Автоматика и телемеханика, № 3, 2009

PACS 07.05.Mh

© 2009 г. Д.А. ШВАРЦ
(Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва)

О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНДЕКСОВ ВЛИЯНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИХ ПРЕДПОЧТЕНИЯ УЧАСТНИКОВ

Сложность алгоритма для вычисления индексов влияния в общем случае экспоненциально растет с ростом числа участников голосования. Но если много коалиций имеют равное суммарное число голосов, вычисления можно существенно сократить. Обобщается известный алгоритм для вычисления индексов Банцафа и Шепли–Шубика, что позволяет быстро вычислять индексы влияния, в которых вхождение участника голосования в коалицию зависит от его предпочтений на множестве остальных участников.

1. Введение

При вычислении индексов влияния, как широко известных (Банцафа, Шепли–Шубика и др. [1]), так и более новых [2], в общем случае, приходится перебирать почти все коалиции, т.е. подмножества множества игроков, что делает вычисления невозможными, если число игроков больше 50.

Но если все игроки обладают целым числом голосов, есть игроки с одинаковым числом голосов, много коалиций имеют равное суммарное число голосов или сумма голосов всех игроков невелика, становятся эффективными алгоритмы, использующие вычисления с помощью производящих функций.

В [3] приведен алгоритм для индекса Банцафа, а в [4] – для индекса Банцафа при ограничениях на вступление игроков в коалиции.

Цель статьи – обобщить эту конструкцию для вычисления введенных в [2] индексов влияния, зависяших от предпочтений участников.

2. Голосования с квотой и индексы влияния

2.1. Голосования с квотой

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков (ими могут быть депутаты парламента, политические партии, члены совета директоров и т.д.). Каждый из игроков обладает некоторым числом голосов (w_i для игрока i), решение принимается, если оно поддержано игроками, суммарное число голосов которых не меньше квоты q, т.е.

$$\sum_{i,\ \text{голосует за решение}} w_i \geqslant q.$$

Пусть ω – *коалиция* участников, т.е. подмножество множества N. *Коалиция* называется *выигрывающей*, если

$$\sum_{i\in\omega} w_i \geqslant q,$$

в противном случае она называется *проигрывающей*.

В теоретико-игровых терминах речь идет о кооперативной игре, в которой выигрывающая коалиция может обеспечить себе выигрыш 1, а проигрывающая – 0.

Описанная игра называется голосованием с квотой и кратко записывается как $(q; w_1, \ldots, w_n)$.

Число голосов, например, партии в парламенте, не всегда соответствует ее влиянию. Так, в голосованиях с квотой $(51; 33, 33, 33)$ и $(51; 49, 48, 3)$ для принятия решения необходима поддержка двух или трех партий, хотя распределение голосов разительно отличается. Поэтому для определения влияния используются другие числовые характеристики.

2.2. Примеры индексов влияния

Игрок i называется *ключевым* в коалиции ω, если $i \in \omega$, ω – выигрывающая коалиция, а $\omega \setminus i$ – проигрывающая коалиция.

Обозначим через Ω_i множество коалиций, в которых игрок i ключевой.

Выигрывающая коалиция называется минимальной, если при удалении из нее любого участника она становится проигрывающей.

Индекс влияния Банцафа (BI) [5] вычисляется в предположении, что влияние игрока пропорционально числу коалиций, в которых он ключевой. Если b_i – число таких коалиций, то индекс Банцафа $\beta(i)$ для игрока i равен

$$\beta(i) = \frac{b_i}{\sum\limits_j b_j}.$$

Индекс Шепли–Шубика (SSI) [6] возник в теории игр как частный случай вектора Шепли для простых супераддитивных игр. В нем число, которое коалиция добавляет к влиянию игрока, зависит от ее размера.

$$\sigma(i) = \sum_{\omega\in\Omega_i} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!},$$

где $s = |\omega|$.

Основная идея **индекса Джонстона (DJI)** [7] – чем меньше в коалиции ключевых игроков, тем больше влияния получает каждый из них.

