

## ГЛАВА 2 ВЕРОЯТНОСТНО-ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

### 2.1. Формализация вероятностно-физических моделей надежности

#### 2.1.1. Общие положения

Общеизвестно, что принятие той или иной теоретической модели распределения наработки до отказа элементов или систем оказывается чрезвычайно важным. Экспериментально доказано, что расхождение в оценке показателей надёжности изделий в зависимости от принятой теоретической модели может составлять несколько порядков. Так что выбор той или иной теоретической модели распределения отказов элементов в конечном итоге определяет соответствующую точность расчётных количественных показателей надёжности разрабатываемых технических устройств и систем.

Правильный выбор теоретической модели распределения отказов высоконадежных изделий электронной техники (ИЭТ) (интегральных схем, полупроводниковых приборов и т.п.) оказывается не простой задачей. Если для механических объектов правильность выбора теоретической модели можно проверить статистическими методами, то в случае ИЭТ задача намного усложняется, так как получение полных выборок отказов ИЭТ, даже в форсированных режимах, не представляется возможным. Поэтому путь выбора наиболее подходящей модели на основе известных статистических критериев согласия ( $\chi^2$ -квadrat,  $\omega^2$ -квadrat, Колмогорова и т.п.) оказывается непродуктивным.

Таким образом, выбор теоретической модели распределения отказов ИЭТ может быть осуществлён в основном на базе физического обоснования. То есть только тщательное исследование причинно-следственных связей механизмов деградации и отказов ИЭТ позволит установить наиболее подходящую модель распределения отказов [9]. Появление отказа связано с необратимыми деградационными процессами, протекающими в изделиях во время их эксплуатации или хранения, причём, большинство из них носит случайный характер. Установление закономерностей появления отказов должно осуществляться на основании изучения статистических закономерностей протекания деградационных процессов.

Известно несколько схем формализации моделей отказов на основании анализа динамики определяющих параметров, приводящих к отказовому состоянию. Случайный характер поведения определяющих параметров, обусловленный флуктуациями внешних факторов, а также вследствие стохастической природы строения материалов, ставит

определённые трудности на пути построения моделей отказов ИЭТ. Описание процесса накопления повреждений случайными функциями общего вида приводит к громоздким аналитическим выражениям для количественных характеристик надёжности или к приближённым решениям. Поэтому при построении моделей параметрических отказов, отвечающих требованиям инженерной практики, следует ограничиваться рассмотрением сравнительно простых связей и типов случайных процессов.

### 2.1.2. Альфа-распределение

Одной из первых попыток представления процесса поведения определяющего параметра при формализации модели параметрических отказов явилось представление изменения определяющего параметра в виде линейного закона (см. рис. 2.1).

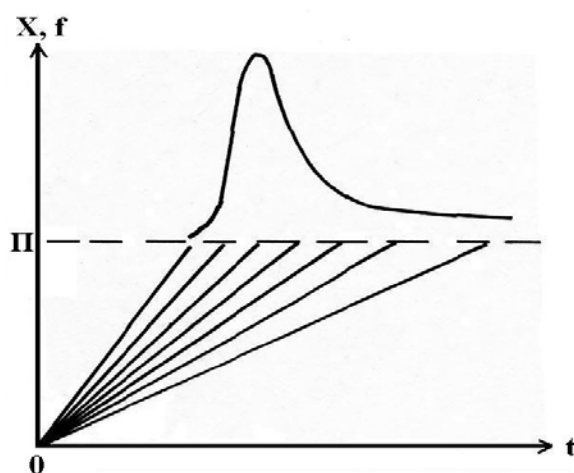


Рис. 2.1. Модель случайного процесса деградации (веерный процесс) и схема формирования распределения наработки до отказа (альфа-распределение)

Решение поставленной задачи в случае «веерного» процесса сводится к схеме Кэптейна, когда опытным данным сопоставляется такое распределение случайной величины  $t$ , чтобы некоторая функция  $\xi(t)$  имела нормальное распределение. Взяв в качестве функции  $\xi(t)$  скорость  $a(t)$  и применив известные правила получения закона распределения функции случайного аргумента, получают распределение наработки до заданного уровня определяющего параметра [8, 17]:

$$F_{\alpha}(t) = \Phi\left(\frac{at-1}{\nu at}\right), \quad (2.1)$$

где  $\Phi(\cdot)$  — функция нормированного нормального распределения;  $a$  – математическое ожидание скорости изменения определяющего параметра, нормированного на

предельное значение;  $\nu$  - коэффициент вариации скорости изменения определяющего параметра.

### 2.1.3. Нормальное параметрическое распределение

Авторы [6], рассматривая стационарный процесс изнашивания, приняли гипотезу о сильном «перемешивании» стационарного процесса изнашивания, при котором изменение дисперсии предполагается пропорциональным времени, а распределение времени наработки для больших значений износа асимптотически нормальным (рис. 2.2):

$$F_N(t) = \Phi\left(\frac{at-1}{\nu\sqrt{a}}\right). \quad (2.2)$$

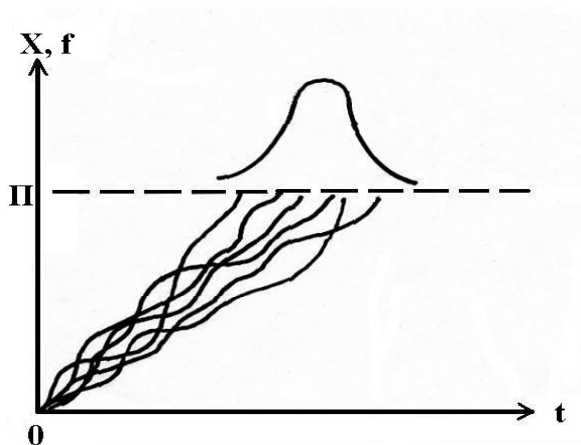


Рис. 2.2. Модель случайного процесса деградации (сильно «перемешанный» гауссовский процесс) и схема формирования распределения наработки до отказа (нормальное параметрическое распределение)

Необходимо заметить, что допущение о линейной связи дисперсии определяющего параметра и времени не соответствует эмпирическим данным и является неверным с математической точки зрения. Известно, что для стационарного процесса изнашивания изменение дисперсии износа пропорционально квадрату времени. Ошибочная попытка авторов [6] втиснуть распределение износных отказов в рамки нормального распределения, таким образом, привела к тому, что не соблюдена размерность аргумента функции Лапласа (2).

Известна другая схема формализации нормального параметрического распределения, которая заключается в том, что распределение времени до отказа предполагают нормальным:

$$F_N(t) = \Phi\left(\frac{t - T_0}{\sigma_0}\right), \quad (2.3)$$

где  $T_0$ ,  $\sigma_0$  – соответственно среднее и среднеквадратическое отклонение наработки до отказа.

Связь параметров распределения (2.3) с характеристиками процесса изнашивания устанавливаются из следующих простых соображений. Средняя наработка связана со средней скоростью изнашивания соотношением  $T_0 = 1/a$ . Значение второго параметра определяется из допущения гипотезы равенства коэффициентов вариации процесса деградации и распределения наработки до отказа:  $\sigma_0 = \nu T_0 = \nu / a$ .

Подставляя значения параметров в (2.3), получаем:

$$F_N(t) = \Phi\left(\frac{a t - 1}{\nu}\right). \quad (2.4)$$

Как видно, последнее выражение нормального параметрического распределения отличается от (2.2). Следует отметить, что схемы формализации вероятностно-физических моделей надежности (2.2) и (2.4) не имеют математической строгости.

#### 2.1.4. Построение марковской модели деградации изделий

Анализируя разнообразные деградационные процессы, можно отметить, что все они имеют случайную природу, причем изменение их значений носит как монотонный, так и немонотонный характер. Сложные изделия электронной техники типа интегральных схем одновременно подвержены действию множества процессов. Все эти процессы, некоррелированные и слабокоррелированные между собой, формируют общий процесс деградации изделия. Определяющие параметры исследуемых деградационных процессов, способные вызвать отказ какого-либо компонента, например в интегральной схеме, имеют разную физическую природу: скопление дислокаций, пластические деформации, длина трещины (усталостное механическое разрушение); геометрические размеры сечения проводящей металлизации, электросопротивление, размеры «бугорков» (электромиграция); скопление пустот, глубина слоя непроводящих интерметаллидов, проводимость (интерметаллизация); проводимость электролитных коротящих дорожек (электролитическая коррозия); глубина инверсного слоя, количество поверхностных зарядов (генерация и перемещение зарядов на поверхности кристалла полупроводника) и т.д.

Любой объект (элемент, устройство) можно условно представить в виде совокупности (от одного до большого множества) независимых элементарных

компонентов (ЭК), для которых определяющим будет только один физический параметр. Отказ любого (наиболее слабого) ЭК приводит к отказу объекта.

Нормируя все определяющие параметры по их предельным значениям, вызывающим отказ ЭК, можно построить обобщенный процесс деградации изделия (совокупности ЭК) с единой областью значений координат и общим временем. Типичные процессы деградации качественно представлены на рис. 2.3–2.4. Показанные процессы с множеством реализаций могут соответствовать одному сложному изделию типа интегральная схема, имеющего множество ЭК. Реализации процесса в данном случае – это изменения определяющих параметров ЭК. Для простых элементов типа резистор, имеющих единичные ЭК, рассматриваемый процесс формируется множеством идентичных изделий. В общем случае, когда рассматривается процесс деградации совокупности однотипных изделий (простых и сложных), каждый образец представлен единственной реализацией своего самого слабого ЭК.

Теперь охарактеризуем построенный обобщенный процесс деградации изделий. Отметим, что многие исследователи [11, 13] описывают усталостное разрушение случайным марковским процессом. В ряде работ [1, 22] показывается обоснованность аппроксимации процесса механического износа марковским процессом. Остальные рассмотренные процессы деградации являются почти классическим примером марковского процесса диффузионного типа. Можно привести множество примеров эффективного использования марковских процессов в качестве математической модели расходования ресурса самых различных технических систем [1, 11, 13]. Поэтому принятие гипотезы о том, что обобщенный процесс деградации изделий можно рассматривать как марковский, не вызывает особых нареканий.

С учетом сказанного выше будем считать, что построенный процесс можно аппроксимировать непрерывным марковским процессом диффузионного типа, т.е. изучаемый процесс управляется стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка следующего вида (уравнение типа Ито):

$$d x(t) = A(t) dt + B(t) d\eta(t), \quad (2.5)$$

где  $x(t)$  – определяющий параметр;  $A(t)$ ,  $B(t)$  – детерминированные функции, характеризующие изменение среднего значения и дисперсии определяющего параметра (коэффициенты сноса и диффузии);  $\eta(t)$  – случайная составляющая гауссовского типа.

Задача определения распределения времени до первого отказа объектов в данном случае сводится к решению задачи первого достижения процессом (2.5) верхней границы области (при нормированном процессе верхняя граница равна единице).

Данная задача решается полностью, если известна условная плотность вероятности перехода процесса из одного состояния в другое. Для марковского процесса диффузионного типа условная переходная плотность  $\omega(t, x)$ , соответствующая процессу (2.5), описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова, представляющим собой дифференциальное уравнение в частных производных, следующего вида:

$$\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} + A(t) \frac{\partial \omega(t, x)}{\partial x} - \frac{[B(t)]^2}{2} \frac{\partial^2 \omega(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

При решении последнего уравнения необходимо задавать граничные условия, которые зависят от вида реализаций процесса, в частности от их монотонного или немонотонного характера. Таким образом, схема формализации, а также конечные выражения для моделей отказов, соответствующих монотонному или немонотонному процессу деградации, несколько отличаются и потому рассматриваются отдельно.

### 2.1.5. Математическая модель отказов изделий электронной техники (диффузионное немонотонное распределение)

Процесс деградации изделий электронной техники наряду с монотонными реализациями (механическое разрушение) вследствие электрических явлений имеет и немонотонные реализации, поэтому в общем случае принято рассматривать деградацию этих изделий как процесс с немонотонными реализациями (см. рис. 2.3).

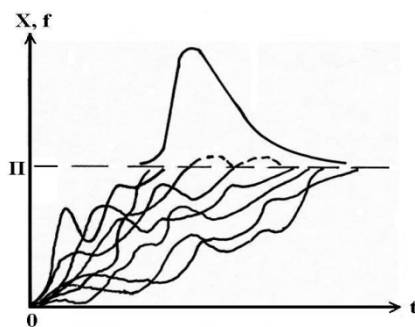


Рис. 2.3. Модель случайного процесса деградации (марковский немонотонный процесс) и схема формирования распределения наработки до отказа (*DN*-распределение)

Для того чтобы определить выражение для закона распределения времени до первого отказа, первого достижения предельного уровня рассматриваемым процессом (2.5), необходимо конкретизировать функции  $A(t)$  и  $B(t)$ . Будем рассматривать процесс деградации изделий (2.5) для совокупности однотипных изделий как однородный, то есть с постоянной средней скоростью и постоянным средним

квадратическим отклонением скорости (или постоянным коэффициентом вариации скорости). В таком случае кинетическое уравнение процесса (2.5) можно записать в виде:

$$dx(t) = a dt + b d\eta(t), \quad (2.7)$$

где  $a$  – коэффициент сноса (средняя скорость изменения определяющего параметра);  $b$  – коэффициент диффузии ( $b^2$  – средняя скорость изменения дисперсии определяющего параметра).

Если марковский процесс диффузионного типа определяется уравнением вида (2.7), то диффузия условной переходной плотности  $\omega(t_0, x_0; t, x)$  этого процесса описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова следующего вида:

$$\frac{\partial \omega(t_0, x_0; t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial \omega(t_0, x_0; t, x)}{\partial x} - \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 \omega(t_0, x_0; t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.8)$$

Как известно [2, 19], плотность распределения времени достижения границы изучаемым нормированным процессом (плотность распределения времени до отказа) имеет следующую связь с условной плотностью перехода процесса из одного состояния в другое:

$$f(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \omega(t_0, x_0; t, x)}{\partial t} dx. \quad (2.9)$$

Чтобы определить плотность вероятности распределения времени до отказа  $f(t)$ , необходимо получить выражение для  $\omega(t_0, x_0; t, x)$ , решив уравнение (2.8), затем найти частную производную по времени от функции  $\omega(t_0, x_0; t, x)$  и полученное выражение проинтегрировать по параметру  $x$ . Такова схема формализации так называемых диффузионных распределений. Их название «диффузионный» обусловлено тем, что выражение для закона распределения вытекает из решения уравнения **диффузии вероятностей**.

