = 0,$$

а

$$\oint_{\gamma_\infty}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} = 0$$

согласно теореме о вычетах и (92). Наконец, учитывая (87), (88), продеформируем контур γ в контур $\gamma_{+,-}$. В результате равенство (122) принимает вид (120).

Пусть теперь $\bar{z}$ лежит внутри γ. Тогда

$$\Phi(\bar{z}) = \Phi_{-}^{WKB}(\bar{z}) + \frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})}. \tag{123}$$

Интеграл в (123) преобразуется аналогично случаю, когда $\bar{z}$ лежит вне γ. В результате снова приходим к формуле (120). □

Перейдем к рассмотрению $\bar{z}$, расположенных внутри γ_1. Аналогично (122) находим, что

$$\Phi(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{p(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} - \frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\gamma_\infty}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})} - \frac{\bar{z}^{n-|m|}}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}}\frac{\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})d\bar{u}}{\bar{u}^{n-|m|}(\bar{u}-\bar{z})}. \tag{124}$$

Интегралы по контурам γ_∞ и $\tilde{\gamma}$ в (124) были изучены выше при доказательстве леммы 10, а интеграл по контуру γ_1 вычисляется с помощью интегральной формулы Коши. Таким образом, справедливо равенство

$$\Phi(\bar{z}) = p(\bar{z}) + N(\bar{z}), \tag{125}$$

где $p(\bar{z})$, $N(\bar{z})$ определены формулами (112), (121).

Оценим входящий в (121) интеграл. Имеем:

$$|N(\bar{z})| \leqslant \frac{|\bar{z}|^{n-|m|}}{2\pi}\oint_{\gamma_{+,-}}\frac{|\Phi_{-}^{WKB}(\bar{u})||d\bar{u}|}{|\bar{u}-\bar{z}|}. \tag{126}$$

Так как $\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$ — линия Стокса, то на ней в силу (77), (78), (80)

$$\frac{|\sqrt{\Lambda(\bar{u})}+\sqrt{a}(\bar{u}+1)|^n}{|\sqrt{\Lambda(\bar{u})}+\bar{u}+1|^{|m|}\,|\bar{u}^2+3\bar{u}+1|^{n/2}} = \frac{(\sqrt{a}|\bar{z}_\pm+1|)^n}{|\bar{z}_\pm+1|^{|m|}a^{n/2}} = (\sqrt{a-1})^{(\sqrt{a}-1)|m|}. \tag{127}$$

Далее, из (68), (127) вытекает, что

$$|\Phi_-^{WKB}(\bar{u})| = \frac{|c_-|\,|\bar{u}^2+3\bar{u}+1|^{\sqrt{a}|m|/2}(\sqrt{a-1})^{(\sqrt{a}-1)|m|}\vartheta(\bar{u})}{\sqrt[4]{|\Lambda(\bar{u})|}}\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)+ \\ +O\Big(\frac{1}{|m|\,|\bar{u}-\bar{z}_+|^{3/2}}\Big)+O\Big(\frac{1}{|m|\,|\bar{u}-\bar{z}_-|^{3/2}}\Big)\Big).$$

Здесь

$$\vartheta(\bar{u}) = \frac{|\bar{u}-1|^k}{|2\sqrt{\Lambda(\bar{u})}+\sqrt{5-a}(\bar{u}+1)|^{k+1/2}}$$

— непрерывная функция, $\bar{u}\in\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$. Поскольку при $\bar{u}=e^{i\varphi}\in\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$

$$|\bar{u}^2+3\bar{u}+1| = |2\cos\varphi+3|, \tag{128}$$

то $\max_{\bar{u}\in\smile\bar{z}_-,\bar{z}_+}|\bar{u}^2+3\bar{u}+1|=a$ достигается при $\bar{u}=\bar{z}_\pm$. Следовательно, наибольший вклад в асимптотику интеграла (126) вносят малые окрестности точек поворота $\bar{z}_\pm$. Учитывая [33], что

$$\int_0^\infty x^{-1/4}e^{-|m|x}\,dx = |m|^{-3/4}\,\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big),$$

получаем

Лемма 11. *При* $|m|\to\infty$, $\bar{z}\notin\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$ *справедлива оценка*

$$|N(\bar{z})| \leqslant T|m|^{-3/4}|c_-|(a^{\sqrt{a}}(a-1)^{\sqrt{a}-1})^{|m|/2}|\bar{z}|^{n-|m|}\Big(\frac{1}{|\bar{z}-\bar{z}_+|}+\frac{1}{|\bar{z}-\bar{z}_-|}\Big). \tag{129}$$

Здесь T — *константа.*

Далее воспользуемся тем, что на окружности $|\bar{z}|=1$ функция

$$M(\bar{z}) = \frac{|\sqrt{\Lambda(\bar{z})}+\sqrt{a}(\bar{z}+1)|^{\sqrt{a}}}{|\sqrt{\Lambda(\bar{z})}+\bar{z}+1|}$$

достигает максимального значения при $\bar{z}=1$. Действительно, в силу (127), (128) $M(\bar{z})$ имеет на дуге $\smile\bar{z}_-, \bar{z}_+$ максимум в точках поворота $\bar{z}_\pm$. Рассмотрим оставшуюся часть окружности $|\bar{z}|=1$. На ней

$$M(e^{i\varphi}) = \frac{\Big(\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}+1-a}+2\sqrt{a}\cos\frac{\varphi}{2}\Big)^{\sqrt{a}}}{\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}+1-a}+2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Так как

$$\frac{d}{d\varphi}M(e^{i\varphi}) = -\frac{(a-1)M(e^{i\varphi})\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}+1-a}+2\sqrt{a}\cos\frac{\varphi}{2}},$$

то согласно знаку производной функция $M(\bar{z})$ на дуге $\smile\bar{z}_+, 1$ при приближении к $\bar{z}=1$ возрастает, а на дуге $\smile 1, \bar{z}_-$ — убывает. Следовательно, единственной точкой максимума $M(\bar{z})$ на окружности $|\bar{z}|=1$ является $\bar{z}=1$.

Поскольку

$$M(1) > M(\bar{z}_\pm) = \sqrt{a}^{\sqrt{a}}\sqrt{a-1}^{\sqrt{a}-1}, \tag{130}$$

то в силу (129), (118) в окрестности точки $\bar{z}=1$, которая дает основной вклад при вычислении средних, $N(\bar{z})$ экспоненциально мала по сравнению с $p(\bar{z})$. Здесь $p(\bar{z})$ — разложение (112), которое справедливо вблизи $\bar{z}=1$ и согласуется с $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$. Отметим, что вблизи $\bar{z}=1$ экспоненциально малыми будут и производные от $N(\bar{z})$ ограниченного при $|m|\to\infty$ порядка.

Покажем, что $N(\bar{z})$ мала по сравнению с $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$ и при $|\bar{z}|\gg|m|$. Оценка (129) при $|\bar{z}|\to\infty$ оказывается слишком грубой. Действительно, малость $N(\bar{z})$ вытекает из (129), (92) лишь для $a\in(1, a_*)$, где $a_*\approx 2{,}34$, поскольку лишь при таких значениях параметра a выполняется неравенство

$$\frac{(\sqrt{a}+1)^{\sqrt{a}}}{2} > \sqrt{a}^{\sqrt{a}}\sqrt{a-1}^{\sqrt{a}-1}.$$

Получим оценку $N(\bar{z})$, пригодную для всех значений $a\in(1, 5)$.

В силу (117), (121) при $|\bar{z}|\to\infty$

$$N(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^{n-|m|-1}}{2\pi i}\oint_{\gamma_{+,-}}\frac{\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{u})}{\bar{u}^{n-|m|}}\,d\bar{u}\,\left(1+O\left(\frac{1}{|m|}\right)+O\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\right). \tag{131}$$

Подынтегральная функция в (131) не имеет точек перевала. Для нахождения асимптотики интеграла выразим его через коэффициенты сходящегося вблизи нуля степенного ряда

$$\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty}\zeta_j\bar{z}^j \tag{132}$$

и далее применим дискретный метод ВКБ [34], [35].

Из (118) вытекает, что функция $\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z})$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi_{-,0}^{WKB}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = (-1)^k\frac{\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z})}{\bar{z}^{n-|m|-1}}.$$

Поэтому при $|\bar{z}|\to\infty$ имеет место разложение

$$\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{z}) = (-1)^k\sum_{j=0}^{\infty}\zeta_j\bar{z}^{n-|m|-1-j}. \tag{133}$$

Далее, деформируя контур $\gamma_{+,-}$, представим интеграл в (131) в виде суммы двух интегралов по циклам вокруг $\bar{u}=0$ и $\bar{u}=\infty$. Учитывая разложения (132), (133), получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{+,-}}\frac{\Phi_{-,0}^{WKB}(\bar{u})}{\bar{u}^{n-|m|}}d\bar{u} = \zeta_{n-|m|-1}-(-1)^k\zeta_0. \tag{134}$$

В силу (48) коэффициенты ζ_j степенного ряда (132) удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$R\Big(\frac{j}{|m|}\Big)\zeta_{j+1}+Q\Big(\frac{j}{|m|}\Big)\zeta_j+P\Big(\frac{j}{|m|}\Big)\zeta_{j-1}=0. \tag{135}$$

Здесь

$$R(x)=x^2+x+\frac{1}{|m|}(2x+1)+O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big), \tag{136}$$

$$P(x)=(x-\sqrt{a})(x-\sqrt{a}+1)+O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big), \tag{137}$$

$$Q(x)=3x^2-3(\sqrt{a}-1)x+\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-5)}{4}+\\
+\frac{1}{|m|}\Big(3x-\frac{3(\sqrt{a}-1)}{2}+\sqrt{5-a}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\Big)+O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big). \tag{138}$$

Асимптотика ζ_j, $j=0,\dots,n-|m|-1$, при $|m|\to\infty$ находится с помощью дискретного метода ВКБ. Определим

$$A(x)=\sqrt{\frac{P(x)}{R(x)}},\quad B(x)=-\frac{Q(x)}{2\sqrt{P(x)R(x)}}. \tag{139}$$

Согласно [34] при $B(x)>1$ главные члены ВКБ-приближений $\zeta^{(0)}_{j,\pm}$ имеют вид

$$\zeta^{(0)}_{j,\pm}=\frac{1}{\sqrt[4]{B^2(j/|m|)-1}}\exp\Big(|m|\int_{j_0/|m|}^{j/|m|}\Big\{\ln A(x)\pm\Big(\ln(B(x)+\sqrt{B^2(x)-1})-\\
-\frac{1}{2A(x)}\frac{dA(x)}{dx}\frac{B(x)}{\sqrt{B^2(x)-1}}\Big)\Big\}\,dx\Big). \tag{140}$$

Здесь j_0 — константа.