Опишем этот индекс формально. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_k$ – выигрывающие коалиции, в которых игрок i ключевой, $m_1, \ldots, m_k$ – число ключевых игроков в коалициях $\omega_1, \ldots, \omega_k$ соответственно.

Тогда общий индекс Джонстона игрока i вычисляется как

$$TJI(i) = \frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_k},$$

а сам индекс влияния Джонстона игрока i равен

$$JI(i) = \frac{TJI(i)}{TJI(1) + \ldots + TJI(n)}.$$

Построение **индекса Дигена – Пакела (DPI)** [8] основано на трех предположениях:

1) при вычислении относительного влияния игрока рассматриваются только минимальные выигрывающие коалиции;

2) все минимальные выигрывающие коалиции вносят равный вклад в суммарное влияние;

3) влияние, вносимое каждой минимально выигрывающей коалицией, делится между игроками поровну.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_k$ – минимальные выигрывающие коалиции, к которым принадлежит игрок i, а $m_1, \ldots, m_k$ – число игроков в коалициях $\omega_1, \ldots, \omega_k$ соответственно. Общий индекс Дигена – Пакела игрока i вычисляется как

$$TDPI(i) = \frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_k},$$

а индекс влияния Дигена – Пакела игрока i равен

$$DPI(i) = \frac{TDPI(i)}{TDPI(1) + \ldots + TDPI(k)}.$$

Индекс Холера – Пакела (HPI) [9], также как и индекс Банцафа, основан на вычислении доли коалиций, в которых игрок ключевой, но учитывает только минимальные выигрывающие коалиции.

Пусть h_i – число минимальных выигрывающих коалиций, к которым принадлежит партия i; тогда индекс Холера – Пакела вычисляется как

$$HPI(i) = \frac{h_i}{\sum\limits_j h_j}.$$

3. Индексы влияния, зависящие от предпочтений участников

Теперь, следуя [2], будем считать удельный вес коалиции зависящим не только от ее размера, но и от предпочтений участников.

Именно, зададим предпочтения игроков $n \times n$-матрицей P. Неформально говоря, ее элемент p_{ij} определяет желание игрока i входить в коалицию с игроком j. Матрица P не обязательно симметрична, т.е. в общем случае $p_{ij} \neq p_{ji}$. Для вычислений удобно считать, что $p_{ii} = 0$.

В [2] приведено несколько способов определения матрицы предпочтений для реальных выборных органов.

В общем случае удельный вес коалиции ω для игрока i зависит от игрока, коалиции и матрицы предпочтений. Обозначим его через $f(i, \omega, P)$.

В [2] общий индекс влияния $\alpha(i)$ определен по аналогии с индексом Банцафа.

$$\alpha(i) = \frac{r(i)}{\sum\limits_{j \in N} r(i)}, \tag{1}$$

где

$$r(i) = \sum_{\omega \in \Omega_i} f(i, \omega, P). \tag{2}$$

Рассмотрим отдельно частный случай (1)–(2). Пусть $f(i,\omega,P)$ зависит только от ω. Оказыватся, что под эту схему подходят все описанные выше индексы влияния.

Пусть $m(\omega)$ – число ключевых игроков в коалиции ω, $\chi_{\min}(\omega)$ (характеристическая функция) равна 1, если ω – минимальная выигрывающая коалиция, и 0 иначе. Тогда имеет место легко проверяемый непосредственными вычислениями факт.

Утверждение 1. Индексы влияния Банцафа, Шепли–Шубика, Джонстона, Дигена – Пакела и Холера – Пакела вычисляются по формулам (1)–(2), *где* $f(\omega)$ *подставляются из формулы* (3) *для индекса Банцафа,* (4) *для индекса Шепли–Шубика,* (5) *для индекса Джонстона,* (6) *для индекса Дигена – Пакела,* (7) *для индекса Холера – Пакела.*