Переходим к решению уравнения диффузии вероятностей (2.8). Это уравнение представляет собой параболическое дифференциальное уравнение в частных производных. Для решения такого типа уравнений необходимо установить краевые условия, которые определяются из общих физических соображений о процессе и искомой функции.

Начальные условия в самом общем случае, исходя из искомой функции  $\omega(t_0, x_0; t, x)$  (плотности вероятностей), могут быть заданы, например, в виде:

$$\omega(t_0, x_0; t, x) |_{t=t_0} = \omega_0(x_0), \quad (2.10)$$

где  $\omega_0(x_0)$  – некоторое произвольное распределение исследуемого параметра в начальный момент.

Если начальное значение параметра задано (например, без потери общности можно положить  $x_0 = 0, t_0 = 0$ ), тогда  $\omega_0(x_0)$  вырождается в  $\delta$ -функцию:

$$\omega(t, x)|_{t=0} = \delta(x). \quad (2.11)$$

Что касается определения граничных условий, то здесь необходимо оценить характер реализаций процесса  $x(t)$ . Напомним, что имеются в виду реализации – изменение определяющих параметров невосстанавливаемых объектов. Первое достижение реализацией границы заданной области (в нашем случае параметр изменяется от нуля до единицы) соответствует отказу объекта. По характеру изменения реализации необходимо определить, моделирует ли отказ первое достижение реализацией границы заданной области и может ли реализация повлиять на изучаемый процесс  $x(t)$  и, соответственно, на искомую функцию  $\omega(t, x)$  в дальнейшем, после первого достижения границы.

Если реализации имеют немонотонный характер, то после первого достижения границы заданной области (физически это соответствует отказу и снятию изделия с наблюдения) немонотонная реализация может снова возвратиться в заданную область и участвовать в наблюдаемом процессе (некоторые подобные реализации показаны штриховыми линиями на рис. 2.3).

Для того чтобы первое достижение границы немонотонной реализацией моделировало отказ и дальнейшая реализация не участвовала в наблюдаемом процессе и не влияла на  $\omega(t, x)$ , необходимо на границе заданной области поставить граничное условие типа «поглощающий экран». В таком случае любая реализация, впервые достигнув его, навсегда остается на границе, вне заданной области.

Поскольку выше было установлено, что реализации процесса деградации изделий электронной техники могут иметь немонотонный характер, в качестве граничных условий при решении уравнения (2.8) принимаются условия:

$$\omega(t, x)|_{x=-\infty} = 0; \quad (2.12)$$

$$\omega(t, x)|_{x=1} = 0. \quad (2.13)$$

Первое граничное условие (2.12) чисто формально. Поскольку изучаемый процесс (определяющий параметр изделий) не может принимать отрицательных значений, установленная левая граница является недостижимой (естественной) и никак не влияет на процесс в заданной области. Принятие формального условия (2.12) необходимо для



решения уравнения (2.8). Граничное условие (2.13) вытекает из выше приведенных соображений и соответствует поглощающему экрану в точке  $x = 1$ .

Решение уравнения (2.8) для краевых условий (2.11) – (2.13) записывается в следующем виде:

$$\omega(t, x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-at)^2}{2b^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x-at-2)^2 - 4at}{2b^2 t}\right] \right\}. \quad (2.14)$$

Вычислим производную:

$$\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} = \frac{x^2 - a^2 t^2 - b^2 t}{2b^3 t^2 \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-at)^2}{2b^2 t}\right] - \frac{(x-2)^2 - a^2 t^2 - b^2 t}{2b^3 t^2 \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-at-2)^2 - 4at}{2b^2 t}\right].$$

Подставив последнее выражение в (2.9), проинтегрируем и получим выражение для плотности распределения времени до первого отказа:

$$f(t) = - \int_{-\infty}^1 \left\{ \frac{x^2 - a^2 t^2 - b^2 t}{2b^3 t^2 \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-at)^2}{2b^2 t}\right] - \frac{(x-2)^2 - a^2 t^2 - b^2 t}{2b^3 t^2 \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-at-2)^2 - 4at}{2b^2 t}\right] \right\} dx$$

Представим последний интеграл в виде суммы интегралов:

$$f(t) = J_1 + J_2;$$

$$J_1 = - \int_{-\infty}^1 \left\{ \frac{x^2 - a^2 t^2 - b^2 t}{2b^3 t^2 \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-at)^2}{2b^2 t}\right] \right\} dx; \quad (2.15)$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^1 \left\{ \frac{(x-2)^2 - a^2 t^2 - b^2 t}{2b^3 t^2 \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-at-2)^2 - 4at}{2b^2 t}\right] \right\} dx. \quad (2.16)$$

Для определения первого интеграла делаем подстановку  $y = \frac{x-at}{b\sqrt{2t}}$ , тогда

$$dx = b\sqrt{2t} dy. \text{ При } x=1 \rightarrow y = \frac{1-at}{b\sqrt{2t}}.$$

Выполняем подстановку и некоторые преобразования в первом интеграле:

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_{-\infty}^y \left\{ \frac{2by^2 + 2ay\sqrt{2} - b}{2bt\sqrt{\pi}} \exp(-y^2) \right\} dy = \\ &= - \frac{1}{t\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y y^2 \exp(-y^2) dy - \frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^y y \exp(-y^2) dy + \frac{1}{2t\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y \exp(-y^2) dy = \\ &= \frac{1}{t\sqrt{\pi}} \left[ \frac{y}{2} \exp(-y^2) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^y \exp(-y^2) dy \right] + \frac{a}{b\sqrt{2\pi t}} \exp(-y^2) + \frac{1}{2t\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y \exp(-y^2) dy = \\ &= \left( \frac{y}{2t\sqrt{\pi}} + \frac{1}{b\sqrt{2\pi t}} \right) \exp(-y^2). \end{aligned}$$

Произведя обратную замену переменных, получаем:

$$J_1 = \frac{1+at}{2bt\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2b^2 t}\right]. \quad (2.17)$$

Для вычисления второго интеграла делаем подстановку  $z = \frac{x-at-2}{b\sqrt{2t}}$ , тогда

$$dx = b\sqrt{2t} dz. \text{ При } x = -\infty \rightarrow z = -\infty, \text{ а при } x = 1 \rightarrow z = -\frac{1+at}{b\sqrt{2t}}$$

Выполнив подстановку и произведя некоторые преобразования имеем:

$$J_2 = \int_{-\infty}^z \frac{(2bz^2 + 2az\sqrt{2t} - b)}{2bt\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{2a}{b^2} - z^2\right) dz = -\left(\frac{z}{2t\sqrt{\pi}} + \frac{a}{d\sqrt{2\pi t}}\right) \exp\left(\frac{2a}{b^2} - z^2\right).$$

Произведя обратную замену переменных получаем:

$$J_2 = \frac{1-at}{2bt\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2b^2 t}\right]. \quad (2.18)$$

Суммируя найденные интегралы, определяем выражение для плотности распределения времени до отказа изделий электронной техники:

$$f(t) = \frac{1}{bt\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2b^2 t}\right]. \quad (2.19)$$

Для однородного процесса деградации диффузионного типа коэффициент диффузии имеет простую связь с обычно используемыми характеристиками процесса – средним квадратическим отклонением скорости процесса ( $\sigma_a$ ) и коэффициентом вариации процесса ( $\nu$ ):

$$b = \frac{\sigma_a}{\sqrt{a}} = \nu\sqrt{a}. \quad (2.20)$$

С учетом соотношения (2.20) можно записать выражение для закона распределения времени до отказа (2.17) в следующем виде:

$$f(t) = \frac{1}{\nu t\sqrt{2\pi at}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2\nu^2 at}\right]. \quad (2.21)$$

Принято полученное диффузионное (**Diffusive**) распределение (2.21), соответствующее немонотонному (**Nonmonotonic**) марковскому процессу, по первым буквам определяющих слов называть диффузионным немонотонным распределением (**DN**-распределением).

Плотности (2.21) соответствует функция распределения:

$$F(t) = \Phi\left(\frac{at-1}{v\sqrt{at}}\right) + \exp\left(\frac{2}{v^2}\right) \Phi\left(-\frac{at+1}{v\sqrt{at}}\right), \quad (2.22)$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$  – нормированное нормальное распределение.

### 2.1.6. Математическая модель отказов механических элементов (диффузионное монотонное распределение)

Для компонентов технических систем, содержащих электромеханические и механические элементы (контакты реле и разъемов, скользящие электрические контакты, подшипники, зубчатые передачи и др.), лимитирующими, как правило, работоспособность компонентов, являются механические процессы деградации (пластические деформации, развитие усталостных трещин, усталостное выкрашивание, механический износ и т.п.).

Процесс деградации механических объектов вследствие необратимости процессов разрушения (механического изнашивания, усталости, усталостного выкрашивания) принято рассматривать как процесс с монотонными реализациями (см. рис. 2.4). Выше принято аппроксимировать процесс деградации таких элементов марковским процессом диффузионного типа с монотонными реализациями.

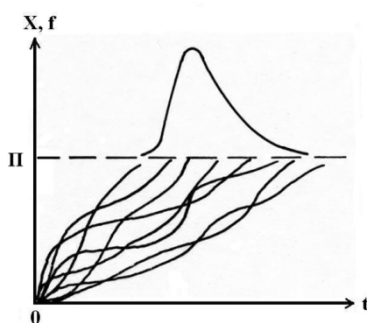


Рис. 2.4. Модель случайного процесса деградации (марковский монотонный процесс) и схема формирования распределения наработки до отказа (*DM*-распределение)

Следует заметить, что строгое определение диффузионных процессов не предусматривает строго монотонных реализаций. В то же время [11] к марковскому процессу диффузионного типа относят гауссовский непрерывный процесс с независимыми приращениями (именно такой процесс накопления повреждений наблюдается при механическом износе или усталостном разрушении). У такого процесса реализации могут иметь монотонный характер. Эффективность используемого

аппарата марковских процессов при достижении поставленной цели оправдывает незначительные допущения и некорректности.

Используя продемонстрированную в предыдущем пункте схему формализации, определяем закон распределения времени до отказа механических элементов. Аналогично предыдущему случаю рассмотрим процесс деградации механических элементов (совокупности идентичных образцов) в виде однородного процесса с постоянной средней скоростью и постоянным коэффициентом вариации скорости (или процесса), т.е. в качестве кинетического уравнения процесса деградации принимаем стохастическое дифференциальное уравнение (2.7). Условная переходная плотность  $\omega(t_0, x_0; t, x)$  процесса (2.7), как и ранее, является решением уравнения (2.8). Но в отличие от предыдущего случая граничные условия для необратимого монотонного процесса при решении (2.8) будут другими.

Если процесс деградации имеет монотонные реализации, то первое пересечение границы любой реализацией будет одновременно и последним, т.е. реализация в дальнейшем уже больше никогда и никак не будет влиять на наблюдаемый процесс. Это означает, что нет необходимости в установлении каких либо условий на границе заданной области. В связи с последним, в качестве граничных условий принимаются:

$$\omega(t, x) \Big|_{x=-\infty} = 0; \quad (2.23)$$

$$\omega(t, x) \Big|_{x=+\infty} = 0. \quad (2.24)$$

Границы (2.23) – (2.24) являются недостижимыми для изучаемого процесса и никак не влияют на процесс в заданной области. Это чисто формальные граничные условия, необходимые для решения уравнения (2.8).

В качестве начального условия используется (2.11). Аналогично без потери общности приняты нулевые начальные условия ( $x_0 = 0, t_0 = 0$ ).

Решение уравнения (2.8) с краевыми условиями (2.11), (2.23), (2.24) известно в литературе как фундаментальное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и записывается в виде:

$$\omega(t, x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi t}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x - at)^2}{2b^2 t} \right] \right\}. \quad (2.25)$$

Заметим, что полученная переходная плотность (2.25) является первым слагаемым условной переходной плотности немонотонного процесса (2.14). В таком случае, используя результаты предыдущего пункта, в частности, соотношение (2.17), можно сразу записать выражение для плотности распределения времени до первого отказа в следующем виде:

$$f(t) = \frac{1 + at}{2bt\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2b^2 t}\right]. \quad (2.26)$$

Используя соотношение (2.20), перепишем выражение для закона распределения до отказа механических объектов в таком виде:

$$f(t) = \frac{1 + at}{2vt\sqrt{2\pi at}} \exp\left[-\frac{(1-at)^2}{2v^2 at}\right]. \quad (2.27)$$

Принято диффузионное (*Diffusive*) распределение (2.27), соответствующее монотонному (*Monotonic*) марковскому процессу, называть *DM*-распределением (диффузионным монотонным распределением).

Плотности (2.27) соответствует функция распределения:

$$F(t) = \Phi\left(\frac{at-1}{v\sqrt{at}}\right). \quad (2.28)$$

## 2.2. Сравнительный анализ вероятностно-физических моделей отказов

Выше представлены четыре вида двухпараметрических вероятностно-физических моделей отказов (альфа-распределение, нормальное параметрическое, *DM*-распределение, *DN*-распределение), которые построены на основании анализа одного типа процесса деградации – стационарного изнашивания (разрушения) и имеют параметры с одинаковой физической интерпретацией. Но вследствие различных схем формализации выражения для законов распределения отказов, а также формальные свойства этих моделей существенно различаются. Представляет интерес сравнительная оценка упомянутых вероятностно-физических моделей отказов.

Как видно визуально, математические модели процессов деградации заметно отличаются (см. рис. 2.1-2.4), также существенно отличаются и аналитические выражения для законов распределения наработки до отказа (формулы (2.1), (2.4), (2.22) и (2.28)). Заметим, что параметр времени в знаменателе аргумента функции Лапласа этих выражений, который существенно влияет на вид распределения, имеет разную степень.