Произведем замену

$$x_1=x-\frac{\sqrt{a}-1}{2}+\frac{1}{2|m|}.$$

Тогда если $x=j/|m|$, где $j=0,\dots,n-|m|-1$, то

$$x_1\in\Big[-\frac{\sqrt{a}-1}{2}+\frac{1}{2|m|},\ \frac{\sqrt{a}-1}{2}-\frac{1}{2|m|}\Big].$$

Из формул (136)–(139) вытекает

Лемма 12. *При $|m|\to\infty$ справедливы равенства*

$$A(x_1)=\sqrt{\frac{(x_1-(\sqrt{a}+1)/2)(x_1-(\sqrt{a}-1)/2)}{(x_1+(\sqrt{a}-1)/2)(x_1+(\sqrt{a}+1)/2)}}\Big\{1-\frac{1}{4|m|}\Big[\frac{1}{x_1-(\sqrt{a}+1)/2}+\\
+\frac{1}{x_1-(\sqrt{a}-1)/2}+\frac{1}{x_1+(\sqrt{a}-1)/2}+\frac{1}{x_1+(\sqrt{a}+1)/2}\Big]+O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big)\Big\},$$

$$B(x_1)=\frac{1}{4\sqrt{(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}}\Big\{-6x_1^2+a-1-$$
$$-\frac{1}{|m|}\Big[2\sqrt{5-a}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)+3\sqrt{a}+\frac{4\sqrt{a}(a+11)x_1^2-\sqrt{a}(a-1)^2}{16(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}\Big]+O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big)\Big\}.$$

Вычислим входящие в (140) функции. Имеем:

$$\ln A(x_1)=\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(x_1-(\sqrt{a}+1)/2)(x_1-(\sqrt{a}-1)/2)}{(x_1+(\sqrt{a}-1)/2)(x_1+(\sqrt{a}+1)/2)}\Big)-$$
$$-\frac{x_1(4x_1^2-a-1)}{4|m|(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}+O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big),\quad (141)$$

$$\ln\big(B(x_1)+\sqrt{B^2(x_1)-1}\big)=\ln\Big(\frac{a-1-6x_1^2+2x_1\sqrt{5x_1^2+5-a}}{4\sqrt{(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}}\Big)-$$
$$-\frac{1}{2|m|x_1\sqrt{5x_1^2+5-a}}\Big\{2\sqrt{5-a}\,\Big(k+\frac{1}{2}\Big)+3\sqrt{a}+$$
$$+\frac{\sqrt{a}(4(a+11)x_1^2-(a-1)^2)}{16(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}\Big\}+O\Big(\frac{1}{|m|^2}\Big),\quad (142)$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{B^2(x_1)-1}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}}{\sqrt[4]{x_1^2(5x_1^2+5-a)}}+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big),\quad (143)$$

$$-\frac{1}{2A(x_1)}\frac{dA(x_1)}{dx_1}\frac{B(x_1)}{\sqrt{B^2(x_1)-1}}=$$
$$=-\frac{\sqrt{a}(4x_1^2-a+1)(-6x_1^2+a-1)}{16x_1\sqrt{5x_1^2+5-a}\,(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big).\quad (144)$$

Отметим, что формулы (140) дискретного метода ВКБ не применимы вблизи «точки поворота», где число

$$j_1=j-(n-|m|-1)/2\quad (145)$$

равно нулю, а также вблизи граничных значений $j=0$ и $j=n-|m|-1$. Для таких j требуется строить дополнительные разложения.

Построим асимптотику ζ_j при $0\leqslant j\lesssim|m|^{1/3}$. Из формулы (118) находим

$$\zeta_0=\frac{c_-(-1)^k}{(2+\sqrt{5-a})^{k+1/2}}\Big(\frac{(\sqrt{a}+1)^{\sqrt{a}}}{2}\Big)^{|m|},\quad (146)$$
$$\zeta_1=\Big(\frac{|m|(\sqrt{a}-1)(5-\sqrt{a})}{4}+\frac{a-1}{4}-(k+\frac{1}{2})\sqrt{5-a}\Big)\zeta_0.$$

Произведем замену

$$\zeta_j=\frac{|m|^j}{j!}\varpi_j.$$

Тогда коэффициенты ϖ_j при $1 \leqslant j \lesssim |m|^{1/3}$ будут удовлетворять вытекающему из (135) рекуррентному соотношению

$$\Big(-\frac{4\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(j-1)}{|m|}+O\Big(\frac{j^2}{|m|^2}\Big)\Big)\varpi_{j-1}+ \\ +\Big((\sqrt{a}-1)(5-\sqrt{a})+O\Big(\frac{j}{|m|}\Big)\Big)\varpi_j+\Big(-4+O\Big(\frac{j}{|m|}\Big)\Big)\varpi_{j+1}=0.$$

Поскольку

$$\varpi_{j+1}=\Big(\frac{(\sqrt{a}-1)(5-\sqrt{a})}{4}+O\Big(\frac{j}{|m|}\Big)\Big)\varpi_j,$$

справедлива

Лемма 13. *При $1 \leqslant j \lesssim |m|^{1/3}$ имеет место асимптотика*

$$\zeta_j=\frac{|m|^j}{j!}\Big(\frac{(\sqrt{a}-1)(5-\sqrt{a})}{4}\Big)^j\zeta_0\Big(1+O\Big(\frac{j^2}{|m|}\Big)\Big). \tag{147}$$

В силу формулы Стирлинга при j порядка $|m|^{1/3}$

$$\zeta_j=\frac{1}{\sqrt{2\pi j}}\Big(\frac{|m|e(\sqrt{a}-1)(5-\sqrt{a})}{4j}\Big)^j\zeta_0\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|^{1/3}}\Big)\Big).$$

Подставим в (140) разложения (141)–(144). Тогда при j порядка $|m|^{1/3}$ правая часть (147) согласуется с $c_1\zeta^{(0)}_{j,-}$. Здесь c_1 — константа. В результате получаем

Лемма 14. *При $|m|^{1/3} \lesssim j$, $j_1 \lesssim -|m|^{3/5}$ справедлива асимптотика $\zeta_j = c_1\zeta^{(0)}_{j,-}$, где*

$$\zeta^{(0)}_{j,-}=\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}}{\sqrt[4]{x_1^2(5x_1^2+5-a)}}\exp\Big\{|m|\int_{x_1^0}^{j_1/|m|}f_0(x_1)\,dx_1+ \\ +\int_{x_1^0}^{j_1/|m|}f_1(x_1)\,dx_1+O\Big(\frac{1}{|m|^{1/5}}\Big)\Big\}, \tag{148}$$

функции

$$f_0(x_1)=-\ln\Big(\frac{a-1-6x_1^2+2x_1\sqrt{5x_1^2+5-a}}{4(x_1-(\sqrt{a}+1)/2)(x_1-(\sqrt{a}-1)/2)}\Big), \tag{149}$$

$$f_1(x_1)=-\frac{x_1(4x_1^2-a-1)}{4(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}+ \\ +\frac{1}{2x_1\sqrt{5x_1^2+5-a}}\Big\{2\sqrt{5-a}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)+3\sqrt{a}+ \\ +\frac{\sqrt{a}(4(a+11)x_1^2-(a-1)^2)}{16(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}\Big\}+ \\ +\frac{\sqrt{a}(4x_1^2-a+1)(-6x_1^2+a-1)}{16x_1\sqrt{5x_1^2+5-a}\,(x_1^2-(\sqrt{a}-1)^2/4)(x_1^2-(\sqrt{a}+1)^2/4)}, \tag{150}$$

а x_1^0 — константа.

Отметим, что (148) экспоненциально убывает при приближении к «точке поворота» $j_1 = 0$.