$$f_{BI}(\omega) = 1, \tag{3}$$

$$f_{SSI}(\omega) = \frac{(|\omega|-1)!(n-|\omega|)!}{n!}, \tag{4}$$

$$f_{DJI}(\omega) = \frac{1}{m(\omega)}, \tag{5}$$

$$f_{DPI}(\omega) = \chi_{\min}(\omega)\frac{1}{|\omega|}, \tag{6}$$

$$f_{HPI}(\omega) = \chi_{\min}(\omega). \tag{7}$$

Пример 1. В [2] определены 4 версии индекса, основанные на матрице предпочтений. Их определяющие функции:

$$f^{+}(i,\omega,P) = \sum_{j\in\omega}\frac{p_{ij}}{|\omega|}; \tag{8}$$

$$f^{-}(i,\omega,P) = \sum_{j\in\omega}\frac{p_{ji}}{|\omega|}; \tag{9}$$

$$f(i,\omega,P) = \frac{f^{+}(i,\omega,P)+f^{-}(i,\omega,P)}{2}; \tag{10}$$

$$f(\omega,P) = \sum_{j\in\omega}\frac{f^{+}(j,\omega,P)}{|\omega|} = \sum_{j\in\omega}\frac{f^{-}(j,\omega,P)}{|\omega|} = \frac{1}{|\omega^2|}\sum_{i,j\in\omega}p_{ij}. \tag{11}$$

4. Вычисления

Пусть $\{a_i\}$ – некоторая последовательность. Производящей функцией этой последовательности называется сумма: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_ix^i+\ldots$ Производящие функции определены и для последовательностей с несколькими индексами. В этом случае производящие функции зависят от нескольких переменных. Так, производящей функцией для последовательности $\{a_{i,j}\}$ будет $\sum\limits_{i,j}x^iy^j$.

Пусть $b_k(i)$ – число коалиций с суммарным числом голосов k, не включающим игрока i, а $b_{k,n}(i)$ – число коалиций из n игроков с суммарным числом голосов k, не включающим игрока i, $W(\omega)=\sum\limits_{j\in\omega}w_j$ – число голосов, которыми обладает коалиция ω.

Лемма 1 [10]. *Производящая функция для последовательности* $b_k(i)$ *равна*

$$G_i(x) = \prod_{j\neq i}(1+x^{w_j}),$$

а для последовательности $b_{k,n}(i)$ –

$$S_i(x,y) = \prod_{j\neq i}(1 + yx^{w_j}).$$

Поскольку игрок i ключевой в коалиции ω, если и только если коалиция $\omega \setminus \{i\}$ набирает от $q - w_i$ до $q - 1$ голосов, то число коалиций, в которых i ключевой, равно

$$\sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_k(i),$$

или сумме коэффициентов при степенях x от $q - w_i$ до $q - 1$ соответствующей производящей функции, что позволяет вычислить индекс Банцафа.

Поменяв порядок суммирования, индекс Шепли–Шубика можно записать как

$$\sigma(i) = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{\omega\in\Omega_i,|\omega|=s} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\Omega_{i,s},$$

где $\Omega_{i,s}$ – число коалиций из s игроков, в которых i ключевой. С другой стороны,

$$\Omega_{i,s} = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} b_{k,s}(i),$$

т.е. равно сумме коэффициентов производящей функции $S(x,y)$ при s-й степени y и степенях x от $q - w_i$ до $q - 1$-й, что позволяет вычислить индекс Шепли–Шубика.

При вычислении коэффициентов производящих функций G_i естественно после раскрытия очередных скобок сразу же приводить подобные слагаемые. Именно благодаря этому одновременно обрабатываются многие коалиции с одинаковой суммой голосов при вычислении индекса Банцафа и с одним и тем же числом участников и суммой голосов для индекса Шепли–Шубика. Особенно такая схема вычислений эффективна, если многие участники голосования имеют равное число голосов. В этом случае соответствующие им скобки можно раскрывать с помощью формулы бинома.