Необходимо отметить, что модели рассматриваемых процессов существенно различаются и с физической точки зрения. В частности, идеализированный случайный процесс (веерный) (см. рис. 2.1) свидетельствует о том, что его характеристики полностью определяются начальным состоянием (качеством изготовления образцов), и не зависят от механо-физико-химических процессов деградации, протекающих внутри объектов под действием внешних условий и времени. Противоположной в

определенном смысле является модель на рис. 2.2. Действительно, процесс с сильно «перемешанными» реализациями имеет быстро затухающую корреляционную функцию, т.е. практически не зависит от начального состояния. Скорость протекания процессов деградации каждого образца подвержена случайным колебаниям в процессе эксплуатации, обусловленным протекающими деградационными процессами, зависящими от свойств материала и внешних воздействий.

Марковские же модели (см. рис. 2.3-2.4) имеют как бы обобщающие физические свойства, частично присущие первой (рис. 2.1) и второй (рис. 2.2) моделям.

С формальной точки зрения, сопоставляемые вероятностно-физические модели отказов представляют собой двухпараметрические функции. Однако более простыми представляются модели (2.4), (2.22) и (2.28), которые имеют точные аналитические выражения для всех характеристик и моментов распределений. Моменты же альфа-распределения (2.1), как известно, определяются приближенными зависимостями, что намного усложняет его использование на практике.

Кривая плотности  $DM$ -распределения занимает промежуточное положение между симметричным нормальным распределением и более вытянутым альфа-распределением. Кривые плотностей  $DN$ -распределения и альфа-распределения имеют более значительный порог нечувствительности и положительный эксцесс (островершинность) и являются более асимметричными. Анализ этих кривых показывает, что сопоставляемые распределения имеют разные зоны высокой надежности. Это означает, что оценка квантилей малого уровня, т.е. назначение гамма-процентного ресурса, существенно зависит от выбранного типа модели отказов.

Чрезвычайно чувствительным и важным показателем, характеризующим поведение исследуемых объектов, является функция интенсивности отказов. Интенсивности отказов сопоставляемых моделей отказов также ведут себя по-разному. Исследуемые кривые интенсивностей отказов начинаются с нуля. Далее кривая интенсивности нормального распределения при  $t \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности, кривая интенсивности альфа-распределения уменьшается до нуля, а интенсивности отказов диффузионных распределений при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к константе, равной  $\frac{a}{2\nu^2}$ .

Таким образом, анализ основных кривых вероятностно-физических моделей отказов показывает, что сопоставляемые модели имеют существенно отличающиеся закономерности, определяющие количественные показатели надежности.

Необходимо отметить, что принимаемая идеализация процесса изменения определяющего параметра (процесса деградации) и вида его отдельных реализаций

является фундаментом, на котором строится по сути прогнозируемый процесс – распределение времени выхода определяющего параметра за предельный уровень. Адекватность математических моделей случайных процессов и реальных процессов деградации определяет адекватность прогнозируемого распределения (времени выхода из строя исследуемых объектов) реальному рассеиванию отказов генеральной совокупности. Установление адекватности гипотетической модели изучаемому реальному процессу представляет трудную задачу, когда сопоставляются случайные процессы. В данном случае адекватность вероятностно-физической модели отказов может быть оценена с двух сторон. Во-первых, изучением исходных идеальных и реальных процессов деградации и, во-вторых, сопоставлением прогнозируемого теоретического распределения и опытных данных отказов. Второй путь представляется более реальным и важным с практической точки зрения.

Визуальная оценка представленных на рис. 2.1-2.4 математических моделей поведения определяющего параметра в процессе эксплуатации, а также их физическая основа, отмеченная выше, указывает на то, что модели на рис. 2.3-2.4 ближе остальных к реальному процессу изменения определяющего параметра. Более глубокая проверка адекватности рассматриваемых моделей отказов проведена ниже путем выравнивания экспериментальных данных об отказах различных объектов.

### **2.2.1. Характеристики и моменты диффузионных распределений**

Необходимо заметить, что рассматриваемые диффузионные распределения имеют аналоги, давно известные в мировой печати, и распространенные под другими разными названиями. В частности,  $DN$ -распределение до констант совпадает с распределением, полученным физиками еще в 1915 году [30], которое известно в литературе как: обратное гауссовское, распределение Вальда, распределение Твиди, распределение времени первого достижения броуновским движением с положительным сносом, диффузионное распределение и др. Это распределение интенсивно исследовалось в работах отечественных авторов: Х.Б. Кордонского [13], Н.К. Салиниекса [1], М.М. Ларина [15], а также зарубежных авторов Е. Шродингера [30], М. Твиди [32], М. Вазана [33], А. Вальда [5], Р. Чихара и Дж. Фолкса [27], В.Паджета и Л.Вея [29], Р. Ченга и Н. Аминга [26] и многих других.

Распределение, до констант совпадающее с  $DM$ -распределением, в зарубежной литературе чаще всего называют распределением Бирнбаума-Саундерса [25]. В связи с последним заметим, что это распределение применительно к задачам надежности ранее

работы З. Бирнбаума и С. Саундерса [25] было предложено советским ученым В.Ф. Шукайло [23]. А еще ранее более чем на 30 лет это распределение появилось в работах советского математика С.Н. Бернштейна [3]. Некоторые авторы называют это распределение распределением Бернштейна [13]. Аналоги *DM*-распределения исследовались в работах отечественных авторов С.Н. Бернштейна [3], В.Ф. Шукайло [23], Х.Б. Кордонского [13], В.В. Болотина [4], а также зарубежных авторов З.Бирнбаума и С.Саундерса [25], Г.Батачария [24], В.Паджета [29], Ф.Райямакера [28] и др. Необходимо подчеркнуть, что упомянутые распределения известны и используются в мировой печати как строго вероятностные модели. И схемы их формализации имели другой, более общий характер [3, 13, 23, 25].

Для удобства исследований и работы в дальнейшем введем некоторые обозначения. Обозначим параметр масштаба рассматриваемых диффузионных распределений буквой  $\mu$ , значение которой равно обратной величине средней скорости процесса деградации  $\left(\mu = \frac{1}{a}\right)$ . Параметр формы  $\nu$ , как отмечалось выше, представляет собой коэффициент вариации процесса деградации (скорости деградации). Физический смысл этих параметров одинаков в обеих функциях распределений.

Запишем выражения для рассматриваемых законов, которые в дальнейшем будут использоваться.

Плотность *DN*-распределения:

$$f(t) = f_N(t, \mu, \nu) = \frac{\sqrt{\mu}}{\nu t \sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\nu^2 \mu t}\right]. \quad (2.29)$$

Плотности (2.29) соответствует интегральная функция *DN*-распределения:

$$F(t) = DN(t, \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\nu\sqrt{\mu t}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{t+\mu}{\nu\sqrt{\mu t}}\right). \quad (2.30)$$

Плотность *DM*-распределения:

$$f(t) = f_M(t, \mu, \nu) = \frac{(t+\mu)}{2\nu t \sqrt{2\pi \mu t}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\nu^2 \mu t}\right]. \quad (2.31)$$

Плотности (2.31) соответствует интегральная функция *DM*-распределения:

$$F(t) = DM(t, \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\nu\sqrt{\mu t}}\right). \quad (2.32)$$

Аналитические выражения для ряда характеристик распределений приведены в таблице 2.1.



Таблица 2.1. Характеристики диффузионных распределений

Характеристика, обозначение	<i>DN</i> -распределение	<i>DM</i> -распределение
Математическое ожидание, $M[T]$	$\mu$	$\mu \left(1 + \frac{\nu^2}{2}\right)$
Дисперсия, $D[T]$	$\mu^2 \nu^2$	$\mu^2 \nu^2 \left(1 + \frac{5\nu^2}{4}\right)$
Коэффициент вариации, $K_v[T]$	$\nu$	$\nu \frac{\sqrt{4+5\nu^2}}{(2+\nu^2)}$
Коэффициент асимметрии, $A_s[T]$	$3\nu$	$\frac{4\nu(6+11\nu^2)}{(4+5\nu^2)^{3/2}}$
Коэффициент эксцесса, $E_k[T]$	$15\nu^2$	$\frac{6\nu^2(40+93\nu^2)}{(4+5\nu^2)^2}$
Вероятность безотказной работы, $R(t)$	$\Phi\left(\frac{\mu-t}{\nu\sqrt{\mu t}}\right) - \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right) \Phi\left(-\frac{\mu+t}{\nu\sqrt{\mu t}}\right)$	$\Phi\left(\frac{\mu-t}{\nu\sqrt{\mu t}}\right)$
Интенсивность отказов, $\lambda(t)$	$\frac{(\nu t \sqrt{2\pi t})^{-1} \sqrt{\mu} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\nu^2 \mu t}\right]}{\Phi\left(\frac{\mu-t}{\nu\sqrt{\mu t}}\right) - \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right) \Phi\left(-\frac{\mu+t}{\nu\sqrt{\mu t}}\right)}$	$\frac{(t+\mu) \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\nu^2 \mu t}\right]}{2\nu t \sqrt{2\pi \mu t} \Phi\left(\frac{\mu-t}{\nu\sqrt{\mu t}}\right)}$
Характеристическая функция, $h(t)$	$\exp\left[\frac{1}{\nu^2} \left(1 - \sqrt{1+2i\nu^2 \mu t}\right)\right]$	$\frac{1 + \sqrt{1-2i\nu^2 \mu t}}{2\sqrt{1-2i\nu^2 \mu t}} \exp\left[\frac{1}{\nu^2} \left(1 - \sqrt{1+2i\nu^2 \mu t}\right)\right]$
Производящая функция моментов, $M(\tau)$	$\exp\left[\frac{1}{\nu^2} \left(1 - \sqrt{1+2\nu^2 \mu \tau}\right)\right]$	$\frac{1 + \sqrt{1-2\nu^2 \mu \tau}}{2\sqrt{1-2\nu^2 \mu \tau}} \exp\left[\frac{1}{\nu^2} \left(1 - \sqrt{1+2\nu^2 \mu \tau}\right)\right]$
Производящая функция семиинвариантов, $L(\tau)$	$\frac{1}{\nu^2} \left(1 - \sqrt{1+2\nu^2 \mu \tau}\right)$	$\frac{1}{\nu^2} \left(1 - \sqrt{1+2\nu^2 \mu \tau}\right) \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-2\nu^2 \mu \tau}}{2\sqrt{1-2\nu^2 \mu \tau}}\right)$

Как вытекает из выражений для коэффициентов вариации распределения наработки до отказа (ресурса), для *DN*-распределения коэффициент вариации наработки до отказа совпадает с коэффициентом вариации процесса деградации (скорости деградации)  $K_v[T] = \nu$ . В случае *DM*-распределения коэффициент вариации наработки до отказа совпадает с коэффициентом вариации процесса деградации при  $\nu = 1$ , с уменьшением  $\nu$  менее единицы или с увеличением более единицы коэффициент вариации распределения наработки до отказа несколько меньше коэффициента

вариации процесса деградации. При значениях  $\nu = 0,3, \dots, 1,3$  максимальное отклонение  $K_\nu[T]$  составляет порядка 4%. В практике измерения случайных величин это достаточно высокая точность.

Этот факт (совпадение коэффициентов вариации распределения наработки с коэффициентом вариации процесса деградации) имеет весьма важное прикладное значение, в частности открывает возможность оценки параметра формы диффузионных распределений на основании анализа статистических характеристик процессов деградации, приводящих к отказу.

В таблице 2.2 приведены начальные моменты ( $\alpha_r$ ) до четвертого порядка ( $r = 1, 2, 3, 4$ ), определяемые из соотношения:

$$\alpha_r = \frac{d^r}{d\tau^r} M(\tau) \Big|_{\tau=0}. \quad (2.33)$$

Таблица 2.2. Начальные моменты диффузионных распределений

Начальный момент	<i>DN</i> -распределение	<i>DM</i> -распределение
$\alpha_1$	$\mu$	$\mu \left( 1 + \frac{\nu^2}{2} \right)$
$\alpha_2$	$\mu^2 (1 + \nu^2)$	$\mu^2 \left( 1 + 2\nu^2 + \frac{3\nu^4}{2} \right)$
$\alpha_3$	$\mu^3 (1 + 3\nu^2 + 3\nu^4)$	$\mu^3 \left( 1 + \frac{9\nu^2}{2} + 9\nu^4 + \frac{15\nu^6}{2} \right)$
$\alpha_4$	$\mu^4 (1 + 6\nu^2 + 15\nu^4 + 15\nu^6)$	$\mu^4 \left( 1 + 8\nu^2 + 30\nu^4 + 60\nu^6 + \frac{105\nu^8}{2} \right)$

Начальные моменты *DN*-распределения могут быть вычислены до любого порядка по следующей формуле:

$$\alpha_r = \mu^r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(r-1+i)! \nu^{2i}}{i!(r-1-i)! 2^i}. \quad (2.34)$$

Установлена рекуррентная зависимость между начальными моментами *DN*-распределения:

$$\alpha_r = \mu \nu^2 (2r-3) \alpha_{r-1} + \mu^2 \alpha_{r-2}, \quad (2.35)$$

где  $\alpha_0 = 1$ .