Далее, построим асимптотику коэффициентов ζ_j вблизи «точки поворота» при $|j_1| \lesssim |m|^{3/5}$. При таких j_1 трехчленное рекуррентное соотношение (135) приближенно заменяется соотношением

$$\Big(1 - \frac{4\sqrt{a} j_1}{|m|(a-1)}\Big)\zeta_{j-1} + \Big(-2 + \frac{4\sqrt{a}}{|m|(a-1)} + \frac{4\sqrt{5-a}}{|m|(a-1)}(k+\frac{1}{2}) + \frac{20 j_1^2}{|m|^2(a-1)}\Big)\zeta_j + \\ + \Big(1 + \frac{4\sqrt{a} j_1}{|m|(a-1)}\Big)\zeta_{j+1} \approx 0,$$

в котором числа j и j_1 связаны равенством (145). Произведем замену

$$\zeta_j = \exp\Big(-\frac{2\sqrt{a}\ j_1^2}{(a-1)|m|}\Big)\vartheta_j.$$

Тогда коэффициенты ϑ_j будут приближенно удовлетворять следующему трехчленному рекуррентному соотношению:

$$\vartheta_{j-1} + \Big(-2 + \frac{4\sqrt{5-a}}{|m|(a-1)}\Big(k+\frac{1}{2}\Big) - \frac{4(5-a) j_1^2}{(a-1)^2|m|^2}\Big)\vartheta_j + \vartheta_{j+1} \approx 0,$$

которое является разностным аналогом уравнения Вебера. Действительно, если $\vartheta(\tau) \in C^4$, то при $h \to 0$

$$\frac{\vartheta(\tau-h) - 2\vartheta(\tau) + \vartheta(\tau+h)}{h^2} = \vartheta''(\tau) + O(h^2).$$

Следовательно, главный член асимптотики $\vartheta_j^{(0)}$ представи́м в виде

$$\vartheta_j^{(0)} = \vartheta\Big(\frac{2\sqrt[4]{5-a}}{\sqrt{a-1}}\frac{j_1}{\sqrt{|m|}}\Big),$$

где $\vartheta(\tau)$ — решение уравнения Вебера

$$\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2} + \Big(-\frac{\tau^2}{4} + k + \frac{1}{2}\Big)\vartheta(\tau) = 0. \tag{151}$$

Решения (151) выражаются через функции параболического цилиндра:

$$\vartheta = c_2 D_k(\tau) + c_3 D_{-k-1}(i\tau), \tag{152}$$

где c_2, c_3 — константы. С помощью формул (100), (101) согласуем разложения при j_1 порядка $-|m|^{3/5}$. Поскольку $\zeta_{j,-}^{(0)}$ экспоненциально убывает, то в равенстве (152) константа $c_3 = 0$. Справедлива

Лемма 15. *Имеет место асимптотика*

$$\zeta_j = c_2 \exp\Big(-\frac{2\sqrt{a}\ j_1^2}{(a-1)|m|}\Big)\, D_k\Big(\frac{2\sqrt[4]{5-a}}{\sqrt{a-1}}\frac{j_1}{\sqrt{|m|}}\Big)(1 + O(|m|^{-1/5})). \tag{153}$$

Здесь $|j_1| \lesssim |m|^{3/5}$, $|m| \to \infty$.

Далее при j_1 порядка $|m|^{3/5}$ правая часть (153) согласуется с $c_4\zeta^{(0)}_{j,-}$, где c_4 — некоторая константа, а $\zeta^{(0)}_{j,-}$ определяется формулой (148). Эта формула задает асимптотику ζ_j при $|m|^{3/5}\lesssim j_1$, $|m|^{1/3}\lesssim j_2$, где

$$j_2 = n-|m|-j. \tag{154}$$

Наконец, аналогично (147) показывается, что при $1\leqslant j_2\lesssim |m|^{1/3}$

$$\zeta_j = \frac{|m|^{j_2-1}}{(j_2-1)!}\Big(\frac{(\sqrt{a}-1)(5-\sqrt{a})}{4}\Big)^{j_2-1}\zeta_{n-|m|-1}\Big(1+O\Big(\frac{j_2^2}{|m|}\Big)\Big).$$

Здесь числа j_2 и j связаны равенством (154).

Чтобы получить формулу связи между ζ_0 и $\zeta_{n-|m|-1}$, остается выразить друг через друга входящие в разложения константы. Связь между ними находится в процессе согласования асимптотик. В результате в формуле связи в качестве множителя возникает экспонента, показатель которой содержит интегралы от функций f_0, f_1. Но поскольку функции (149), (150) нечетные, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля, эти интегралы равны нулю. Так как главные члены асимптотики $D_k(\tau)$ при $\tau\to\pm\infty$ отличаются лишь на множитель $(-1)^k$, то получаем

Теорема 3. *Имеет место формула связи коэффициентов*

$$\zeta_{n-|m|-1} = (-1)^k\zeta_0(1+O(|m|^{-1/5})), \quad |m|\to\infty. \tag{155}$$

Поскольку в силу (92) $\Phi_-^{WKB}(\bar z) = (-1)^k\zeta_0\,\bar z^{n-|m|-1}\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)+O\Big(\frac{|m|}{\bar z}\Big)\Big)$, где $|\bar z|\gg|m|$, а коэффициент ζ_0 имеет вид (146), из равенств (131), (134), (155) вытекает малость $N(\bar z)$ по сравнению с $\Phi_-^{WKB}(\bar z)$ и при $|\bar z|\gg|m|$.

§ 10. Асимптотика нормы $\Phi(\bar z)$

Пусть многочлен $\Phi(\bar z)$ задан формулой (57), где функция $p(\bar u)$ — асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи. Вычислим асимптотику нормы $\Phi(\bar z)$ в пространстве $\mathscr{P}[m,n]$.

Предварительно найдем асимптотику $\varrho(r)$ при $|m|\to\infty$. Функция $\varrho(r)$ удовлетворяет задаче (21), (22), а искомая асимптотика совпадает с ВКБ-приближением $\varrho^{WKB}(r)$ для решения этой задачи. Отметим, что при $a>1$ и $r\geqslant 0$ точки поворота у уравнения (21) отсутствуют. Справедлива

Лемма 16. *Пусть выполнены условия* (30), (31). *Тогда при* $r\ll|m|$ *имеет место равенство*

$$\varrho(r) = \varrho^{WKB}(r)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)+O\Big(\frac{r}{|m|}\Big)\Big),$$

где

$$\varrho^{WKB}(r) = \frac{c^*(\sqrt{\Lambda_1(r)}+r+1)^{|m|}}{\sqrt[4]{\Lambda_1(r)}(\sqrt{\Lambda_1(r)}+\sqrt{a}(r+1))^{n+1/2}}, \tag{156}$$

$$\Lambda_1(r) = r^2+(4a-2)r+1,$$

а константа

$$c^* = \frac{|m|\sqrt{1+\sqrt{a}}\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{2\pi}\left(\frac{(1+\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}{2}\right)^{|m|}.$$

Кроме того, при $r \gg |m|$ *справедлива асимптотика*

$$\varrho(r) = \frac{n(n-|m|)}{2\pi|m|}\, r^{-n+|m|-1}\left(1+O\left(\frac{|m|}{r}\right)\right). \qquad (157)$$

Доказательство. Рассмотрим заданную формулой (20) функцию $\varrho(r)$. Воспользовавшись интегральным представлением для гипергеометрической функции [22], имеем:

$$\varrho(r) = \frac{n(n-|m|)(|m|+1)_n\Gamma(2n+2)\, r^{|m|}}{2\pi(n+1)_{n+1}\Gamma(n+|m|+1)\Gamma(n-|m|+1)}E(r). \qquad (158)$$

Здесь

$$E(r) = \int_0^1 \frac{t^{n+|m|}(1-t)^{n-|m|}}{(1-t(1-r))^{n+1}}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{|m|\Phi(t)}}{1-t(1-r)}\,dt, \qquad (159)$$

где

$$\Phi(t) = (\sqrt{a}+1)\ln t + (\sqrt{a}-1)\ln(1-t) - \sqrt{a}\ln(1-t(1-r)).$$

Асимптотика $E(r)$ при $|m|\to\infty$ может быть найдена с помощью метода Лапласа [33]. Уравнение

$$\Phi'(t) = \frac{\sqrt{a}(1-r)t^2 + (-2\sqrt{a}-1+r)t + \sqrt{a}+1}{t(1-t)(1-t(1-r))} = 0$$

имеет корень

$$t_* = \frac{2\sqrt{a}+1-r-\sqrt{\Lambda_1(r)}}{2\sqrt{a}(1-r)} \in (0,1).$$

Поскольку

$$\Phi''(t_*) = \frac{2t_*\sqrt{a}(1-r)-2\sqrt{a}-1+r}{t_*(1-t_*)(1-t_*(1-r))} = -\frac{\sqrt{\Lambda_1(r)}(\sqrt{\Lambda_1(r)}+\sqrt{a}(r+1))4a^{3/2}}{(a-1)(\sqrt{\Lambda_1(r)}+r-1)^2} < 0, \qquad (160)$$

то при $t=t_*$ функция $\Phi(t)$ достигает максимального значения, причем этот максимум единственный на $[0,1]$.

Далее воспользуемся равенствами

$$\frac{(2\sqrt{a}+1-r-\sqrt{\Lambda_1(r)})(-2\sqrt{a}r+r-1-\sqrt{\Lambda_1(r)})}{4\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(r-1)} = \frac{\sqrt{\Lambda_1(r)}+r+1}{2(\sqrt{a}-1)},$$

$$\frac{(1-r)^2(r-1+\sqrt{\Lambda_1(r)})}{(2\sqrt{a}+1-r-\sqrt{\Lambda_1(r)})(-2\sqrt{a}r+r-1+\sqrt{\Lambda_1(r)})} = \frac{\sqrt{\Lambda_1(r)}+\sqrt{a}(r+1)}{2(a-1)},$$

согласно которым

$$r^{|m|}e^{|m|\Phi(t_*)} = \frac{1}{(2\sqrt{a})^n}\left(\frac{\sqrt{\Lambda_1(r)}+r+1}{2(\sqrt{a}-1)}\right)^{|m|}\left(\frac{2(a-1)}{\sqrt{\Lambda_1(r)}+\sqrt{a}(r+1)}\right)^n. \qquad (161)$$

Наконец, подставляя (160), (161) в формулу метода Лапласа, а также применяя формулу Стирлинга, имеем:

$$\varrho(r) = \frac{n(n-|m|)\Gamma(n+1)\, r^{|m|}}{2\pi\Gamma(|m|+1)\Gamma(n-|m|+1)} \sqrt{-\frac{2\pi}{|m|\Phi''(t_*)}} e^{|m|\Phi(t_*)} \Big[\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Lambda_1(r)}+r-1} + \\ + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)\Big] = \varrho^{WKB}(r)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)+O\Big(\frac{r}{|m|}\Big)\Big).$$

Здесь $r \ll |m|$.