Пример 2 [4]. Политические группы в Европейском парламенте и неприсоединившиеся депутаты образуют игру из 36 игроков: 7 партий с голосами 266, 201, 89, 42, 41, 35, 27 и 29 неприсоединившихся депутатов. Игра имеет вид: $(367; 266, 201, 89, 42, 41, 35, 27, 1, \ldots, 1)$. Производящая функция для 1-го игрока содержит 464 ненулевых коэффициента. При полном переборе придется рассмотреть $2^{35} \approx 3{,}43 \cdot 10^{10}$ коалиций.

При последовательном перемножении можно исключать члены, степень которых по x не меньше квоты, поскольку в дальнейшем эта степень не может уменьшиться и не будет учтена при подсчете выигрывающих коалиций. Аналогично, можно не учитывать члены, степень которых при домножении не может достигнуть $q - w_i$.

Индексы влияния, зависящие от матрицы предпочтений P, вычисляются по аналогичным формулам, однако, с одним нюансом.

По аналогии с индексами Банцафа и Шепли–Шубика определим

$$r_k(i) = \sum_{W(\omega)=k} f(i,\omega,P),$$

$$r_{k,s}(i) = \sum_{W(\omega)=k,|\omega|=s,} f(i,\omega,P).$$

Соответственно,

$$r(i) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} r_k(i) = \sum_s \sum_{k=q-w_i}^{q-1} r_{k,s}(i).$$

4.1. Аналог индекса Банцафа

Пусть $f(i,\omega,P)$ имеет вид $\sum\limits_{j\in\omega} f_{ij}$. Рассмотрим многочлен

$$R_i(x) = \prod_{j\neq i}(1+f_{ij}x^{w_j}) = \sum_{\omega\subseteq(N\setminus i)} \prod_{j\in\omega} f_{ij}x^{W(\omega)} = \sum_k x^k \sum_{W(\omega)=k} \prod_{j\in\omega} f_{ij}.$$

Коэффициент при x^k похож на $r_k(i)$ с одним отличием – коэффициенты f_{ij} не складываются, а перемножаются. Поэтому производящая функция для $r_k(i)$ вычисляется так же, как $R_i(x)$, но операция умножения заменяется на операцию сложения.

Следовательно, $\alpha(i)$ может быть вычислено за то же время, что и индекс Банцафа.

4.2. Аналог индекса Шепли–Шубика

Пусть $f(i,\omega,P)$ имеет вид $\sum\limits_{j\in\omega} f_0(|\omega|)f_{ij}$. Таковы, в частности, введенные выше функции $f^+(i,\omega,P)$, $f^-(i,\omega,P)$ и $f(i,\omega,P)$.

Рассмотрим многочлен

$$R_i(x,y) = \prod_{j\neq i}(1+f_{ij}yx^{w_j}) = \sum_{\omega\subseteq(N\setminus i)} \prod_{j\in\omega} f_{ij}y^{|\omega|}x^{W(\omega)} =$$
$$= \sum_{k,s} x^k y^s \sum_{W(\omega)=k,|\omega|=s} \prod_{j\in\omega} f_{ij}.$$

Коэффициент при $x^k y^s$ похож на $r_{k,s}(i)$ с двумя отличиями – коэффициенты f_{ij} не складываются, а перемножаются и коэффициенты при y^s должны быть умножены на $f_0(s)$. Поэтому производящая функция для $r_{k,s}(i)$ вычисляется так же, как $R_i(x,y)$, но операция умножения заменяется на операцию сложения, а умножение на $f_0(s)$ производится в конце вычислений. Последнюю операцию можно воспринимать как скалярное произведение вектора $R_i(x,y)$, разложенного по степеням y и вектора $(1, f_0(1), f_0(2), \ldots, f_0(n))$.

Следовательно, $\alpha(i)$ может быть вычислено за то же время, что и индекс Шепли–Шубика.