Как видно из выражений (2.29) и (2.31), плотности исследуемых диффузионных распределений имеют следующую связь:

$$f_M(t, \mu, \nu) = \frac{\mu + t}{2\mu} f_N(t, \mu, \nu) = \frac{1}{2} f_N(t, \mu, \nu) + \frac{t}{2\mu} f_N(t, \mu, \nu). \quad (2.36)$$

Из последнего выражения устанавливается связь между начальными моментами этих распределений. Обозначим моменты  $DM$ -распределения со звездочкой, тогда можно записать:

$$\alpha_r^* = \frac{\alpha_r}{2} + \frac{\alpha_{r+1}}{2\mu}. \quad (2.37)$$

Теперь, используя соотношения (2.35) и (2.37), можно получить рекуррентную формулу для вычисления начальных моментов  $DM$ -распределения:

$$\alpha_{r+1}^* = \frac{\alpha_r^* \mu \{v^2(4r^2 - 1) - 2\} + \alpha_{r+1}^* \mu^2 (2r+1)}{(2r-1)}. \quad (2.38)$$

В таблице 2.3 приведены семиинварианты (кумулянты)  $\theta_r$ , определяемые из соотношения:

$$\theta_r = \frac{d^r}{d\tau^r} L(\tau) \Big|_{\tau=0}. \quad (2.39)$$

Таблица 2.3. Семиинварианты диффузионных распределений

Семиинвариант	$DN$ -распределение	$DM$ -распределение
$\theta_1$	$\mu$	$\mu \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)$
$\theta_2$	$\mu^2 v^2$	$\mu^2 v^2 \left(1 + \frac{5v^2}{4}\right)$
$\theta_3$	$3 \mu^3 v^4$	$3 \mu^3 v^4 \left(1 + \frac{11v^2}{6}\right)$
$\theta_4$	$15 \mu^4 v^6$	$15 \mu^4 v^6 \left(1 + \frac{93v^2}{40}\right)$

Формула для определения семиинвариантов любого порядка, выше первого, для  $DN$ -распределения имеет вид:

$$\theta_r = \frac{(2r-3)!}{2^{r-2}(r-2)!} \mu^r v^{2(r-1)}. \quad (2.40)$$

Фишеровские коэффициенты или нормированные кумулянты для  $DN$ -распределения можно вычислить по формуле:

$$\gamma_r = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r+1)v^r. \quad (2.41)$$

В частности, из последнего выражения просто вычисляются коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$A_s[T] = \gamma_1 = 3v; \quad E_k[T] = \gamma_2 = 3 \cdot 5 v^2 = 15v^2.$$

В таблице 2.4 приведены центральные моменты  $\eta_r$ , определяемые соотношением:

$$\eta_r = M[x - M[x]]^r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[x])^r dF(x). \quad (2.42)$$

Таблица 2.4. Центральные моменты диффузионных распределений

Центральный момент	<i>DN</i> -распределение	<i>DM</i> -распределение
$\eta_1$	$\mu$	$\mu \left( 1 + \frac{v^2}{2} \right)$
$\eta_2$	$\mu^2 v^2$	$\mu^2 v^2 \left( 1 + \frac{5v^2}{4} \right)$
$\eta_3$	$3\mu^3 v^4$	$3\mu^3 v^4 \left( 1 + \frac{11v^2}{6} \right)$
$\eta_4$	$3\mu^4 v^4 (1 + 5v^2)$	$3\mu^4 v^4 \left( 1 + \frac{15v^2}{2} + \frac{211v^4}{16} \right)$

Используя известные соотношения между начальными и центральными моментами, между начальными моментами и семиинвариантами, а также соотношения (2.34)-(2.41) можно просто определить любой момент для обоих диффузионных распределений через их параметры  $(\mu, v)$ .

Между положительными и отрицательными начальными моментами существует определенная связь [27]:

$$M[(x/\mu)^{-r}] = M[(x/\mu)^{r+1}].$$

Таким образом, можно определить отрицательные моменты, т.е. начальные моменты распределения случайной величины  $y$ , обратной случайной величине  $x$ , имеющей, например, *DN*-распределение. Плотность вероятностей распределения  $y$  может быть записана в следующем виде:

$$f(y, \mu, \nu) = \frac{\sqrt{\mu}}{\nu \sqrt{2\pi y}} \exp\left[-\frac{(1-\mu y)^2}{2\nu^2 \mu y}\right]. \quad (2.43)$$

Начальные моменты  $\alpha'_r$  для закона распределения (2.43) могут быть вычислены по формуле:

$$\alpha'_r = \mu^{-r} \sum_{i=0}^r \frac{(r+i)! \nu^{2i}}{i! (r-i)! 2^i}. \quad (2.44)$$

В частности:

$$\alpha'_1 = \frac{1}{\mu}(1+\nu^2);$$

$$\alpha'_2 = \frac{1}{\mu^2}(1+3\nu^2+3\nu^4);$$

$$\alpha'_3 = \frac{1}{\mu^3}(1+6\nu^2+15\nu^4+15\nu^6);$$

$$\alpha'_4 = \frac{1}{\mu^4}(1+10\nu^2+45\nu^4+105\nu^6+105\nu^8).$$

Для случайной величины  $y$ , обратной случайной величине  $x$ , имеющей *DM*-распределение, вид закона распределения сохраняется с точностью до констант:

$$f(y, \mu, \nu) = f_M(y, \frac{1}{\mu}, \nu) = \frac{(1+\mu y)}{2\nu y \sqrt{2\pi \mu y}} \exp\left[-\frac{(1-\mu y)^2}{2\nu^2 \mu y}\right]. \quad (2.45)$$

Поэтому для оценки начальных моментов распределения (2.45) используются выражения для начальных моментов *DM*-распределения (с заменой параметра масштаба  $\mu$  на  $\frac{1}{\mu}$ ).

Диффузионные распределения унимодальны. *DN*-распределение имеет моду:

$$T_{\text{mod}}^N = \mu \left( \sqrt{1 + \frac{9\nu^4}{4}} - \frac{3\nu^2}{2} \right). \quad (2.46)$$

Отношение  $\frac{T_{\text{mod}}^N}{\mu}$  стремится к единице, когда коэффициент вариации уменьшается

до нуля, а при увеличении коэффициента вариации это отношение стремится к  $\frac{1}{3}$ . Мода

плотности *DN*-распределения при фиксированном параметре  $\mu$  наименьшая, когда

$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Мода наступает, когда  $t = \frac{\mu}{2}$  и плотность имеет значение  $\left(\frac{8}{\pi \mu^2 e}\right)^{1/2} = \frac{0,968}{\mu}$ .

*DM*-распределение имеет более сложное выражение для моды:

$$T_{\text{mod}}^M = \frac{2}{3} \mu \left[ 1 + \frac{3\nu^2}{4} + \frac{21\nu^4}{16} - \frac{\nu^6}{8} + \frac{3\nu}{2} \left( 3 - 3\nu^2 + \frac{69\nu^4}{16} - \frac{27\nu^6}{16} \right)^{1/2} \right]^{1/3} +$$

$$+ \frac{2}{3} \mu \left[ 1 + \frac{3\nu^2}{4} + \frac{21\nu^4}{16} - \frac{\nu^6}{8} - \frac{3\nu}{2} \left( 3 - 3\nu^2 + \frac{69\nu^4}{16} - \frac{27\nu^6}{16} \right)^{1/2} \right]^{1/3} - \frac{\mu(1+\nu)}{3} \quad (2.47)$$

На основании последнего выражения можно также установить некоторые закономерности. Отношение  $\frac{T_{\text{mod}}^M}{\mu}$  *DM*-распределения стремится также к единице, когда коэффициент вариации уменьшается до нуля. И, аналогично *DN*-распределению, при увеличении коэффициента вариации это соотношение стремится к  $\frac{1}{3}$ . Мода *DM*-распределения при одинаковых значениях параметров ( $\mu$  и  $\nu$ ) находится несколько правее моды *DN*-распределения.

Медиана *DM*-распределения совпадает со значением параметра масштаба  $T_{\text{med}}^M = \mu$ , а медиана *DN*-распределения при одинаковых значениях параметров ( $\mu$  и  $\nu$ ) находится несколько левее ( $T_{\text{med}}^N < T_{\text{med}}^M$ ).

Рисунки 2.5-2.8 иллюстрируют характер зависимостей основных показателей надежности ( $F, f, \lambda, \pi$ ) для различных значений параметров диффузионных распределений.

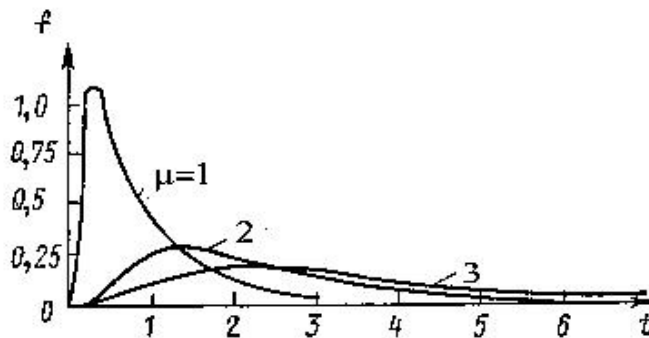


Рис. 2.5. Зависимость плотности *DN*-распределения от параметра масштаба  $\mu$  при  $\nu = 1$

Анализируя основные характеристики, приведенные на рисунках, а также аналитические выражения для моментов распределений (табл. 2.1), можно отметить следующее. Асимметрия и эксцесс исследуемых распределений положительны, математическое ожидание смещено вправо относительно медианы, т.е. плотности

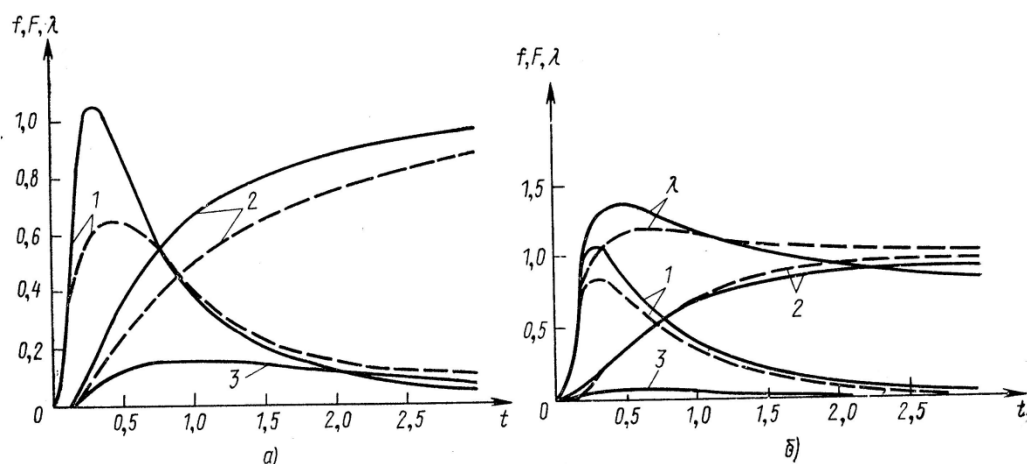


Рис. 2.6. Графики плотностей (1), функций (2) и их расхождений (3) *DM*- (штриховые линии) и *DN*-распределений: *a* – оценки параметров на основе анализа процесса деградации; *б* – оценки параметров на основе статистики отказов

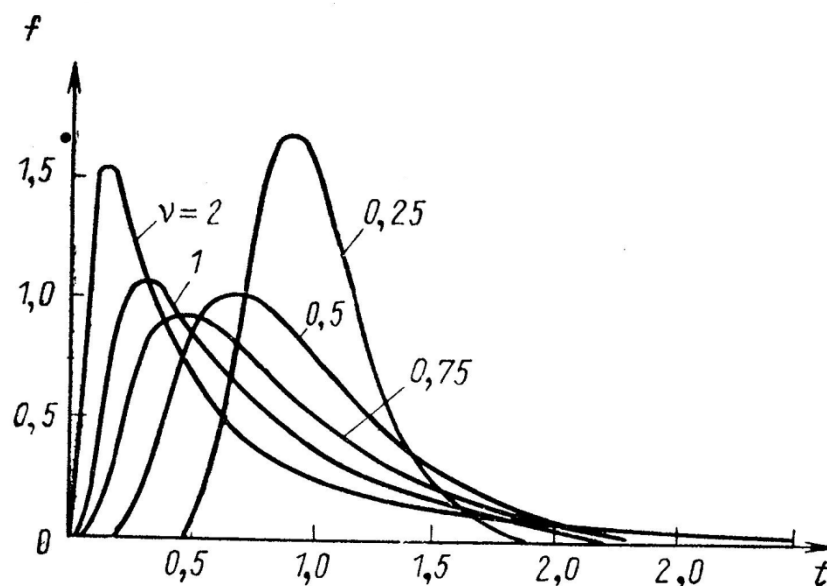
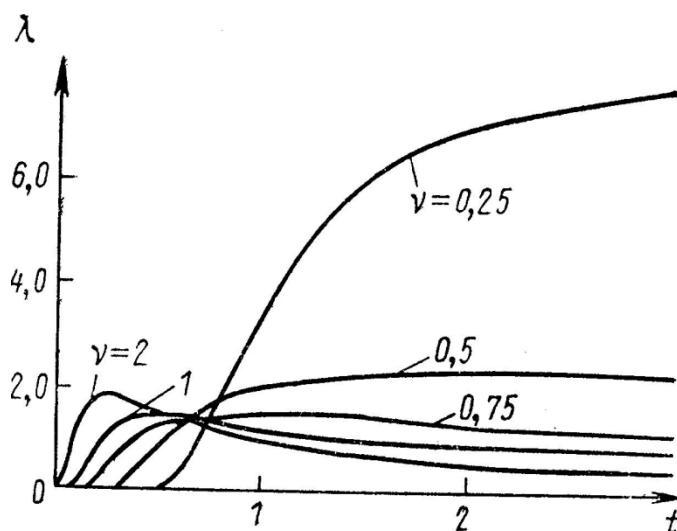


Рис. 2.7. Зависимость плотности *DN*-распределения от параметра формы  $\nu$  при  $\mu = 1$

диффузионных распределений являются асимметричными одномодальными кривыми с более вытянутыми правыми ветвями.

При фиксированном параметре формы (коэффициенте вариации  $\nu$ ) с увеличением параметра масштаба ( $\mu$ ), т.е. по мере смещения распределения вправо (рис. 2.5) по

временной оси оно «деформируется» таким образом, что дисперсия увеличивается, а коэффициенты асимметрии и эксцесса остаются постоянными. Это очень интересное свойство, характеризующее универсальность диффузионных распределений, их устойчивость к изменению скорости деградации при обеспечении автоточности процесса. Это свойство можно эффективно использовать в задачах форсированных испытаний.