Асимптотика (157) получается из (159), если при $r \gg |m|$ разложить функцию

$$E(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^1 t^{|m|-1}(1-t)^{n-|m|}\, dt \Big(1+O\Big(\frac{|m|}{r}\Big)\Big) = \\ = \frac{\Gamma(|m|)\Gamma(n-|m|+1)}{\Gamma(n+1)\, r^{n+1}} \Big(1+O\Big(\frac{|m|}{r}\Big)\Big), \quad (162)$$

и далее подставить (162) в (158). □

Запишем главные члены ВКБ-приближений (118), (156) в виде

$$\Phi^{WKB}_{-,0}(\bar z) = c_- t(\bar z) e^{|m|S(\bar z)}, \quad \varrho^{WKB}(|z|^2) = c^* t_1(|z|^2) e^{|m|S_1(|z|^2)}. \quad (163)$$

Здесь

$$S(\bar z) = \sqrt{a}\ln(\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \sqrt{a}(\bar z+1)) - \ln(\sqrt{\Lambda(\bar z)} + \bar z + 1), \quad (164)$$

$$S_1(r) = \ln(\sqrt{\Lambda_1(r)} + r + 1) - \sqrt{a}\ln(\sqrt{\Lambda_1(r)} + \sqrt{a}(r+1)). \quad (165)$$

Если подставить функции (163) в формулу (19) для скалярного произведения, то получим интеграл

$$\|\Phi^{WKB}_{-,0}\|^2_{\mathscr{P}[m,n]} = \int_{\mathbb{C}} |c_-|^2 c^* |t(\bar z)|^2 t_1(|z|^2) e^{|m|\,\Omega(\bar z, z)}\, d\bar z\, dz\, (1+O(|m|^{-1})), \quad (166)$$

где функция

$$\Omega(\bar z, z) = S(\bar z) + S(z) + S_1(|z|^2). \quad (167)$$

Отметим, что эта функция непрерывна при всех значениях аргументов, но не является дифференцируемой на дуге $\smile \bar z_-, \bar z_+$.

Найдем точку, где достигается глобальный максимум $\Omega(\bar z, z)$. Тогда асимптотика интеграла (166) будет равна интегралу по малой окрестности этой точки.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 17. *Функция $\Omega(\bar z, z)$ имеет единственную стационарную точку $\bar z = z = 1$.*

Доказательство. Дифференцируя (164), (165), находим, что стационарные точки удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{z}} = 0, \tag{168}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \tag{169}$$

где

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{z}} = \frac{(2\sqrt{a}-1)\bar{z}^2 + 3(\sqrt{a}-1)\bar{z} - 1 - (\bar{z}-1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{2\bar{z}(\bar{z}^2+3\bar{z}+1)} - \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)z}{\sqrt{\Lambda_1(z\bar{z})} + z\bar{z}(2\sqrt{a}-1)+1}, \tag{170}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{(2\sqrt{a}-1)z^2 + 3(\sqrt{a}-1)z - 1 - (z-1)\sqrt{\Lambda(z)}}{2z(z^2+3z+1)} - \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)\bar{z}}{\sqrt{\Lambda_1(z\bar{z})} + z\bar{z}(2\sqrt{a}-1)+1}. \tag{171}$$

Точка $\bar{z} = z = 1$ удовлетворяет уравнениям (168), (169). Покажем, что других решений система (168), (169) не имеет.

Прежде всего заметим, что при $\bar{z} = z = \bar{z}_j$, где $\bar{z}_j$, $j = 1, 2, 3,$ — особые точки (51), значения производных $\partial\Omega/\partial\bar{z}$, $\partial\Omega/\partial z$, которые вычисляются в результате предельного перехода в формулах (170), (171), не равны нулю. Кроме того, точка $\bar{z} = z = -1$ не является стационарной, поскольку $\bar{z} = -1$ лежит на дуге $\smile \bar{z}_-, \bar{z}_+$, где функция $\Omega(\bar{z}, z)$ не дифференцируема.

Преобразуем уравнение (168) к виду

$$\frac{2\sqrt{a}\bar{z}^2 + 3\sqrt{a}\bar{z} - (\bar{z}-1)\sqrt{\Lambda(\bar{z})}}{\bar{z}^2+3\bar{z}+1} = \frac{2\sqrt{a}z\bar{z} - \sqrt{\Lambda_1(z\bar{z})}}{z\bar{z}-1}$$

и далее после замены $\bar{u} = \bar{z} - 1$, $u = z - 1$ получаем уравнение

$$\sqrt{a}(\bar{u}+1)(3u\bar{u}+5u+5\bar{u}+10) + (u\bar{u}+u+\bar{u})\bar{u}\sqrt{\bar{u}^2+(5-a)\bar{u}+5-a} = \\ = (\bar{u}^2+5\bar{u}+5)\sqrt{(u\bar{u}+u+\bar{u})^2+4a(u\bar{u}+u+\bar{u}+1)}. \tag{172}$$

Возведем правую и левую части (172) в квадрат. В результате имеем:

$$(\bar{u}+1)\bigl\{a\bigl[u^2(\bar{u}+1)(-\bar{u}^3+8\bar{u}^2+30\bar{u}+25) - 2u\bar{u}(3\bar{u}^3+6\bar{u}^2-5) - \\ - 5\bar{u}^2(\bar{u}^2+3\bar{u}+3)\bigr] - 5(\bar{u}^2+5\bar{u}+5)(u\bar{u}+u+\bar{u})^2\bigr\} = \\ = -(\bar{u}+1)2\sqrt{a}(3u\bar{u}+5u+5\bar{u}+10)(u\bar{u}+u+\bar{u})\bar{u}\sqrt{\bar{u}^2+(5-a)(\bar{u}+1)}. \tag{173}$$

Далее сократим (173) на $\bar{u}+1$ и еще раз возведем в квадрат правую и левую части (173). Разложив слагаемые на множители, приходим к уравнению

$$(a-1)(u\bar{u}+u+\bar{u})^2(\bar{u}^2+5\bar{u}+5)^2\bigl\{a[u^2(\bar{u}+5)^2+10u\bar{u}(\bar{u}-3)+25\bar{u}^2] - \\ - 25(u\bar{u}+u+\bar{u})^2\bigr\} = 0. \tag{174}$$

Поскольку система (168), (169) при $\bar{z}=z=\pm 1$ и $\bar{z}=z=\bar{z}_j$, $j=2,3$, была изучена выше, а $a\neq 1$, поделим (174) на

$$(a-1)(u\bar{u}+u+\bar{u})^2(\bar{u}^2+5\bar{u}+5)^2.$$

Перейдем затем к полярным координатам $\bar{u}=\rho e^{i\varphi}$, $u=\rho e^{-i\varphi}$. В результате, после сокращения на ρ^2 получаем квадратное относительно ρ уравнение

$$(a-25)\rho^2+(20a-100)\rho\cos\varphi+100(a-1)\cos^2\varphi-80a=0.$$

Так как его дискриминант d удовлетворяет неравенству

$$d=320a(20\cos^2\varphi+a-25)\leqslant 320a(a-5),$$

то при $1<a<5$ $d<0$, а следовательно, других стационарных точек, кроме $\bar{z}=z=1$, функция $\Omega(\bar{z},z)$ не имеет. □

Теорема 4. *Функция $\Omega(\bar{z},z)$ достигает максимального значения при $\bar{z}=$ $=z=1$.*

Доказательство. Поскольку

$$\Omega(x,x)=\sqrt{a}\ln(\sqrt{a}+1)-\ln 2+\frac{(\sqrt{a}-1)(5-\sqrt{a})}{2x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big),\quad x\to\infty,$$

то функция $\Omega(x,x)$ убывает при достаточно больших положительных x, и, следовательно, не имеет максимума на бесконечности. Кроме того, если $\bar{z}=e^{i\varphi}\in\smile\bar{z}_-,\bar{z}_+$, то значение

$$\Omega(\bar{z},z)=\sqrt{a}\ln(3+2\cos\varphi)+\sqrt{a}\ln\Big(\frac{a-1}{4\sqrt{a}}\Big)-\ln\Big(\frac{\sqrt{a}-1}{2}\Big)\tag{175}$$

меньше значения функции Ω при $\bar{z}=z=1$, которое равно

$$\Omega(1,1)=\sqrt{a}\ln\frac{(\sqrt{5-a}+2\sqrt{a})^2}{4\sqrt{a}}+\ln\frac{2(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{5-a}+2)^2}.$$

Действительно, из (175) вытекает, что функция $\Omega(\bar{z},z)$ при $\bar{z}\in\smile\bar{z}_-,\bar{z}_+$ достигает максимума в точках $\bar{z}_\pm$. А поскольку на окружности $|\bar{z}|=1$ функция $S_1(|z|^2)$ постоянна, в силу (130)

$$\Omega(\bar{z}_\pm,z_\pm)<\Omega(1,1).$$

Таким образом, остается проверить, что в единственной для $\Omega(\bar{z},z)$ стационарной точке $\bar{z}=z=1$ выполнены достаточные условия существования локального максимума функции двух переменных. Эти условия имеют вид

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial\bar{z}^2}+2\frac{\partial^2\Omega}{\partial\bar{z}\,\partial z}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}<0,\quad D=\Big(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\bar{z}\,\partial z}\Big)^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial\bar{z}^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}>0.$$

Дифференцируя заданные формулами (170), (171) функции еще раз, находим, что

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\bar{z}^2}(1,1)=\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}(1,1)=\frac{(\sqrt{5-a}-2\sqrt{a})^2}{40\sqrt{a}},\qquad\frac{\partial^2\Omega}{\partial\bar{z}\,\partial z}(1,1)=\frac{1-a}{8\sqrt{a}}.$$

Следовательно, при $1<a<5$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{5-a}\,(\sqrt{5-a}-2\sqrt{a})}{10\sqrt{a}}<0,\quad D=\frac{\sqrt{5-a}\,(\sqrt{5-a}-2\sqrt{a})^2}{200\sqrt{a}}>0.\qquad\square$$

В силу теоремы 4 основной вклад в норму асимптотического решения многоточечной спектральной задачи $p(\bar z)$ вносит малая окрестность точки $\bar z=z=1$. Так как вблизи $\bar z=1$ $p(\bar z)$ задается разложением (112), подставим его в формулу (19) для скалярного произведения и вычислим асимптотику возникающего интеграла.