Чтобы записать полученные результаты формально, введем “псевдочисла” $\overline{a}$, которые складываются и вычитаются по обычным правилам (в том числе и с обычными числами), при умножении на 1 они не меняются, но при перемножении между собой не умножаются, а складываются. Т.е.

$$a+\overline{b} = \overline{a+b}, \quad a-\overline{b} = \overline{a-b}, \quad 1\cdot\overline{b} = \overline{b},$$
$$\overline{a}+\overline{b} = \overline{a+b}, \quad \overline{a}-\overline{b} = \overline{a-b}, \quad \overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{a+b}.$$

Во введенных обозначениях рассуждения этого параграфа доказывает

Теорема 1. 1) *Пусть $f(i,\omega,P)$ имеет вид $\sum\limits_{j\in\omega} f_{ij}$, где f_{ij} зависят только от i, j и P. Тогда производящая функция для $r_k(i)$ имеет вид*

$$R_i(x) = \prod_{j\neq i}\left(1+\overline{f_{ij}}x^{w_j}\right).$$

2) *Пусть $f(i,\omega,P)$ имеет вид $\sum\limits_{j\in\omega} f_0(|\omega|)f_{ij}$, где f_{ij} зависят только от i, j и P. Тогда производящая функция для $r_{k,s}(i)$ имеет вид*

$$R_i(x,y) = \left\langle \prod_{j\neq i}\left(1+\overline{f_{ij}}yx^{w_j}\right), (1, f_0(1), f_0(2), \ldots, f_0(n)) \right\rangle.$$

5. Заключение

Приведенный алгоритм первоначально был написан для вычисления индексов влияния для Международного валютного фонда (IMF, 184 участника, сумма голосов – 2,2 млн) и в ходе написания статьи использовался для подсчета индексов влияния в ГД РФ, учитывающих распределение депутатов по регионам.

В условиях п. 1) теоремы 1 алгоритм требует памяти для хранения немного более, чем $2q$ чисел. Поскольку игрок не может быть ключевым в коалиции, где сумма голосов остальных игроков больше квоты, такие коалиции можно не обсчитывать и не захватывать под них память. Время работы программы $\sim qn^2$.

Аналогичные характеристики для п. 2) теоремы 1 – $2qn$ и qn^3 соответственно. В частности, вычисления для IMF потребовали 4 ГБ памяти, которую путем оптимизации алгоритма под конкретную задачу удалось сократить до 1,5 ГБ.

Аналогичный алгоритм можно привести и для вычисления индексов влияния, использующих функцию $f(\omega,P)$ 11. Но в этом случае для каждого множества коалиций из s игроков с суммой голосов k придется хранить (и пересчитывать), сколько раз каждый игрок входит в эту коалицию. В результате потребуется в n раз больше памяти и в n раз же возрастет время работы. Для IMF это означает $\sim 3\cdot 10^{15}$ операций и 300 ГБ памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Felsenthal D.S., Machover M.* The Measurement of Voting Power. Cheltenham, UK: Edward Elgar, 1998.
2. *Aleskerov F.* Power indices taking into account agents' preferences. Mathematics and Democracy. Berlin, Springer, 2006. P. 1–18.
3. *Bilbao J.M., Fernandez J.R., Jimenes A., Lopez J.J.* Generating functions for computing power indices efficiently. Top. 2000. V. 8(2). P. 191–213.
4. *Yakuba V.* Evaluation of Banzhaf index with restrictions on coalitions formation// Math. Comput. Mod. 2008. doi:10.1016/j.mcm.2008.05.017.
5. *Banzhaf J.F.* Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis. Rutgers Law Review, 1965. V. 19. P. 317–343.
6. *Shapley L.S., Shubik M.* A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System // Amer. Polit. Sci. Rev. 1954. V. 48(3). P. 787–792.

7. *Johnston R.J.* On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver // Environment Planning. 1978. V. 10. P. 907–914.
8. *Deegan J., Packel E.W.* A New Index of Power for Simple n-Person Games // Int. J. Game Theory. 1978. V. 7(2). P. 113–123.
9. *Holler M.J., Packel E.W.* Power, Luck and the Right Index // J. Econom. 1983. V. 43. P. 21–29.
10. *Leech D.* Computation of power indices // Warwick economic research papers. 2002.
11. *Алескеров Ф.Т., Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А. и др.* Влияние и структурная устойчивость в Российском парламенте (1905–1917 и 1993–2005 гг.). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 05.08.2008