2.8. Зависимость интенсивности отказов  $DN$ -распределения от параметра формы  $\nu$  при  $\mu = 1$

Сравнивая соответствующие кривые диффузионных распределений между собой, можно отметить следующее. Если параметры распределений оценены на основе изучения процесса деградации (рис. 2.6, а), то кривая  $DN$ -распределения обладает более крутым левым фронтом. Это означает, что оценки показателей надежности, полученные на основе  $DN$ -распределения, имеют коэффициент запаса надежности больший, чем при использовании  $DM$ -распределения. На рис. 2.6, а (кривая 3) показано изменение значения второго слагаемого функции  $DN$ -распределения, которое определяет величину расхождения функций  $DM$ - и  $DN$ -распределений, т.е. увеличение вероятности отказа в связи с немонотонным характером реализаций процесса деградации. Однако, если параметры распределений ( $DM$ - и  $DN$ -распределений) оценены на основе одной и той же статистики отказов (рис. 2.6, б), расхождение показателей становится малоразличимым.

На рис. 2.7 и рис. 2.8 показано изменение плотности и интенсивности отказов при изменении параметра формы  $\nu$ . Разнообразие форм кривых  $f(t)$  и  $\lambda(t)$  свидетельствует об универсальном характере диффузионных распределений. Несмотря на заметно асимметричный вид, рассматриваемые диффузионные распределения



асимптотически сходятся к нормальному распределению (при  $v^2 \rightarrow 0$ ) со средним значением  $\mu$  и дисперсией  $v^2 \mu^2$  [27].

Следует особо остановиться на важной характеристике распределений – интенсивности отказов. Вид функции  $\lambda(t)$  применяемого распределения играет большую роль при решении ряда задач надежности. Особенно весомым показателем  $\lambda(t)$  представляется в качестве обобщенной характеристики распределения при выборе теоретической функции распределения.

Исследуем поведение интенсивностей диффузионных распределений. Кривые интенсивностей  $DM$ -распределения  $\lambda_M(t)$  и  $DN$ -распределения  $\lambda_N(t)$  начинаются с нуля, т.е.  $\lambda_M(0) = \lambda_N(0) = 0$ . Определим поведение интенсивностей при  $t \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_M(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_M(t)}{1 - DM(t, \mu, v)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial \ln f_M(t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{2 \mu v^2}. \quad (2.48)$$

Аналогично получаем (при  $t \rightarrow \infty$ )  $\lim \lambda_N(t) = \frac{1}{2 \mu v^2}$ .

Таким образом, функции интенсивностей диффузионных распределений имеют конечный ненулевой предел.

Покажем, что  $\lambda_M(t)$  и  $\lambda_N(t)$  являются немонотонными функциями. Немонотонность исследуемых интенсивностей доказывается от противного.

Предположим, что  $\lambda_M(t)$  монотонно возрастает, т.е.  $\frac{d[\lambda_M(t)]}{dt} \geq 0$ . Выразим

производную от интенсивности через интенсивность следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d[\lambda_M(t)]}{dt} &= \frac{\frac{d[f_M(t)]}{dt} [1 - DM(t, \mu, v)] + [f_M(t)]^2}{[1 - DM(t, \mu, v)]^2} = \lambda_M(t) \left[ \lambda_M(t) + \frac{d \ln f_M(t)}{dt} \right] = \\ &= \lambda_M(t) \left[ \lambda_M(t) - \frac{1}{2 \mu v^2} + \frac{\mu^2 + \mu t(1 - 3v^2) - v^2 t}{2 v^2 t(\mu + t)} \right]. \end{aligned}$$

С учетом условия  $\lambda_M(t) \leq \frac{1}{2 \mu v^2}$  получаем неравенство:

$$\frac{d[\lambda_M(t)]}{dt} \leq \lambda_M(t) \left[ \frac{\mu^2 + \mu t(1 - 3v^2) - v^2 t}{2 v^2 t(\mu + t)} \right].$$

Числитель правой части последнего неравенства представляет собой квадратное уравнение, которое, как видно, имеет два действительных корня: один положительный, второй отрицательный. Это означает, что при

$$t \geq \left( \frac{1 - 3v^2 + \sqrt{(1 - 3v^2)^2 + 4v^2}}{2v\sqrt{\mu}} \right)$$

последнее неравенство противоречит исходному условию – неотрицательности производной от интенсивности. Следовательно, предположение о монотонности неверно. Аналогично показывается немонотонность интенсивности  $\lambda_N(t)$ .

Таким образом, интенсивности отказов диффузионных распределений представляют собой немонотонные функции, начинающиеся с нуля и имеющие конечное установившееся значение, равное  $\frac{1}{2\mu v^2}$ . Типичный вид этих кривых для разных значений параметра формы  $v$  показан на рис. 2.8. При выбранном масштабе рис. 2.8 немонотонность  $\lambda(t)$  при малых  $v$  показать не удается. Но аналитически выше доказано, что она есть при любом  $v$ .

### 2.2.2. Формальные статистические свойства диффузионных распределений

Наличие двух параметров в функции распределения, используемой в качестве теоретической модели надежности, представляется вполне достаточным для удовлетворительного согласования с экспериментальными данными. Следует отметить, что, как правило, двухпараметрические модели приводят к усложнению задач получения статистических выводов. В связи с этим стоит подчеркнуть, что двухпараметрические диффузионные распределения обладают рядом свойств, выделяющих их в лучшую сторону по сравнению с аналогичными двухпараметрическими функциями типа гамма-распределение, Вейбулла, логнормальное и др. Ниже рассматриваются основные свойства диффузионных распределений, сформулированные в виде теорем, лемм и следствий.

**Теорема 2.1.** Если случайная величина  $T$  описывается  $DN$ -распределением вида  $DN(t, \mu, v)$ , то случайная величина  $x = cT$  ( $c = Const$ ) также описывается  $DN$ -распределением вида  $DN(x; c\mu, v)$ .

**Доказательство** теоремы осуществляется простой заменой случайной величины  $t = \frac{x}{c}$  в выражении закона распределения.

**Лемма 2.1.** Если случайная величина  $T$  подчиняется  $DN$ -распределению вида  $DN(t, \mu, \nu)$ , то случайная величина  $\theta = \frac{T}{\mu}$  описывается  $DN$ -распределением вида  $DN(\theta; 1, \nu)$ .

**Теорема 2.2.** Если  $T_1, T_2, \dots, T_n$  независимые случайные величины, подчиняющиеся  $DN$ -распределению вида  $DN(t; \mu_i, \nu_i)$ , то статистика  $T = \sum_{i=1}^n T_i$  при условии  $\mu_i \nu_i^2 = Const$ , также описывается  $DN$ -распределением вида  $DN\left(T; \sum_{i=1}^n \mu_i, \left(\sum_{i=1}^n \nu_i^{-2}\right)^{-1/2}\right)$ .

**Доказательство.** Характеристическая функция случайной величины, имеющей  $DN$ -распределение, записывается в следующем виде:

$$h(\tau) = \exp\left[\frac{1}{\nu^2}\left(1 - \sqrt{1 - 2i\mu\nu^2\tau}\right)\right].$$

Следовательно, характеристическая функция суммы  $n$  случайных величин данного типа будет иметь вид:

$$H(\tau) = \prod_{i=1}^n h_i(\tau) = \exp\left[\sum_{i=1}^n \nu_i^{-2}\left(1 - \sqrt{1 - 2i\mu_i\nu_i^2\tau}\right)\right].$$

Из сравнения  $h(\tau)$  и  $H(\tau)$  вытекает, что  $H(\tau)$  является характеристической функцией случайной величины, имеющей  $DN$ -распределение с параметром масштаба  $\sum_{i=1}^n \mu_i$  и параметром формы  $\left(\sum_{i=1}^n \nu_i^{-2}\right)^{-1/2}$ .

**Следствие 2.1.** Сумма  $n$  случайных величин, подчиняющихся распределению вида  $DN(t, \mu, \nu)$ , описывается  $DN$ -распределением вида  $DN\left(T; n\mu, \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$ .

**Следствие 2.2.** Сумма  $n$  случайных величин, подчиняющихся распределению вида  $DN(t, \mu, \nu_i)$ , описывается  $DN$ -распределением вида  $DN\left(T; n\mu, \left(\sum_{i=1}^n \nu_i^{-2}\right)^{-1/2}\right)$ .

**Следствие 2.3.** Сумма  $n$  случайных величин, подчиняющихся распределению вида  $DN(t, \mu_i, \nu)$ , описывается  $DN$ -распределением вида  $DN\left(T; \sum_{i=1}^n \mu_i, \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$ .

**Лемма 2.2.** Если статистики  $\sum_{i=1}^n t_i$  и  $\sum_{i=1}^m \tau_i$  подчиняются  $DN$ -распределениям вида  $DN\left(T; n\mu, \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$  и  $DN\left(T; m\mu, \frac{\nu}{\sqrt{m}}\right)$ , то статистика  $T = \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^m \tau_i$  описывается  $DN$ -распределением вида  $DN\left(T; (n+m)\mu, \frac{\nu}{\sqrt{n+m}}\right)$ .

**Теорема 2.3.** Если  $t_1, t_2, \dots, t_n$  случайные величины, подчиняющиеся  $DN$ -распределению вида  $DN(t; \mu, \nu)$ , то выборочное среднее  $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ , также описывается  $DN$ -распределением вида  $DN\left(t; \mu, \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$ .

**Доказательство.** Используя теорему 2.1 и следствие 2.1, получаем искомое выражение.

**Теорема 2.4.** Если  $t_1, t_2, \dots, t_n$  случайные величины, подчиняющиеся  $DN$ -распределению вида  $DN(t; \mu, \nu)$ , тогда статистика  $U^2 = \frac{n(S - \mu)^2}{\mu \nu^2 S}$  имеет  $\chi^2$ -распределение с одной степенью свободы.

**Доказательство.** Д. Шустер [31] показал, что удвоенный показатель экспоненты, взятый с обратным знаком, является  $\chi^2$ -величиной с одной степенью свободы, т.е.

$$\frac{n(S - \mu)^2}{\mu \nu^2 S} \approx \chi^2(1).$$

**Теорема 2.5.** Если  $t_1, t_2, \dots, t_n$  случайные величины, подчиняющиеся  $DN$ -распределению вида  $DN(t; \mu, \nu)$ , тогда статистика  $W = \frac{\sqrt{n}(S - \mu)}{\mu \sqrt{VS}}$  описывается законом распределения с плотностью

$$f(W; \mu, \nu, n) = [1 - R(W; \mu, \nu, n)] f_t(n-1),$$

где  $f_t(n-1)$  – плотность функции распределения Стьюдента с  $(n-1)$  степенями свободы;

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i; \quad V = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{t_i} - \frac{1}{S} \right); \quad R(W; \mu, \nu, n) = \frac{W}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{y^{(n-1)/2} \exp(-y)}{\left[ \frac{2n}{\nu^2} (n-1 + W^2) + W^2 y \right]} dy.$$

**Доказательство.** Авторами [27] показано, что статистики  $S$  и  $V$  независимы.

Тогда, при условии, что  $S \approx DN\left(S; \mu, \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$  и  $\frac{\mu V}{\nu^2} \approx F(n-1)$ , получают выражение для искомой плотности.

**Теорема 2.6.** Если  $t_1, t_2, \dots, t_n$  случайные величины, подчиняющиеся  $DN$ -распределению вида  $DN(t; \mu, \nu)$ , и статистики  $S \approx DN\left(S; \mu, \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$ ,  $\frac{\mu V}{\nu^2} \approx \chi^2(n-1)$ ,

тогда статистика  $F = W^2 = \frac{n(n-1)(S-\mu)^2}{\mu^2 SV}$  имеет закон распределения типа  $F$ -распределение с одной и  $(n-1)$  степенями свободы.

**Доказательство.** Д. Шустер [31] показал, что  $\frac{n(S-\mu)^2}{\nu^2 \mu S} \approx \chi^2(1)$ . Статистика

$\frac{\mu V}{\nu^2} \approx f_t(n-1)$ , т.е. имеет распределение Стьюдента с  $(n-1)$  степенями свободы.

Следовательно,  $F = \frac{\chi^2(1)}{f_t(n-1)} \approx F_{1, n-1}$ .

**Теорема 2.7.** Если имеются две независимые выборки  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  случайных величин с  $DN$ -распределением вида  $DN(t; \mu_i, \nu_i)$  и пусть

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i; \quad S_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_i; \quad V_1 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{t_i} - \frac{1}{S_1} \right); \quad V_2 = \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{S_2} \right) \quad \text{такие, что}$$

$$S_1 \approx DN\left(t; \mu, \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right); \quad S_2 \approx DN\left(t; \mu, \frac{\nu}{\sqrt{m}}\right); \quad \frac{\mu V_1}{\nu^2} \approx \chi^2(n-1); \quad \frac{\mu V_2}{\nu^2} \approx \chi^2(m-1), \text{ тогда}$$

статистика  $Y = \frac{(S_1 + S_2) \sqrt{nm(n+m-2)}}{\sqrt{S_1 S_2 (nS_1 + mS_2) (V_1 + V_2)}}$  имеет распределение

$f(Y; \mu, \nu, n, m) = [1 - B(Y; \mu, \nu)] f_t(n+m-2)$ , где  $B(Y; \mu, \nu)$  – некоторая нечетная функция по  $Y$ ;  $f_t(n+m-2)$  – плотность распределения Стьюдента с  $(n+m-2)$  степенями свободы.

**Доказательство** осуществляется подстановкой и преобразованием переменных [27].

**Теорема 2.8.** Если случайная величина  $T$  описывается  $DN$ -распределением вида  $DN(t; \mu, \nu)$ , то при фиксированном параметре  $\mu$  с уменьшением параметра  $\nu \rightarrow 0$

распределение сходится к нормальному распределению  $N(t; a, \sigma)$  с параметрами  $a = \mu$  и  $\sigma^2 = \mu^2 \nu^2$ .

**Теорема 2.9.** Если случайная величина  $T$  описывается  $DM$ -распределением вида  $DM(t, \mu, \nu)$ , то случайная величина  $x = cT$  ( $c = const$ ) также описывается  $DM$ -распределением вида  $DM(x, c\mu, \nu)$ .

**Доказательство** теоремы осуществляется простой заменой случайной величины  $t = \frac{x}{c}$  в выражении закона распределения.

**Лемма 2.3.** Если случайная величина  $T$  описывается  $DM$ -распределением вида  $DM(t, \mu, \nu)$ , тогда случайная величина  $\theta = \frac{T}{\mu \left(1 + \frac{\nu^2}{2}\right)}$  также описывается  $DM$ -

распределением вида  $DM\left(\theta; \frac{1}{1 + \frac{\nu^2}{2}}, \nu\right)$ . При этом  $M[\theta] = 1$ .