Определим

$$\theta(t,r,a)=\exp\Big(-\Big(1-\sqrt{\frac{5-a}{4a}}\Big)t^2-\Big(\sqrt{\frac{4a}{5-a}}-1\Big)r^2\Big).\tag{176}$$

Лемма 18. *Справедливо равенство*

$$\|p(\bar z)\|^2_{\mathscr{P}[m,n]}=\frac{\alpha_1^2\sqrt{\sqrt{a}+1}(\sqrt{a}-1)}{2^{k+1/2}\pi\sqrt{5-a}}\Big(\frac{5^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}+1)^{\sqrt{a}+1}}{(4\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}\Big)^{|m|}\Sigma_0(a)\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)\Big),\quad |m|\to\infty,\tag{177}$$

где функция $\Sigma_0(a)$ *имеет вид*

$$\Sigma_0(a)=\int_{\mathbb{R}^2}\theta(t,r,a)|H_k(t+ir)|^2\,dt\,dr.\tag{178}$$

Доказательство. Разложим функцию $\varrho^{WKB}(|z|^2)$ по степеням $\bar u, u$, где $\bar u$ и $\bar z$ связаны равенствами (94), (95). В результате получаем:

$$\begin{aligned}\varrho^{WKB}(|z|^2)&=\frac{c^*}{2^{3/2}\sqrt{a}}\Big(\frac{2(\sqrt{a}+1)}{(4\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}\Big)^{|m|}\exp\Big(-\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta(\bar u+u)}{2}+\\&+\frac{(\sqrt{a}-1)\beta^2}{8\sqrt{a}}\Big\{-(\sqrt{a}+1)|\bar u|^2+(3\sqrt{a}-1)\frac{(\bar u^2+u^2)}{2}\Big\}\Big)\Big\{1-\frac{\beta(\bar u+u)}{2\sqrt{|m|}}+\\&+\frac{(\sqrt{a}-1)\beta^3}{\sqrt{|m|}16\sqrt{a}}\Big[(3-5\sqrt{a})\frac{\bar u^3+u^3}{3}+(\sqrt{a}+1)|\bar u|^2(\bar u+u)\Big]+O\Big(\frac{|u|^4+1}{|m|}\Big)\Big\}.\end{aligned}\tag{179}$$

Подставляя затем (112), (179) в формулу (19), имеем:

$$\begin{aligned}\|p(\bar z)\|^2_{\mathscr{P}[m,n]}&=\frac{\alpha_1^2\mu^2c^*}{2^{3/2}\sqrt{a}}\Big(\frac{2(\sqrt{a}+1)}{(4\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}\Big)^{|m|}\int_{\mathbb{C}}\exp\Big(-\frac{5(a-1)|\bar u|^2}{8\sqrt{a}\sqrt{5-a}}+\\&+\Big(-\frac{1}{4}+\frac{3a+5}{16\sqrt{a}\sqrt{5-a}}\Big)(\bar u^2+u^2)\Big)\Big\{\Big|H_k\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big)\Big|^2+\frac{\sqrt5}{\sqrt{|m|}\sqrt[4]{5-a}}\Big\{\Big[-\bar u-u+\\&+\frac{(-9a+12\sqrt{a}\sqrt{5-a}-15)(\bar u^3+u^3)}{48\sqrt{a}\sqrt{5-a}}+\frac{5(a-1)|\bar u|^2(\bar u+u)}{16\sqrt{a}\sqrt{5-a}}\Big]\Big|H_k\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big)\Big|^2-\\&-\frac{1}{2\sqrt2}\Big[\bar u^2H_k'\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big)H_k\Big(\frac{u}{\sqrt2}\Big)+u^2H_k'\Big(\frac{u}{\sqrt2}\Big)H_k\Big(\frac{\bar u}{\sqrt2}\Big)\Big]\Big\}\Big\}\,d\bar z\,dz\,\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)\Big).\end{aligned}\tag{180}$$

Введем вещественные переменные t и r согласно формуле

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} = t + ir. \tag{181}$$

Тогда

$$d\bar{z}\,dz = \frac{20 dt\,dr}{|m|\sqrt{5-a}}, \quad \bar{u}+u = 2\sqrt{2}t, \quad \bar{u}^3+u^3 = 4\sqrt{2}(t^3-3tr^2),$$
$$|\bar{u}|^2 = 2(t^2+r^2), \quad \bar{u}^2 H_k'\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big) H_k\Big(\frac{u}{\sqrt{2}}\Big) + u^2 H_k'\Big(\frac{u}{\sqrt{2}}\Big) H_k\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big) =$$
$$= 2(t^2-r^2)\frac{\partial}{\partial t}|H_k(t+ir)|^2 + 4tr\frac{\partial}{\partial r}|H_k(t+ir)|^2$$

и равенство (180) принимает вид

$$\|p(\bar{z})\|^2_{\mathscr{P}[m,n]} = \frac{\alpha_1^2\mu^2 5\sqrt{2}c^*}{|m|\sqrt{a}\sqrt{5-a}}\Big(\frac{2(\sqrt{a}+1)}{(4\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}\Big)^{|m|}\int_{\mathbb{R}^2}\theta(t,r,a)\Big\{|H_k(t+ir)|^2 +$$
$$+ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{|m|}\sqrt[4]{5-a}}\Big\{\Big[-2\sqrt{2}t + \frac{(-9a+12\sqrt{a}\sqrt{5-a}-15)(t^3-3tr^2)}{6\sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{5-a}} +$$
$$+ \frac{5(a-1)(t^2+r^2)t}{2\sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{5-a}}\Big]|H_k(t+ir)|^2 -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(t^2-r^2)\frac{\partial}{\partial t}|H_k(t+ir)|^2 + 2tr\frac{\partial}{\partial r}|H_k(t+ir)|^2\Big]\Big\}\Big\}\,dt\,dr\,\Big(1+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)\Big). \tag{182}$$

В формуле (182) слагаемые порядка $|m|^{-1/2}$ представляют собой интегралы от нечетных функций в симметричных пределах. Следовательно, они равны нулю. $\square$

Далее рассмотрим норму $N(\bar{z})$.

Лемма 19. *При $|m|\to\infty$ имеет место оценка*

$$\|N(\bar{z})\|_{\mathscr{P}[m,n]} = O(|m|^{-1/4}|c_-|(a^{\sqrt{a}}(a-1)^{\sqrt{a}-1})^{|m|/2}). \tag{183}$$

Доказательство. Из формул (19), (121), а также неравенства (129) вытекает, что

$$\|N(\bar{z})\|^2_{\mathscr{P}[m,n]} =$$
$$= \sum_{\pm} O\Big(\frac{|c_-|^2(a^{\sqrt{a}}(a-1)^{\sqrt{a}-1})^{|m|}}{|m|^{3/2}}\int_{|\bar{z}-\bar{z}_\pm|>|m|^{-1}}\frac{|\bar{z}|^{2(\sqrt{a}-1)|m|}\varrho^{WKB}(|z|^2)\,d\bar{z}\,dz}{|\bar{z}-\bar{z}_\pm|^2}\Big) +$$
$$+ \sum_{\pm} O\Big(|m|^{1/2}|c_-|^2(a^{\sqrt{a}}(a-1)^{\sqrt{a}-1})^{|m|}\int_{|\bar{z}-\bar{z}_\pm|<|m|^{-1}}\varrho^{WKB}(|z|^2)\,d\bar{z}\,dz\Big). \tag{184}$$

Произведем замену $\bar{z}=\sqrt{r}e^{i\varphi}$, $\bar{z}_\pm = e^{i\varphi_\pm}$. Поскольку

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|\bar{z}-\bar{z}_\pm|^2} = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r-2\sqrt{r}\cos(\varphi-\varphi_\pm)+1} = \frac{2\pi}{|r-1|},$$

(184) принимает вид

$$\|N(\bar z)\|^2_{\mathscr{P}[m,n]} = O\left(\frac{|c_-|^2(a^{\sqrt{a}}(a-1)^{\sqrt{a}-1})^{|m|}}{|m|^{3/2}}\int_{|\sqrt{r}-1|>|m|^{-1}}\frac{r^{(\sqrt{a}-1)|m|}\varrho^{WKB}(r)dr}{|r-1|}\right)+ \\ +O\left(\frac{|c_-|^2(a^{\sqrt{a}}(a-1)^{\sqrt{a}-1})^{|m|}\varrho^{WKB}(1)}{|m|^{3/2}}\right). \quad (185)$$

Далее воспользуемся тем, что функция

$$\Pi(r) = S_1(r) + (\sqrt{a}-1)\ln r,$$

где $S_1(r)$ имеет вид (165), возрастает при $r>0$. Действительно,

$$\frac{d\Pi(r)}{dr} = -\frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{\Lambda_1(r)}+(2\sqrt{a}-1)r+1}+\frac{\sqrt{a}-1}{r} = \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{\Lambda_1(r)}-r+1)}{r(\sqrt{\Lambda_1(r)}+(2\sqrt{a}-1)r+1)} > 0.$$

Поэтому наибольший вклад в интеграл в формуле (185) дает окрестность ∞. В результате получаем:

$$\int_{|\sqrt{r}-1|>|m|^{-1}}\frac{r^{(\sqrt{a}-1)|m|}\varrho^{WKB}(r)dr}{|r-1|} = O\left(\int_1^\infty\frac{r^{(\sqrt{a}-1)|m|}|m|r^{-(\sqrt{a}-1)|m|}dr}{r^2}\right) = O(|m|). \quad (186)$$

Наконец, поскольку при $r>0$

$$\frac{dS_1(r)}{dr} = -\frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{\Lambda_1(r)}+(2\sqrt{a}-1)r+1} < 0,$$