**Теорема 2.10.** Если случайная величина  $T$  описывается  $DM$ -распределением вида  $DM(t, \mu, \nu)$ , тогда случайная величина  $\theta = \frac{1}{T}$  также описывается  $DM$ -распределением вида  $DM\left(\theta; \frac{1}{\mu}, \nu\right)$ .

**Доказательство** осуществляется непосредственной заменой переменных.

**Теорема 2.11.** Если  $U$  есть стандартная нормально распределенная величина, тогда случайная величина  $T = \left(1 + \frac{\nu^2 U^2}{2} + \nu U \sqrt{1 + \frac{\nu^2 U^2}{4}}\right)$  имеет  $DM$ -распределение вида  $DM(t, 1, \nu)$ .

**Доказательство.** Из определения функции имеем:

$$DM(t, 1, \nu) = \Phi\left(\frac{t-1}{\nu\sqrt{t}}\right) = \Phi(U); U = \frac{t-1}{\nu\sqrt{t}}; t^2 - t(2 + \nu^2 U^2) + 1 = 0.$$

Следовательно, корни последнего уравнения:  $t_{1,2} = \left(1 + \frac{\nu^2 U^2}{2}\right) \pm \nu U \sqrt{1 + \frac{\nu^2 U^2}{4}}$ .

Единственным (положительным) решением является

$$t = \left(1 + \frac{\nu^2 U^2}{2}\right) + \nu U \sqrt{1 + \frac{\nu^2 U^2}{4}}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

## 2.3. Параметризация диффузионных распределений

### 2.3.1. Оценивание параметров на основе статистических данных об отказах при полной выборке

Основным вопросом, возникающим при обработке опытных данных, является оценка параметров распределения. Диффузионные распределения, как вероятностно-физические модели, выгодно отличаются от строго вероятностных моделей тем, что их параметры могут быть вычислены как на основе статистики отказов, так и на основе статистических характеристик процессов деградации, а также путем совместного использования обоих типов информации.

Рассмотрим вначале оценки параметров диффузионных распределений на основе статистики отказов. Наиболее распространенным и эффективным с теоретической точки зрения методом определения выборочной оценки параметров распределения является метод наибольшего правдоподобия. Данный метод, как известно, обладает важными достоинствами: он всегда приводит к состоятельным оценкам, имеющим наименьшую возможную дисперсию и наилучшим образом использующим всю информацию о неизвестном параметре, содержащуюся в выборке. Опуская промежуточные несложные вычисления, запишем выражения для максимально правдоподобных оценок параметров диффузионных распределений.

Максимально правдоподобные оценки параметров распределений при плане полных испытаний (план [NUN]):

- максимально правдоподобные оценки параметров  $DN$ -распределения:

$$\check{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i; \quad (2.49)$$

$$\check{\nu} = \sqrt{\check{\mu}} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} - N \left( \sum_{i=1}^N t_i \right)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (2.50)$$

- максимально правдоподобные оценки параметров  $DM$ -распределения:

$$\hat{\mu} = N \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} \right)^{-1} + \frac{N}{2} \left[ \sum_{i=1}^N (\hat{\mu} + t_i)^{-1} \right]^{-1} - \left\{ \frac{N^2}{4} \left[ \sum_{i=1}^N (\hat{\mu} + t_i)^{-1} \right]^{-2} - N \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i - N \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} \right)^{-1} \right] \right\}^{1/2}; \quad (2.51)$$

$$\hat{\nu} = \left( \frac{1}{\hat{\mu}} \sum_{i=1}^N t_i + \frac{\hat{\mu}}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i} - 2 \right)^{1/2}. \quad (2.52)$$

Иногда удобно пользоваться моментными оценками параметров, которые вычисляются в результате приравнивания оценок выборочных моментов с соответствующими теоретическими моментами диффузионных распределений. Как показывает практика, при достаточно большом  $N$  (более 100) моментные и максимально правдоподобные оценки параметров диффузионных распределений практически совпадают.

Моментные оценки параметров  $DN$ -распределения:

$$\bar{\mu} = S; \quad (2.53)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\sqrt{D}}{S}, \quad (2.54)$$

где обозначено:  $S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$  – выборочное среднее;  $D = \frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - S)^2$  – выборочная дисперсия.

Моментные оценки параметров  $DM$ -распределения:

$$\bar{\mu} = \frac{5S^2 - D}{4S + \sqrt{S^2 + 3D}}; \quad (2.55)$$

$$\bar{\nu} = \left[ \frac{2(S\sqrt{S^2 + 3D} + D - S^2)}{5S^2 - D} \right]^{1/2}. \quad (2.56)$$

### 2.3.2. Оценивание параметров на основе статистических данных об отказах при усеченной выборке

Максимально правдоподобные оценки параметров диффузионных распределений в случаях усеченных испытаний (в общем случае для многократно цензурированной выборки) получают из выражения:

$$L = \prod_{i=1}^r f(t_i) \prod_{j=1}^{N-r} [1 - F(\tau_j)], \quad (2.57)$$

где  $t_1, t_2, \dots, t_r$  – наработки до отказа;  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-r}$  – наработки не отказавших образцов ( $N$  – число образцов, поставленных на испытание);  $f(t), F(t)$  – плотность вероятностей и функция распределения.

В случае  $DN$ -распределения, произведя соответствующие преобразования, получаем следующую систему уравнений для оценки параметров:



$$\left\{ \begin{array}{l} v^2 + \frac{m'_1}{\mu} - \mu m'_{-1} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{N-r} \left[ \frac{v^2 DN(\tau_j; \mu, \nu) + \frac{\mu'_{1j}}{\mu} - \mu \mu'_{-1j}}{1 - DN(\tau_j; \mu, \nu)} \right] = 0; \\ 2 + v^2 - \frac{m'_1}{\mu} - \mu m'_{-1} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{N-r} \left[ \frac{(2 + v^2) DN(\tau_j; \mu, \nu) - \mu \mu'_{-1j} - \frac{\mu'_{1j}}{\mu}}{1 - DN(\tau_j; \mu, \nu)} \right] = 0, \end{array} \right. \quad (2.58)$$

где  $m'_1 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r t_i$ ;  $m'_{-1} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{1}{t_i}$ ;  $\mu'_{1j} = \int_0^{t_j} t f_N(t) dt$ ;  $\mu'_{-1j} = \int_0^{t_j} \frac{1}{t} f_N(t) dt$ ;

$f_N(t)$  – плотность  $DN$ -распределения;  $DN(\tau_j; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{\tau_j - \mu}{\nu \sqrt{\mu \tau_j}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right) \Phi\left(-\frac{\tau_j + \mu}{\nu \sqrt{\mu \tau_j}}\right)$ .

При использовании  $DM$ -распределения аналогично получаем следующую систему уравнений для определения максимально правдоподобных оценок в условиях многократно цензурированной выборки:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2 - 2v^2 \mu K_r - \frac{m'_1}{\mu} + \mu m'_{-1} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{N-r} \left[ \frac{-\frac{v^2}{2} DN(\tau_j; \mu, \nu) + \frac{v^2 \mu'_{1j}}{2\mu} + \mu \mu''_{-1j} - \frac{\mu''_{1j}}{\mu}}{1 - DM(\tau_j; \mu, \nu)} \right] = 0; \\ 2 + v^2 - \frac{m'_1}{\mu} - \mu m'_{-1} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{N-r} \left[ \frac{(2 + v^2) DM(\tau_j; \mu, \nu) - \mu \mu''_{-1j} - \frac{\mu''_{1j}}{\mu}}{1 - DM(\tau_j; \mu, \nu)} \right] = 0, \end{array} \right. \quad (2.59)$$

где  $m'_1$ ,  $m'_{-1}$ ,  $\mu'_{1j}$ ,  $DN(\tau_j; \mu, \nu)$  – прежние обозначения;  $K_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{1}{t_i - \mu}$ ;

$\mu''_{1j} = \int_{-\infty}^{\tau_j} t f_M(t, \mu, \nu) dt$ ;  $\mu''_{-1j} = \int_{-\infty}^{\tau_j} \frac{1}{t} f_M(t, \mu, \nu) dt$ ;  $f_M(t)$  – плотность  $DM$ -распределения;

$DM(\tau_j; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{\tau_j - \mu}{\nu \sqrt{\mu \tau_j}}\right)$ .

При планах испытаний [NUr] или [NUT], то есть при однократном усечении выборки, максимально правдоподобные оценки параметров  $DN$ -распределения вычисляются, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} v^2 + \frac{m'_1}{\mu} - \mu m'_{-1} - \frac{(N-r)}{r[1-DN(t_r; \mu, v)]} \left[ v^2 DN(t_r; \mu, v) + \frac{\mu'_1}{\mu} - \mu \mu'_{-1} \right] = 0; \\ 2 + v^2 - \frac{m'_1}{\mu} - \mu m'_{-1} - \frac{(N-r)}{r[1-DN(t_r; \mu, v)]} \left[ (2+v^2) DN(t_r; \mu, v) - \mu \mu'_{-1} - \frac{\mu'_1}{\mu} \right] = 0, \end{cases} \quad (2.60)$$

где  $m'_1, m'_{-1}, \mu'_{1j}$  – прежние обозначения;  $r$  – число отказов до момента усечения за время испытаний (наблюдений) по плану [NUT] или  $r=d$  числу отказов при плане испытаний (наблюдений) [NuT] (при этом  $t_r = t_d$ );  $\mu'_1 = \int_0^{t_r} \frac{1}{t} f_N(t) dt$ ;  $\mu''_1 = \int_0^{t_r} t f_N(t) dt$ ;

$$DN(t_r; \mu, v) = \Phi\left(\frac{t_r - \mu}{v\sqrt{\mu t_r}}\right) + \exp\left(\frac{2}{v^2}\right) \Phi\left(-\frac{t_r + \mu}{v\sqrt{\mu t_r}}\right).$$

Максимально правдоподобные оценки параметров  $DM$ -распределения при однократном усечении выборки вычисляются, решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v^2 - 2v^2 \mu K_r - \frac{m'_1}{\mu} + \mu m'_{-1} - \frac{(N-r)}{r[1-DM(t_r; \mu, v)]} \left[ -\frac{v^2}{2} DN(t_r; \mu, v) + \frac{v^2 \mu'_1}{2\mu} + \mu \mu''_{-1} - \frac{\mu''_1}{\mu} \right] = 0; \\ 2 + v^2 - \frac{m'_1}{\mu} - \mu m'_{-1} - \frac{(N-r)}{r[1-DM(t_r; \mu, v)]} \left[ (2+v^2) DM(t_r; \mu, v) - \mu \mu''_{-1} - \frac{\mu''_1}{\mu} \right] = 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

где все обозначения прежние, а  $DM(t_r; \mu, v) = \Phi\left(\frac{t_r - \mu}{v\sqrt{\mu t_r}}\right)$ .

### 2.3.3. Оценивание параметров методом квантилей на основе статистических данных об единичных отказах

Оценка параметров диффузионных распределений методом квантилей основана на решении системы уравнений вида:

$$\begin{cases} F(t_{\gamma_1}; a_1, a_2, \dots, a_m) = q_1; \\ F(t_{\gamma_2}; a_1, a_2, \dots, a_m) = q_2; \\ \dots\dots\dots \\ F(t_{\gamma_m}; a_1, a_2, \dots, a_m) = q_m, \end{cases} \quad (2.62)$$

где  $F(t_{\gamma}; a_1, a_2, \dots, a_m)$  – теоретическая функция распределения отказов с параметрами  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ;  $q_1, q_2, \dots, q_m$  – значения вероятности  $i$ -го отказа ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) эмпирического распределения.

Если распределение отказов описывается двухпараметрическим  $DN$ -распределением с параметрами  $\mu$  и  $v$ , то система уравнений (2.62) примет вид:

$$\begin{cases} DN(t_{\gamma_1}; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{t_{\gamma_1} - \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_1}}}\right) + \exp(2\nu^{-2})\Phi\left(-\frac{t_{\gamma_1} + \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_1}}}\right) = q_1; \\ DN(t_{\gamma_2}; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{t_{\gamma_2} - \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_2}}}\right) + \exp(2\nu^{-2})\Phi\left(-\frac{t_{\gamma_2} + \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_2}}}\right) = q_2. \end{cases} \quad (2.63)$$

Если распределение отказов описывается двухпараметрическим *DM*-распределением с параметрами  $\mu$  и  $\nu$ , то система уравнений (2.62) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} DM(t_{\gamma_1}; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{t_{\gamma_1} - \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_1}}}\right) = q_1; \\ DM(t_{\gamma_2}; \mu, \nu) = \Phi\left(\frac{t_{\gamma_2} - \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_2}}}\right) = q_2. \end{cases} \quad (2.64)$$

Решение (2.63) и (2.64) возможно численными методами с использованием ЭВМ.

Если известно априорное значение параметра формы  $\nu$ , состоятельной оценкой которого может являться коэффициент вариации процесса деградации  $V$ , или принимается известное значение коэффициента вариации распределения отказов аналогов, то параметр масштаба  $\mu$  можно оценить в результате решения лишь одного уравнения:

$$\Phi\left(\frac{t_{\gamma_1} - \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_1}}}\right) + \exp(2\nu^{-2})\Phi\left(-\frac{t_{\gamma_1} + \mu}{\nu\sqrt{\mu t_{\gamma_1}}}\right) = q_1, \quad (2.65)$$

где  $q_1 = r_1 / N$  – вероятность, определяемая отношением количества отказов  $r_1$  к объему выборки  $N$ , поставленной на испытания;  $t_{\gamma_1}$  – время появления  $r_1$ -го отказа.

Перепишем уравнение (2.65), пронормировав временной параметр, то есть приняв  $x = \frac{t}{\mu}$ :

$$\Phi\left(\frac{x-1}{\nu\sqrt{x}}\right) + \exp(2\nu^{-2})\Phi\left(-\frac{x+1}{\nu\sqrt{x}}\right) = q. \quad (2.66)$$

Можно записать следующее выражение для оценки параметра масштаба *DN*-распределения для  $i$ -го (одного) отказа:

$$\mu_i = \frac{t_i}{x(i/N; \nu)}, \quad (2.67)$$

где  $x(i/N; \nu) = \frac{t_i}{\mu_i}$  определяют из таблиц функции  $DN$ -распределения по значениям

$F = \frac{i}{N}$  и заданного значения  $\nu$ , или решая уравнение (2.66) для  $q = \frac{i}{N}$  и заданного

значения  $\nu$ .