то функция $S_1(r)$ убывает и, следовательно,

$$\varrho^{WKB}(1) \ll \varrho^{WKB}(0) = \frac{|m|\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}{2\pi}. \quad (187)$$

Подставляя оценки (186), (187) в (185), приходим к равенству (183). Лемма доказана. □

Далее из (107), (177) находим, что

$$\|p(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]} = \\ = \frac{|c_-|5^{(k+1)/2}\sqrt[4]{\sqrt{a}+1}\sqrt{\sqrt{a}-1}}{|m|^{k/2}(5-a)^{3(k+1)/4}\,2^{5(2k+1)/4}\sqrt{\pi}}\left(\frac{(\sqrt{5-a}+2\sqrt{a})^{2\sqrt{a}}(\sqrt{a}+1)^{\sqrt{a}+1}}{(\sqrt{5-a}+2)^2(4\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}\right)^{|m|/2}\times \\ \times(\Sigma_0(a))^{1/2}\left(1+O\left(\frac{1}{|m|}\right)\right), \quad |m|\to\infty. \quad (188)$$

Следовательно, в силу (188), (183) $\|N(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]}$ экспоненциально мала по сравнению с $\|p(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]}$ на интервале $a\in(1,a_0)$, где $a_0\approx 3{,}03$, поскольку при таких a выполняется неравенство

$$a^{\sqrt{a}}(a-1)^{\sqrt{a}-1} < \frac{(\sqrt{5-a}+2\sqrt{a})^{2\sqrt{a}}(\sqrt{a}+1)^{\sqrt{a}+1}}{(\sqrt{5-a}+2)^2(4\sqrt{a})^{\sqrt{a}}}.$$

Экспоненциальная малость $\|N(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]}$ на всем интервале $a\in(1,5)$ вытекает из (188) и оценки

$$\|N(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]}=O\biggl(|c_-|\Bigl(\frac{(\sqrt a+1)^{\sqrt a}}{2}\Bigr)^{|m|}\biggr),\quad |m|\to\infty. \tag{189}$$

Действительно, в силу теоремы 4

$$\Omega(\infty,\infty)<\Omega(1,1), \tag{190}$$

а формула (167) позволяет записать (190) в виде

$$\frac{(\sqrt a+1)^{2\sqrt a}}{4}<\frac{(\sqrt{5-a}+2\sqrt a)^{2\sqrt a}(\sqrt a+1)^{\sqrt a+1}}{(\sqrt{5-a}+2)^2(4\sqrt a)^{\sqrt a}}.$$

Отметим, что оценка (189) доказывается аналогично (183). При ее выводе используется асимптотика коэффициентов ζ_j степенного ряда (132), которая находится с помощью дискретного метода ВКБ (см. § 9).

Наконец, из (120), (125), (177) и неравенства Коши — Буняковского получаем, что асимптотика нормы многочлена $\Phi(\bar z)$ при $|m|\to\infty$ имеет вид

$$\begin{aligned}\|\Phi(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]}&=\\&=\bigl(\|p(\bar z)\|^2_{\mathscr{P}[m,n]}+O(\|p(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]}\|N(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]})+O(\|N(\bar z)\|^2_{\mathscr{P}[m,n]})\bigr)^{1/2}=\\&=\frac{\alpha_1\sqrt[4]{\sqrt a+1}\sqrt{\sqrt a-1}}{2^{k/2+1/4}\sqrt\pi\sqrt[4]{5-a}}\Bigl(\frac{5^{\sqrt a}(\sqrt a+1)^{\sqrt a+1}}{(4\sqrt a)^{\sqrt a}}\Bigr)^{|m|/2}(\Sigma_0(a))^{1/2}\Bigl(1+O\Bigl(\frac{1}{|m|}\Bigr)\Bigr).\end{aligned} \tag{191}$$

Здесь $\Sigma_0(a)$ задана формулой (178).

Таким образом, если входящая в (112) константа

$$\alpha_1=\frac{2^{k/2+1/4}\sqrt\pi\sqrt[4]{5-a}}{\sqrt[4]{\sqrt a+1}\sqrt{\sqrt a-1}}\Bigl(\frac{(4\sqrt a)^{\sqrt a}}{5^{\sqrt a}(\sqrt a+1)^{\sqrt a+1}}\Bigr)^{|m|/2}(\Sigma_0(a))^{-1/2}\Bigl(1+O\Bigl(\frac{1}{|m|}\Bigr)\Bigr),\quad |m|\to\infty, \tag{192}$$

то условие $\|\Phi(\bar z)\|_{\mathscr{P}[m,n]}=1+O(|m|^{-1})$, $|m|\to\infty$, будет выполнено. Нахождение множителя α_1 в $p(\bar z)$ завершает построение $\Phi(\bar z)$.

§ 11. Итоговые теоремы. Формулы для квантовых средних

Справедлива

Теорема 5. *Пусть число*

$$\tilde\xi_k=a+1+\frac{4}{|m|}\sqrt{5-a}\,\Bigl(k+\frac12\Bigr)+O\Bigl(\frac{1}{|m|^2}\Bigr),\quad k=0,1,2,\dots, \tag{193}$$

а многочлен $\Phi_k(\bar z)$ определен формулой (57), *где $p(\bar u)$ — решение многоточечной спектральной задачи, такое что α_1 имеет вид* (192). *Тогда при $n=\sqrt a|m|$, где $1<a<5$, $\tilde\xi_k$ и $\Phi_k(\bar z)$ являются асимптотическим собственным значением и асимптотической собственной функцией задачи* (48), (29) *при $|m|\to\infty$ в пространстве $\mathscr{P}[m,n]$. Более точно, если $\tilde\xi_k$ имеет вид* (193), *то многочлен*

$\Phi_k(\bar z)$ *удовлетворяет уравнению* (48) *с точностью* $O(|m|^{-2})$ *с оценкой невязки в норме* $\mathscr{P}[m,n]$, *а также условию нормировки* (29) *с точностью* $O(|m|^{-1})$.

Доказательство. Оценка невязки производится аналогично вычислению асимптотики нормы. Основной вклад в асимптотику интеграла вносит малая окрестность точки $\bar z = z = 1$. Поэтому достаточно оценить невязку вблизи точки $\bar z = 1$, где она имеет вид $R = O((\bar z - 1)^4 p_0) + O(|m|^{-2} p_0) = O(|m|^{-2}(1 + (t^2 + r^2)^2) p_0)$. Здесь p_0 задается равенством (113), а t и r — равенством (181).

Асимптотика $\|R\|_{\mathscr{P}[m,n]}$ содержит вместо функции $\Sigma_0(a)$, как было в (191), следующий интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta(t,r,a)(1+(t^2+r^2)^2)^2\,|H_k(t+ir)|^2\,dt\,dr.$$

В результате получаем, что $\|R\|_{\mathscr{P}[m,n]} = O(|m|^{-2})$, $|m| \to \infty$.

Условие нормировки (29) выполнено в силу (191), (192). $\square$

Отметим, что оператор $g_0(\mathring{B})\colon \mathscr{P}[m,n] \to \mathscr{P}[m,n]$, где $\mathring{B} = (\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3)$, а $g_0(b)$ имеет вид (17), является эрмитовым. Поэтому, как известно [36], вблизи асимптотических собственных значений $\tilde\xi_k$ имеются точки спектра оператора $g_0(\mathring{B})$.

Перейдем к нахождению асимптотики средних значений дифференциальных операторов. Эта задача рассматривалась, например, в [37], [16]. Вычисление квантовых средних производится аналогично вычислению нормы.

Начнём с обоснования формулы (47). Пусть $\Phi_k(\bar z)$ — асимптотическая собственная функция задачи (48), (29), а операторы $\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3$ заданы формулами (27), где малый параметр $\hbar = 1/|m|$.

Лемма 20. *При* $|m| \to \infty$ *имеют место равенства*

$$\begin{aligned}
(\mathring{B}_0\Phi_k, \Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]} &= O(|m|^{-1}), \quad & (\mathring{B}_2\Phi_k, \Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]} &= \frac{a-1}{4} + O(|m|^{-1}),\\
(\mathring{B}_1\Phi_k, \Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]} &= O(|m|^{-1}), \quad & (\mathring{B}_3\Phi_k, \Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]} &= \frac{a+1}{4} + O(|m|^{-1}).
\end{aligned} \tag{194}$$

Доказательство. Основной вклад в асимптотику интегралов для средних также вносит малая окрестность точки $\bar z = z = 1$, где для $\Phi_k(\bar z)$ справедливо разложение (112). Дифференцируя $p(\bar z)$, находим, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|m|}\frac{dp}{d\bar z} = \frac{(\sqrt{a}-1)}{2}\Bigl(p_0 + \frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Bigr) + \frac{(\bar z - 1)}{10}(5 - 3\sqrt{a} - \sqrt{5-a})p_0 +{}\\
+ \frac{\alpha_1\mu\sqrt[4]{5-a}}{\sqrt{|m|}\sqrt{10}}\exp\Bigl(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\sqrt{5}\bar u}{2\sqrt[4]{5-a}} + \Bigl(-1 + \frac{5-3\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}}\Bigr)\frac{\bar u^2}{4}\Bigr) H_k'\Bigl(\frac{\bar u}{\sqrt{2}}\Bigr) +{}\\
+ O\Bigl(\frac{p_0}{|m|}\Bigr) + O\Bigl(\frac{\bar u^6}{|m|}p_0\Bigr) +{}\\
+ \exp\Bigl(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta\bar u}{2} + \frac{(5-3\sqrt{a})\beta^2\bar u^2}{20}\Bigr)\Bigl(O\Bigl(\frac{\bar u}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Bigr) + O\Bigl(\frac{\bar u^5}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Bigr)\Bigr).
\end{aligned} \tag{195}$$

Следовательно,

$$(\mathring{B}_0\Phi_k,\Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]} = \big(\mathring{B}_0(p_0+p_1/\sqrt{|m|}),\, p_0+p_1/\sqrt{|m|}\big)_{\mathscr{P}[m,n]} + O(|m|^{-1}) =$$
$$= \bigg((\sqrt{a}-1)\Big(p_0+\frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Big)+\frac{(\bar z-1)}{5}(5-3\sqrt{a}-\sqrt{5-a})p_0 +$$
$$+\frac{\alpha_1\mu\sqrt{2}\,\sqrt[4]{5-a}}{\sqrt{|m|}\sqrt{5}}\exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\sqrt{5}\bar u}{2\sqrt[4]{5-a}}+\Big(-1+\frac{5-3\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}}\Big)\frac{\bar u^2}{4}\Big)H_k'\Big(\frac{\bar u}{\sqrt{2}}\Big)+$$
$$+(\bar z-1)(\sqrt{a}-1)p_0-(\sqrt{a}-1)\Big(p_0+\frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Big),\, p_0+\frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\bigg)_{\mathscr{P}[m,n]}+O\Big(\frac{1}{|m|}\Big)=$$
$$= O\Big(\frac{1}{|m|}\Big). \quad (196)$$

В формуле (196)

$$\int_{\mathbb{R}^2}\theta(t,r,a)(t+ir)|H_k(t+ir)|^2dt\;dr=0, \quad (197)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\theta(t,r,a)H_k'(t+ir)H_k(t-ir)\,dt\,dr =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2}\theta(t,r,a)\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}|H_k(t+ir)|^2-i\frac{\partial}{\partial r}|H_k(t+ir)|^2\Big)\,dt\,dr=0, \quad (198)$$

так как в (197), (198) интегрируются нечетные функции в симметричных пределах.

Аналогично, поскольку

$$\frac{1}{|m|^2}\frac{d^2p}{d\bar z^2}=\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4}\Big(p_0+\frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Big)+\frac{(\bar z-1)(\sqrt{a}-1)}{10}(5-3\sqrt{a}-\sqrt{5-a})p_0+$$
$$+\frac{\alpha_1\mu\sqrt[4]{5-a}(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{|m|}\sqrt{10}}\exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\sqrt{5}\bar u}{2\sqrt[4]{5-a}}+\Big(-1+\frac{5-3\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}}\Big)\frac{\bar u^2}{4}\Big)H_k'\Big(\frac{\bar u}{\sqrt{2}}\Big)+$$
$$+O\Big(\frac{p_0}{|m|}\Big)+O\Big(\frac{\bar u^6}{|m|}p_0\Big)+\exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta\bar u}{2}+\frac{(5-3\sqrt{a})\beta^2\bar u^2}{20}\Big)\Big(O\Big(\frac{\bar u}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Big)+$$
$$+O\Big(\frac{\bar u^5}{|m|}\frac{dy_0}{d\bar u}\Big)\Big), \quad (199)$$

то в силу (197), (198)

$$(\mathring{B}_1\Phi_k,\Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]}=\frac{i\sqrt[4]{5-a}}{\sqrt{|m|}\sqrt{10}}\bigg(\Big(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{5-a}}{2}\Big)\frac{\bar u}{\sqrt{2}}p_0-$$
$$-\sqrt{a}\alpha_1\mu\exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\sqrt{5}\bar u}{2\sqrt[4]{5-a}}+\Big(-1+\frac{5-3\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}}\Big)\frac{\bar u^2}{4}\Big)\,H_k'\Big(\frac{\bar u}{\sqrt{2}}\Big),\,p_0\bigg)_{\mathscr{P}[m,n]}+$$
$$+O(|m|^{-1})=O(|m|^{-1}).$$

Наконец, учитывая (195), (199), имеем:

$$(\mathring{B}_2\Phi_k, \Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]} = \Big(\frac{(a-1)}{4}\Big(p_0 + \frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Big), p_0 + \frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Big)_{\mathscr{P}[m,n]} + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big) = \\ = \frac{a-1}{4} + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big),$$

$$(\mathring{B}_3\Phi_k, \Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]} = \Big(\frac{(a+1)}{4}\Big(p_0 + \frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Big), p_0 + \frac{p_1}{\sqrt{|m|}}\Big)_{\mathscr{P}[m,n]} + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big) = \\ = \frac{a+1}{4} + O\Big(\frac{1}{|m|}\Big). \quad \square$$

Из равенств (194) и формулы Тейлора вытекает

Теорема 6. *Пусть $F(\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3)$ — оператор, где $F(b_0, b_1, b_2, b_3)$ — многочлен, такой что $F(0, 0, (a-1)/4, (a+1)/4) \neq 0$, а операторы $\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3$ упорядочены по Вейлю. Тогда формула для квантовых средних с точностью $O(|m|^{-1})$ при $|m| \to \infty$ имеет вид*

$$\big(F(\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3)\Phi_k, \Phi_k\big)_{\mathscr{P}[m,n]} = F\Big(0, 0, \frac{a-1}{4}, \frac{a+1}{4}\Big) + O(|m|^{-1}). \qquad (200)$$

Отметим, что если в (27) положить $\hbar = 1/n$ и сделать замену $c^2 = 1/a$, то из (200) вытекает формула

$$\big(F(\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3)\Phi_k, \Phi_k\big)_{\mathscr{P}[m,n]} = F\Big(0, 0, \frac{1-c^2}{4}, \frac{1+c^2}{4}\Big) + O(n^{-1}), \quad n \to \infty. \qquad (201)$$

Таким образом, справедлива асимптотика (47).

Нетривиальные поправки в формуле для средних возникают в членах порядка $|m|^{-1}$. Для вывода этих поправок используется следующий член $p_2/|m|$ в разложении (112). Если в формуле (75) поправка порядка $|m|^{-2}$ равна

$$\xi_k^{(2)} = \frac{3(15+a)}{2(5-a)}\Big(k + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{5(17-a)}{8(5-a)},$$

то существует функция

$$p_2 = \frac{\alpha_1\mu}{(5-a)^{3/2}} \exp\Big(\frac{\sqrt{|m|}(\sqrt{a}-1)\beta\bar{u}}{2} + \Big(-1 + \frac{(5-3\sqrt{a})}{\sqrt{5-a}}\Big)\frac{\bar{u}^2}{4}\Big)\Big\{\Big\{\frac{5}{36}[7a - 80\sqrt{a} + \\ + 145 + 12(2\sqrt{a}-5)\sqrt{5-a}]\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big)^6 + \frac{1}{48}\Big[261a - 1365 - 120(5-a)\Big(k+\frac{1}{2}\Big) + \\ + 8(25-\sqrt{a})\sqrt{5-a}\Big]\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big)^4 + \frac{1}{32}\Big[-107a + 475 - 6(15+a)\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\Big]\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \\ + \alpha_2\Big\} H_k\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big) + \Big\{\frac{5}{3}(5-2\sqrt{a})\sqrt{5-a}\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big)^5 + \frac{(455-87a)}{16}\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big)^3 + \\ + \frac{3}{16}(15+a)\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big)\Big\} H_k'\Big(\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}}\Big)\Big\}, \qquad (202)$$

такая что асимптотика вблизи $\bar{z} = 1$ согласуется с ВКБ-приближением $\Phi_-^{WKB}(\bar{z})$. Константа α_2 в (202) находится из условия нормировки (29).

Аналогично теореме 6 доказывается

Теорема 7. *Пусть* $F(\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3)$ — *оператор, где* $F(b_0, b_1, b_2, b_3)$ — *многочлен, такой что* $F(0, 0, (a-1)/4, (a+1)/4) \neq 0$*, а операторы* $\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3$ *упорядочены по Вейлю. Тогда формула для квантовых средних с точностью* $O(|m|^{-3/2})$ *при* $|m| \to \infty$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}(F(\mathring{B}_0, \mathring{B}_1, \mathring{B}_2, \mathring{B}_3)\Phi_k, \Phi_k) &= F + \frac{\partial F}{\partial b_0}(\mathring{B}_0\Phi_k, \Phi_k) + \frac{\partial F}{\partial b_1}(\mathring{B}_1\Phi_k, \Phi_k) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial b_2}\left[(\mathring{B}_2\Phi_k, \Phi_k) - \frac{a-1}{4}\right] + \frac{\partial F}{\partial b_3}\left[(\mathring{B}_3\Phi_k, \Phi_k) - \frac{a+1}{4}\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial b_0^2}((\mathring{B}_0)^2\Phi_k, \Phi_k) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial b_1^2}((\mathring{B}_1)^2\Phi_k, \Phi_k) + \frac{\partial^2 F}{\partial b_0 \partial b_1}\left(\frac{\mathring{B}_0\mathring{B}_1 + \mathring{B}_1\mathring{B}_0}{2}\Phi_k, \Phi_k\right) + \\ &+ O(|m|^{-3/2}). \qquad (203)\end{aligned}$$

Здесь

$$(\mathring{B}_0\Phi_k, \Phi_k) = -\frac{\sqrt{5-a}}{|m|\sqrt{a}}\frac{\Sigma_1(a)}{\Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}),$$

$$(\mathring{B}_1\Phi_k, \Phi_k) = \frac{i\sqrt{a}}{|m|}\left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}}\right)\frac{\Sigma_1(a)}{\Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}),$$

$$(\mathring{B}_2\Phi_k, \Phi_k) = \frac{a-1}{4} + \frac{1}{|m|}\left[\frac{3\sqrt{a}}{10} - \frac{\sqrt{5-a}}{5}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{3(a-1)}{|m|4\sqrt{5-a}}\frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}),$$

$$(\mathring{B}_3\Phi_k, \Phi_k) = \frac{a+1}{4} + \frac{1}{5|m|}\left[\sqrt{a} + \sqrt{5-a}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{a-1}{|m|2\sqrt{5-a}}\frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}),$$

$$((\mathring{B}_0)^2\Phi_k, \Phi_k) = -\frac{4}{5|m|}\left[\sqrt{a} + \sqrt{5-a}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{2(a-1)}{|m|\sqrt{5-a}}\frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + O(|m|^{-3/2}),$$

$$\begin{aligned}((\mathring{B}_1)^2\Phi_k, \Phi_k) = \frac{\sqrt{a}\sqrt{5-a}}{20|m|}\left[\sqrt{5-a} + 4\sqrt{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{(a-1)\sqrt{5-a}}{8|m|}\frac{\Sigma_2(a)}{\Sigma_0(a)} + \\ + O(|m|^{-3/2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathring{B}_0\mathring{B}_1 + \mathring{B}_1\mathring{B}_0}{2}\Phi_k, \Phi_k\right) = \frac{i}{20|m|}\left[3a + 5 + 8\sqrt{a}\sqrt{5-a}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{i(a-1)}{2|m|}\frac{\Sigma_3(a)}{\Sigma_0(a)} + \\ + O(|m|^{-3/2}),\end{aligned}$$