При нескольких отказах точечную оценку параметра масштаба  $\mu$   $DN$ -распределения, если параметр формы  $\nu$  известен, вычисляют по формуле (метод квантилей):

$$\bar{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_i}{x(i/N; \nu)}. \quad (2.68)$$

Анализируя известные результаты, можно заметить, что первые отказы приводят к большим погрешностям в оценке параметра масштаба  $DN$ -распределения. Какой бы то ни было закономерности при этом не обнаружено, так что оценки  $\bar{\mu}$ , полученные по первым единичным отказам, могут быть как завышенными, так и заниженными по отношению к реальному значению. Оценки  $\bar{\mu}$ , полученные методом квантилей, можно усреднять, вводя весовой коэффициент, который усиливает значимость более поздних отказов. В таком случае выражение для точечной оценки параметра масштаба  $DN$ -распределения будет иметь вид:

$$\bar{\mu}' = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{i t_i}{x(i/N; \nu)}}{\sum_{i=1}^m i}. \quad (2.69)$$

Аналогично предыдущему случаю, если известно априорное значение параметра формы  $\nu$ , состоятельной оценкой которого также может являться коэффициент вариации процесса деградации или известное значение коэффициента вариации распределения отказов аналогов, то параметр масштаба  $\mu$   $DM$ -распределения можно оценить в результате решения лишь одного уравнения:

$$\Phi \left( \frac{t_{\gamma_1} - \mu}{\nu \sqrt{\mu t_{\gamma_1}}} \right) = q_1. \quad (2.70)$$

При единичном отказе и известном значении параметра формы  $\nu$   $DM$ -распределения точечную оценку параметра масштаба  $\mu$ , используя метод квантилей как решение уравнения (2.70), вычисляют по следующей формуле:

$$\ddot{\mu} = t_{\gamma_1} \left( 1 + \frac{v^2 U_q^2}{2} - v U_q \sqrt{1 + \frac{v^2 U_q^2}{4}} \right). \quad (2.71)$$

При нескольких отказах точечную оценку параметра масштаба  $\mu$   $DM$ -распределения вычисляют по формуле:

$$\ddot{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_{\gamma_i} \left( 1 + \frac{v^2 U_{q_i}^2}{2} - v U_{q_i} \sqrt{1 + \frac{v^2 U_{q_i}^2}{4}} \right). \quad (2.72)$$

По аналогии с выше рассмотренным случаем оценки  $\ddot{\mu}$ , полученные методом квантилей, можно усреднять, вводя весовой коэффициент, который усиливает значимость более поздних отказов. В таком случае выражение для точечной оценки параметра масштаба  $DM$ -распределения будет иметь вид:

$$\ddot{\mu} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m i} \cdot \sum_{i=1}^m i t_i \left( 1 + \frac{v^2 U_{q_i}^2}{2} - v U_{q_i} \sqrt{1 + \frac{v^2 U_{q_i}^2}{4}} \right). \quad (2.73)$$

#### 2.3.4. Оценка параметров диффузионных распределений на основе измерения характеристик процесса деградации

Оценивание параметров диффузионных распределений, исходя из их физической интерпретации, сводится к определению средней скорости деградации изделий, нормированной на предельное значение уровня повреждений и к оценке коэффициента вариации этой скорости.

Состоятельной оценкой средней скорости стационарного процесса деградации при двух разнесенных по времени замерах процесса для  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_2 \gg t_1$ ) является выражение [7]:

$$a = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(t_2 - t_1)^{-1} (x_p - \bar{x})^{-1}, \quad (2.74)$$

где  $\bar{x}_n, x_{np}$  – соответственно, среднее начальное и предельное значения определяющего параметра;  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  – средние значения определяющего параметра на моменты времени  $t_1$

и  $t_2$ ;  $\bar{x}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{1i}$ ;  $\bar{x}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{2i}$ ;  $\bar{x}_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ni}$ ;  $m$  – количество испытываемых изделий;

$x_{ni}, x_{1i}, x_{2i}$  – значения определяющего параметра  $i$ -го образца на моменты времени  $t_0, t_1, t_2$ .

Следовательно,  $\tilde{\mu} = \frac{1}{a}$ .

Для коэффициента вариации стационарного процесса деградации при двух замерах состоятельной оценкой является [27]:

$$\tilde{v} = V = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\bar{x}_1} \left[ \frac{\sum_{i=1}^m (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{m-1} \right]^{1/2} + \frac{1}{\bar{x}_2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^m (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{m-1} \right]^{1/2} \right\}. \quad (2.75)$$

## 2.4. Свойства теоретических моделей отказов при выравнивании статистических данных

### 2.4.1. Постановка задачи

Как показывает практика многих лет, наработка до отказа самых различных элементов и устройств имеет унимодальное распределение, как правило, с положительной асимметрией. Сведения о двухмодальном распределении практически отсутствуют. Действительно, только недостаток объема статистики или «смесь» распределений, обусловленная, например, разной технологией производства или изменением режима эксплуатации, могут явиться причинами появления многомодальных распределений. Но, в таком случае, данные неоднородны и не могут составлять выборку.

Оценку соответствия теоретического распределения опытному распределению проводят с использованием статистических критериев согласия по правилам, например, стандарта [7]. Известно, что согласно статистическим критериям экспериментальные распределения отказов обычно удается довольно хорошо аппроксимировать многими двухпараметрическими функциями распределения. Однако, если далее необходимо оценить, например, гамма-процентный ресурс, то расхождение при различных законах распределения может составлять несколько порядков. В связи с этим функция распределения, удовлетворяющая критериям согласия и более точно аппроксимирующая хвосты распределений, представляется более адекватной моделью отказов.

С целью демонстрации статистических свойств моделей отказов, проявляемых при выравнивании опытных данных, и оценки их адекватности ниже приведены результаты выравнивания статистических данных испытаний и эксплуатации различных объектов (образцы из сплавов, электроэлементы, аппаратура, подшипники качения и др.), отказы которых возникают в результате протекания различных физических процессов деградации (объемной усталости, механического изнашивания, контактной усталости,

старения, электрических процессов и др.). При этом рассмотрены все основные процессы деградации, обобщенные характеристики которых (коэффициенты вариации) имеют значения, практически перекрывающие весь диапазон возможных значений коэффициентов вариации распределений отказов (от 0,05 до 1,49).

В качестве критериев, определяющих качество аппроксимации опытных данных, принят целый комплекс характеристик. В частности, сопоставлялись первые четыре момента конкурирующих теоретических распределений: математическое ожидание, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса. Для оценки качества выравнивания на левом (наиболее важном) хвосте распределения сравнивались эмпирические и теоретические квантили малого уровня. Использовались также статистические критерии согласия Колмогорова, Пирсона и омега-квадрат.

В качестве теоретических конкурирующих распределений были использованы наиболее распространенные модели распределения отказов: экспоненциальное распределение ( $E$ ), нормальное распределение ( $NG$ ), распределение Вейбулла ( $W$ ), логарифмически нормальное распределение ( $LN$ ), альфа-распределение ( $A$ ), диффузионное немонотонное распределение ( $DN$ ), диффузионное монотонное распределение ( $DM$ ).

#### 2.4.2. Характеристика экспериментальных данных

Ниже представлено десять выборок отказов известных результатов испытаний и наблюдений при эксплуатации объектов, имеющих существенно различные механизмы отказов, форму и вид распределений. Представляемые выборки намеренно пронумерованы в порядке возрастания коэффициентов вариации этих распределений.

Вариационные ряды исследуемых данных приведены в стандарте [7].

**Выборка №1** – результаты испытаний образцов из стали на прочность [14]. Среднее выборочное значение  $S_1 = 444 \text{ МПа}$ . Коэффициент вариации распределения  $V_1 = 0,054$ . Объем выборки  $N_1 = 200$ .

**Выборка №2** – результаты усталостных испытаний образцов из алюминиевого сплава при нагружении ( $\sigma_a = 26 \text{ МПа}$ ), обуславливающим процесс малоциклового усталости [20]. Среднее выборочное значение  $S_2 = 397882$  цикла. Коэффициент вариации распределения  $V_2 = 0,16$ . Объем выборки  $N_2 = 102$ .

**Выборка №3** – результаты усталостных испытаний образцов из алюминиевого сплава при нагружении ( $\sigma_a = 21 \text{ МПа}$ ), обуславливающим процесс многоциклового

усталости [20]. Среднее выборочное значение  $S_3 = 1400910$  циклов. Коэффициент вариации распределения  $V_3 = 0,28$ . Объем выборки  $N_3 = 101$ .

**Выборка №4** – результаты усталостных испытаний образцов из сплава В-95 при нагружении, обуславливающим процесс многоциклового усталости [8]. Среднее выборочное значение  $S_4 = 169040$  циклов. Коэффициент вариации распределения  $V_4 = 0,56$ . Объем выборки  $N_4 = 463$ .

**Выборка №5** – данные отказов элементов индикации (ламп накаливания СМН-9). Отказы элементов индикации обусловлены процессами усталостного разрушения под действием циклических температурных и токовых нагружений, электрическими и диффузионными явлениями [16]. Среднее выборочное значение  $S_5 = 212626$  циклов. Коэффициент вариации распределения  $V_5 = 0,73$ . Объем выборки  $N_5 = 504$ .

**Выборка №6** – результаты усталостных испытаний образцов из сплава ЭИ437Б при нагружении, обуславливающим процесс многоциклового усталости [20]. Среднее выборочное значение  $S_6 = 130857$  циклов. Коэффициент вариации распределения  $V_6 = 0,88$ . Объем выборки  $N_6 = 126$ .

**Выборка №7** – данные испытаний на долговечность подшипников качения 7209 [10]. Отказы подшипников качения вызываются механическим износом, усталостным выкрошиванием рабочих поверхностей (контактной усталостью). Среднее выборочное значение  $S_7 = 543$  час. Коэффициент вариации распределения  $V_7 = 0,95$ . Объем выборки  $N_7 = 230$ .

**Выборка №8** – эксплуатационные данные отказов сложной радиоаппаратуры (радиолокационных систем) [12]. Отказы электронных устройств обусловлены усталостным разрушением под действием циклических температурных, токовых и механических нагружений (вибраций), процессами электромиграции, диффузии и других процессов, связанных с электрическими явлениями. Среднее выборочное значение  $S_8 = 21,2$  ч. Коэффициент вариации распределения  $V_8 = 0,96$ . Объем выборки  $N_8 = 115$ .

**Выборка №9** – эксплуатационные данные отказов радиоаппаратуры [22]. Причины отказов аналогичны предыдущей выборке. Среднее выборочное значение  $S_9 = 1833$  ч. Коэффициент вариации распределения  $V_9 = 1,08$ . Объем выборки  $N_9 = 96$ .

**Выборка №10** – данные отказов подшипников качения 2209 [10]. Отказы подшипников качения аналогичны выборке №7, обуславливаются процессами контактной усталости и механического изнашивания. Среднее выборочное значение  $S_{10} = 250$  ч. Коэффициент вариации распределения  $V_{10} = 1,49$ . Объем выборки  $N_{10} = 309$ .



### 2.4.3. Результаты выравнивания экспериментальных данных

Результаты статистической обработки и выравнивания опытных данных приведены в таблицах 2.5 и 2.6.

Параметры конкурирующих распределений определены методами моментных оценок. Теоретические моменты распределений вычислены согласно известным формулам, например, приведенным в стандарте [7]. Наблюдаемые значения критериев согласия Колмогорова ( $KL$ ), Пирсона ( $\chi^2$ ), омега-квадрат ( $\omega^2$ ) определены в соответствии с приложением А к вышеуказанному стандарту.

Рассматривая конкретно каждый критерий, характеризующий качество выравнивания опытных данных, можно отметить следующие основные тенденции. Математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации для всех распределений, кроме экспоненциального, совпадают с выборочными характеристиками, поскольку использовались моментные оценки параметров. Моменты более высокого порядка (асимметрия и эксцесс) более точно описывает  $DM$ -распределение (см. табл. 2.5).

Таблица 2.5. Эмпирические и теоретические оценки асимметрии, эксцесса и квантилей

Характеристика	Номер выборки	Виды распределений							
		Эмпирическое	$DM$	$DN$	$LN$	$W$	$E$	$NG$	$A$
$A_3$	1	0,24	0,16	0,16	0,16	-2,13	2	0	0,96
	2	-0,003	0,46	0,47	0,47	-0,61	2	0	1,60
	3	0,14	0,83	0,84	0,86	-0,11	2	0	2,13
	4	1,72	1,59	1,69	1,86	2,00	2	0	2,75
	5	2,08	1,99	2,20	2,59	1,11	2	0	4,61
	6	1,54	2,30	2,65	3,34	1,45	2	0	4,95
	7	1,93	2,43	2,85	3,72	1,71	2	0	5,30
	8	1,68	2,45	2,89	3,79	1,89	2	0	5,89
	9	2,42	2,66	3,25	4,52	2,25	2	0	6,20
	10	2,95	3,23	4,46	7,74	2,72	2	0	6,80
$E_k$	1	0,07	0,04	0,04	3,05	23,70	9	3	2,40
	2	-0,20	0,33	0,37	3,40	3,94	9	3	3,52
	3	-0,29	1,13	1,17	4,34	2,79	9	3	4,85
	4	3,96	4,08	4,74	9,76	3,36	9	3	8,68
	5	7,93	6,29	8,05	16,92	4,55	9	3	21,2
	6	1,99	8,31	11,07	27,84	5,90	9	3	28,3
	7	4,52	9,24	13,62	35,08	7,24	9	3	34,6
	8	2,82	9,38	13,95	36,44	8,32	9	3	40,1
	9	6,92	10,93	17,62	54,09	10,82	9	3	47,3
	10	10,02	16,66	33,15	200,2	14,90	9	3	58,2
Квантиль уровня $\gamma = \frac{3}{N}$	1	392	394	394	394	6,9	6,7	392	398
	2	268000	292964	289413	292928	12647	11878	280149	295200
	3	716000	804804	774584	804740	46591	42241	663117	816000
	4	47	41	36	40	1,2	1,1	-67	52000
	5	11000	33336	26283	32985	1406	1269	-17917	20000
	6	24000	19817	14255	21790	3,4	3,2	-98093	31700
	7	29	59	41	66	7	7	-608	71
	8	1	2,7	1,9	3,2	0,6	0,6	-18,5	3,6
	9	208	191	120	241	42	58	-1866	272
	10	8	5,9	2,8	11,2	0,8	2,4	-619	14,2

Остальные конкурирующие распределения, как правило, имеют завышенные значения этих характеристик. При этом  $DN$ -распределение и распределение Вейбулла сравнительно умеренно завышают эти показатели, а альфа- и логарифмически нормальное распределения имеют более завышенные значения коэффициентов асимметрии и эксцесса. Как известно, коэффициенты асимметрии и эксцесса экспоненциального распределения всегда равны соответственно 2 и 9, а нормального распределения – соответственно ноль и 3.