функции

$$\Sigma_j(a) = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t, r, a)\sigma_j(t, r, a)|H_k(t+ir)|^2\, dt\, dr, \quad j = 1, 2, 3,$$

где θ *задана формулой* (176)*, а*

$$\sigma_1 = t^2, \ \sigma_2 = t^2 + r^2, \ \sigma_3 = \frac{\sqrt{5-a}}{2\sqrt{a}}t^2 + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{5-a}}r^2.$$

В формуле (203) *значения функции* F *и ее производных вычисляются в точке* $(0, 0, (a-1)/4, (a+1)/4)$*, а скалярное произведение берется в пространстве* $\mathscr{P}[m, n]$.

Применим формулу (201) для нахождения асимптотики серии собственных значений оператора (1), расположенных вблизи нижних границ спектральных кластеров, образующихся вокруг собственных значений невозмущенного оператора. В силу унитарности преобразования (26) числа η_k из (13) можно вычислить по формуле

$$\eta_k = (g_{00}(\boldsymbol{B})\Phi_k, \Phi_k)_{\mathscr{P}[m,n]},$$

где оператор $g_{00}(\boldsymbol{B})$ задан (18). Имеем:

$$\eta_k = -\frac{1}{3}\Big[4\Big\{108\Big(\frac{1-c^2}{4}\Big)^2 + 239\Big(\frac{1+c^2}{4}\Big)^2 - 308\Big(\frac{1-c^2}{4}\Big)\Big(\frac{1+c^2}{4}\Big)\Big\} +$$
$$+ 4(-66+100c^2)\frac{1-c^2}{4} + 4(65-130c^2)\frac{1+c^2}{4} - 127c^2 + 72c^4\Big] + O(n^{-1}) =$$
$$= -\frac{1}{3}\Big[\frac{35}{4} + \frac{79}{2}c^2 + \frac{23}{4}c^4\Big] + O(n^{-1}) = -\frac{1}{12n^4}[35n^4 + 158m^2n^2 + 23m^4] +$$
$$+ O(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Далее, в силу (50), (193)

$$\xi_k = c^2\Big[\frac{1}{c^2} + 1 + \frac{4}{|m|}\sqrt{5 - \frac{1}{c^2}}\Big(k + \frac{1}{2}\Big)\Big] + O(n^{-2}) =$$
$$= \frac{n^2+m^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}\sqrt{5m^2-n^2}\Big(k + \frac{1}{2}\Big) + O(n^{-2}), \quad n \to \infty, \tag{204}$$

и, следовательно,

$$2\eta_k + 5\xi_k^2 = -\frac{1}{6n^4}(35n^4 + 158m^2n^2 + 23m^4) + \frac{5}{n^4}(n^4 + 2m^2n^2 + m^4) +$$
$$+ O(n^{-1}) = -\frac{1}{6n^4}(5n^4 + 98n^2m^2 - 7m^4) + O(n^{-1}), \quad n \to \infty. \tag{205}$$

Подставим разложения (204), (205) в формулу (14), а также прибавим к спектру слагаемое εm, вызванное наличием в (1) магнитного поля порядка ε. В результате получаем

Теорема 8. *Пусть* $1 \ll n \lesssim \varepsilon^{-7/2}$ *и* $5^{-1/2}n < |m| < n$. *Тогда вблизи нижних границ спектральных кластеров имеется серия собственных значений оператора* (1) *со следующей асимптотикой:*

$$\mathscr{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m + \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2(n^2+m^2) + \varepsilon^2 n^2(2k+1)\sqrt{5m^2-n^2} -$$
$$- \frac{1}{24}\varepsilon^4 n^6(5n^4 + 98m^2n^2 - 7m^4) + O(n^{-9/2}), \quad n \to \infty,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{206}$$

Отметим, что серия (206) совпадает с серией, найденной в работе [9]. Формула (206), описывающая расщепление спектра (т. е. эффект Зеемана [38]), продвинута до членов четвертого порядка по магнитному полю. Соответствующие асимптотические собственные функции получаются из многочленов Φ_k, заданных формулой (57), применением когерентного преобразования $\mathfrak{H}$ и деусредняющего преобразования $\boldsymbol{U}$ (см. (23), (11)).

Список литературы

[1] *Friedrich H., Wintgen D.* The hydrogen atom in a uniform magnetic field — an example of chaos // Phys. rep. 1989. Vol. 183, № 2. P. 39–79.

[2] *Лисица В. С.* Новое в эффектах Штарка и Зеемана для атома водорода // УФН. 1987. Т. 153, № 3. С. 379–421.

[3] *Avron J. E., Herbst I. W., Simon B.,* Schrödinger operators with magnetic fields. III. Atoms in homogeneous magnetic field // Comm. Math. Phys. 1981. Vol. 79, № 4. P. 529–572.

[4] *Соловьев Е. А.* Атом водорода в слабом магнитном поле // ЖЭТФ. 1982. Т. 82, № 6. С. 1762–1771.

[5] *Herrick D. R.* Symmetry of the quadratic Zeeman effect for hydrogen // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 26, № 1. P. 323–329.

[6] *Delande D., Gay J. C.* Group theory applied to the hydrogen atom in a strong magnetic field. Derivation of the effective diamagnetic Hamiltonian // J. Phys. B. 1984. Vol. 17, № 11. P. L335–L340.

[7] *Belov V. V., Volkova J. L.* Investigation of the Zeeman effect in quasiclassical trajectory-coherent approximation. Preprint № 35, Tomsk Scientific Centre, Siberian Division, AS USSR. 1991.

[8] *Belov V. V., Olivé V. M., Volkova J. L.* The Zeeman effect for the ‘anistropic hydrogen atom’ in the complex WKB approximation: I. Quantization of closed orbits for the Pauli operator with spin-orbit interaction // J. Phys. A. 1995. Vol. 28, № 20. P. 5799-5810.

[9] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ. 1996. Т. 108, № 3. С. 339–387.

[10] *Karasev M. V.* Birkhoff resonances and quantum ray method // Proc. Intern. Seminar «Days of Diffraction — 2004». St. Petersburg, St. Petersburg and Steklov Math. Institute, 2004. P. 114–126.

[11] *Karasev M. V.* Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. I // Karasev M. (ed.), Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2005. P. 1–18. (Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, 216); II // Adv. Stud. Contemp. Math. 2005. Vol. 11, № 1. P. 33–56; III // Russ. J. Math. Phys. 2006. Vol. 13, № 2. P. 131–150.

[12] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями для аксиально-возмущенного поля Кулона — Дирака // ТМФ. 2004. Т. 141. № 3. С. 424–454.

[13] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана в поле Кулона — Дирака // ТМФ. 2005. Т. 142, № 1. С. 127–147.

[14] *Карасев М. В., Новикова Е. М.* Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана — Штарка в атоме водорода // ТМФ. 2005. Т. 142, № 3. С. 530–555.

[15] *Пересколов А. В.* Асимптотика вблизи границ спектральных кластеров // Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского (23-е совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов, М., Изд-во МГУ, 2011. С. 260–261.

[16] *Пересколов А. В.* Асимптотика спектра и квантовых средних вблизи границ спектральных кластеров для возмущенного двумерного осциллятора // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 583–596.

[17] *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М., Наука, 1972.

[18] *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М., Наука, 1977.

[19] *Карасев М. В., Маслов В. П.* Асимптотическое и геометрическое квантование // УМН. 1984. Т. 39, № 6. С. 115–173.

[20] *Weinstein A.* Asymptotics of eigenvalues clusters for the laplasian plus a potential // Duke Math. J. 1977. Vol. 44, № 4. P. 883–892.

[21] *Karasev M. V., Novikova E. M.* Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding // Karasev M. (ed.), Coherent transform, quantization, and Poisson geometry, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1998. P. 1–202. (Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, 187).

[22] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 2-х т. М., Наука, 1973, 1974.

[23] *Переломов А. М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.

[24] *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., Л., Гостехиздат, 1950.

[25] *Славянов С. Ю., Лай В.* Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб., Невский Диалект, 2002.

[26] *Dirac P. A. M.* Quantum electrodynamics // Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., Ser. A. 1943. Vol. 1. P. 1–36.

[27] *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1983.

[28] *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М., Наука, 1990.

[29] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1987.

[30] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1975.

[31] *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. М., ИЛ, 1962.

[32] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М., Наука, 1979.

[33] *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М., Наука, 1987.

[34] *Браун П. А.* Метод ВКБ для трехчленных рекуррентных соотношений и квазиэнергии ангармонического осциллятора // ТМФ. 1978. Т. 37, № 3. С. 355–370.

[35] *Васильева А. Б.* О соответствии между некоторыми свойствами решений линейных разностных систем и обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН. 1967. Т. 5. С. 21–44.

[36] *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., Наука, 1976.

[37] *Маслов В. П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М., Наука, 1976.

[38] *Шифф Л.* Квантовая механика. М., ИЛ, 1959.

Александр Вадимович Перескоков
МЭИ, МИЭМ НИУ ВШЭ
E-mail: pereskokov62@mail.ru

Представлено в редакцию 27.09.2012