С целью оценки качества выравнивания на левом окончании распределения оценивались значения квантилей уровня  $\gamma_i = \frac{3}{N_i}$ , то есть наработки, соответствующие появлению третьего отказа в выборке. Как видно (табл. 2.5), этот показатель вполне приемлем у  $DM$ -,  $DN$ -,  $LN$ -распределений и, как правило, завышен у альфа-распределения. Значения квантилей по распределению Вейбулла и экспоненциальному распределению, как правило, существенно занижены, а у нормального распределения для малых значений ( $\gamma \leq 0,05$ ) вычисленные квантили принимают отрицательные значения. В таблице 2.6 приведены критические значения критериев согласия, соответствующие уровню значимости  $\rho = 0,1$ , а также наблюдаемые значения этих критериев при использовании соответствующих теоретических распределений.

По критерию Колмогорова лучшие (меньшие) значения имеют  $DM$ -,  $DN$ -,  $LN$ -распределения и существенно хуже показатели остальных конкурирующих распределений. При этом по критерию Колмогорова все гипотезы о диффузионных распределениях для рассматриваемых разнообразных выборок принимаются. По критерию Пирсона лучшие показатели также имеют  $DM$ -,  $DN$ -распределения, чуть хуже показатели у логарифмически нормального распределения и у распределения Вейбулла. По критерию омега-квадрат лучшие показатели имеют  $DM$ -,  $DN$ -,  $LN$ -распределения. Критерий Колмогорова оказался менее строгим по сравнению с критериями Пирсона и омега-квадрат для одного и того же уровня значимости. Если для заданного уровня значимости по критерию Колмогорова отвергается гипотеза согласия теоретического распределения с опытным для 20 случаев (то есть отвергается 20 из 60 гипотез), то по критерию Пирсона отвергается 30 гипотез из 60. По критерию омега-квадрат, который представляется более мощным критерием по сравнению с критериями Колмогорова и Пирсона, отвергается 33 и принимается 27 гипотез.

Таблица 2.6. Критические и наблюдаемые значения критериев согласия

Критерий согласия	Номер выборки	Критическое значение	Наблюдаемые значения критериев согласия для распределений						
			<i>DM</i>	<i>DN</i>	<i>LN</i>	<i>W</i>	<i>E</i>	<i>NG</i>	<i>A</i>
<i>KL</i>	1	1,36	0,93	1,12	0,94	1,71	8,18	1,12	1,90
	2	1,36	0,39	0,50	0,40	0,68	4,90	0,40	1,52
	3	1,36	0,64	0,59	0,64	0,49	3,87	0,45	1,35
	4	1,36	0,85	0,63	0,58	1,95	5,80	2,84	1,60
	5	1,36	1,15	1,15	1,13	0,89	3,33	2,11	6,10
	6	1,36	0,64	0,90	1,24	1,00	1,60	2,08	1,31
	7	1,36	0,98	1,29	1,54	0,40	0,58	2,22	1,26
	8	1,36	1,03	1,27	1,26	0,51	0,55	1,66	1,14
	9	1,36	0,53	0,43	0,82	1,12	0,81	2,04	0,90
	10	1,36	1,45	0,87	1,49	1,63	2,83	4,42	4,19
$\chi^2$	1	10,6/12,0	19,96	19,86	19,96	58,34	2827,5	23,7	26,5
	2	7,8/9,2	3,13	2,88	3,14	8,03	382,3	3,87	9,2
	3	7,8/9,2	5,69	5,86	5,91	2,60	155,1	2,52	5,8
	4	16,0/17,3	8,14	6,26	6,70	69,40	249,9	237,6	4,9
	5	14,7/15,9	24,99	34,04	30,33	98,23	117,8	125,4	5,4
	6	6,2/7,8	7,48	10,67	14,42	6,46	2,64	13,65	13,5
	7	7,8/9,2	2,28	4,23	7,19	2,30	3,04	31,8	7,6
	8	6,2/7,8	2,43	3,28	5,14	2,50	2,43	27,6	5,8
	9	4,6/6,2	1,02	1,78	3,63	1,54	3,04	21,47	3,6
	10	10,6/12,0	4,70	10,50	24,64	25,91	91,13	588,7	20,6
$\omega^2$	1	1,94	1,25	1,38	1,25	4,83	82,50	1,53	18,6
	2	1,94	0,41	0,48	0,42	0,70	33,58	0,25	9,5
	3	1,94	0,69	0,73	0,70	0,28	24,20	0,21	8,5
	4	1,94	1,23	0,85	0,78	8,99	56,42	17,48	2,8
	5	1,94	6,59	9,43	6,71	1,38	24,01	12,99	12,1
	6	1,94	0,96	1,93	2,66	1,97	3,00	7,17	3,2
	7	1,94	4,64	9,98	7,51	0,37	1,09	11,01	7,4
	8	1,94	6,38	11,04	6,98	0,43	0,51	5,91	8,5
	9	1,94	0,77	0,34	0,63	2,72	2,11	8,45	0,9
	10	1,94	4,41	4,07	7,22	5,16	13,85	38,68	8,5

В дополнение к приведенным критериям для оценки качества выравнивания изучалось поведение эмпирической интенсивности отказов исследуемых выборок и сравнивалось с теоретическими кривыми конкурирующих распределений. На рис. 2.9 приведены гистограммы и эмпирические интенсивности отказов рассматриваемых выборок (выборки №2, №4, №8, №10).

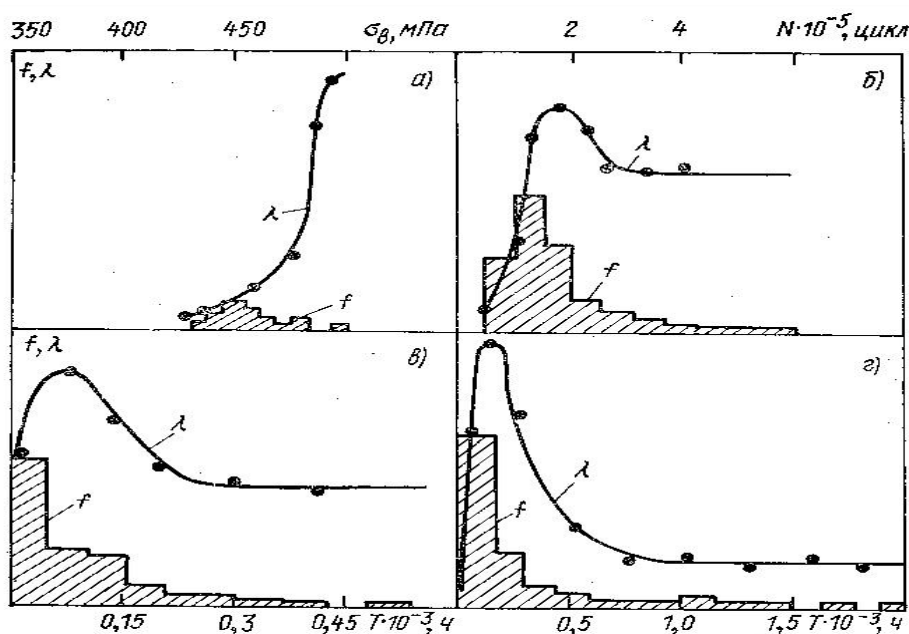


Рис. 2.9. Гистограммы и графики интенсивностей отказов распределений:  
 а- предел прочности стали ( $V=0,06$ ); б – усталостная долговечность ( $V=0,56$ );  
 в – наработка на отказ радиоаппаратуры ( $V=1,1$ );  
 г – долговечность подшипников качения (1,49).

Как видно, эмпирические интенсивности отказов исследуемых распределений для разнообразных форм распределений с коэффициентом вариации от 0,16 до 1,49 имеют немонотонный характер с некоторым конечным значением в конце распределения. Приведенные результаты подтверждают, что  $DM$ -,  $DN$ -распределения лучше других конкурирующих моделей описывают эмпирическую интенсивность отказов.

На основе анализа приведенных результатов выравнивания существенно отличающихся опытных данных установлено, что по сумме принятых критериев диффузионные распределения лучше описывают представленный ансамбль опытных распределений, т.е. диффузионные распределения обладают лучшими статистическими свойствами по сравнению с распределением Вейбулла, логарифмически нормальным, нормальным, экспоненциальным и альфа-распределениями.

### Список литературы к главе 2

1. Баронс П.П., Звиедрис А.В., Салениекс Н.К. Надежность и качество механических систем. Рига: Авотс, 1982. 85 с.
2. Бартлетт М.С. Введение в теорию случайных процессов. М.: ИЛ, 1968. 384 с.
3. Бернштейн С.Н. Теория вероятностей. – М.: Гостехиздат, 1946. – 320 с.
4. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.

5. Вальд А. Последовательный анализ /Пер. с англ. – М.: Физмат, 1960. – 328 с.
6. Вероятностный анализ процесса изнашивания / Х.Б. Кордонский, Г.М. Харач, В.П. Артамоновский и др. – М.: Наука, 1968. – 56 с.
7. ГОСТ 27.005-97. Надежность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Введ. 01.01.99. – 43 с.
8. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 480 с.
9. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов: Пер. с яп. – Киев: Наукова думка, 1978. – 351 с.
10. Жевтунов В.П., Таций В.Г., Стрельников В.П. Распределение долговечности подшипников //Проблемы трения и изнашивания. – Киев: Техника, 1978. – Вып.14. – С. 35-41.
11. Калугер Г.В. О возможности представления процесса изменения состояний радиоэлектронной аппаратуры в процессе хранения марковской моделью //Прочность и надежность конструкций. – Киев: Наукова думка, 1978. – С. 69-74.
12. Козлов Б.А., Ушаков И.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. – М.: Сов. радио, 1975. – 474 с.
13. Кордонский Х.Б., Фридман Я.В. Некоторые вопросы вероятностного описания усталостной долговечности //Заводская лаборатория. – 1976. -№7. – С. 829-847.
14. Кофанов Ю.Н. Моделирование и обеспечение надёжности технических систем. – М.: Энергоатомиздат, 2011. – 324 с.
15. Ларин М.М. Несмещенные оценки дисперсии и некоторых других характеристик обратного нормального распределения //Техническая кибернетика, 1986. – №6. – С. 134-137.
16. Методические рекомендации по экспериментальной оценке показателей надежности ЭВМ /В.П.Стрельников, Л.И.Бутенко, А.М.Лучанский и др. – Киев: Ин-т кибернетики АН Украины, 1987. – 61 с.
17. Проников А.С. Надежность машин. – М.: Машиностроение, 1978.-592 с.
18. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973. –494 с
19. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 254 с.
20. Степнов М.Н., Гиацинтов Е.В. Усталость легких конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1973. – 317 с.

21. Стрельников В.П., Таций В.Г. Приложение теории процессов Маркова к исследованию механического износа // Прикладная механика. – 1977. – Т.13. -№3. – С. 63-69.
22. Стрельников В.П. О возможности применения диффузионного распределения для оценки надежности технических устройств по результатам испытаний // Управляющие системы и машины, 1981. – № 3. – С. 9-12.
23. Шукайло В.Ф. Некоторые вопросы теории восстановления и усталостной надежности механических элементов // О надежности сложных технических систем. – М.: Сов.радио, 1966. – С. 125-149.
24. Bhattacharyya G.K., Fries A. Fatigue Failure Models – Birnbaum-Saunders vs. Inverse Gaussian // IEEE Transactions on reliability. 1982. V. R-31, № 5. – P. 439–440.
25. Birnbaum Z.W., Saunders S.C. A new family of life distribution // J. Appl. Prob. 1969. № 6. – P. 319–327.
26. Cheng R.C.H., Amin N.A.K. Maximum likelihood estimation of parameters in the inverse Gaussian distribution, with unknown origin // Technometrics. – 1981. – V.23, N3. – P. 257-263.
27. Folks J.L., Chhikara R.S. The inverse Gaussian distribution and its statistical application – a review // Journal of Royal Statistical Society. – 1978. – Ser. B, v.40, N3. – P. 263-289.
28. Raaijmakers F.J.M. The lifetime of a standby system of units having the Birnbaum and Saunders distribution // Journal of Applied Probability. – 1980. – V.17, N2. – P. 490-496.
29. Padgett W.J., Wei L.J. Estimation for the three-parameter Inverse Gaussian Distribution // Comm. Stat. – Theor. Meth., ser.A8. – 1979. – V/2. – P. 129-137.
30. Schrodinger E. Zur theorie der fallund streigver suche an teilchen mit brownscher bewegung // Physikalische teitschrift. -1915. – N 16. – P. 289-295.
31. Shuster J. On the Inverse Gaussian Distribution function // JASA. – 1968. -V.63, N324. – P. 1514-1516.
32. Tweedie M.C.K. Statistical properties of Inverse Gaussian distribution. I. // The Annals of Math. Statist. – 1957. – V.28. – № 2. – P. 362-377.
33. Wasan M.T. On Inverse Gaussian Proces // Scand. Actuar. Journal. – 1968. – № 1-2. – P. 69-96.