С. 121–149.
2. Верещагин Н. К., Шень А. Языки и исчисления. —М.: МЦНМО, 2000.
3. Bollobas B. Random Graphs. — New York: Academic Press, 1985.
4. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Лиогонький М. И., Таланов В. А. Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика. — 1969. — № 2. — С. 17–27.
5. Fagin R. Probabilities in finite models // J. Symbolic Logic — 1976. — 41. — С. 50–58.
6. Shelah S., Spencer J. H. Zero-one laws for sparse random graphs // J. Amer. Math. Soc. — 1988. — 1. — С. 97–115.
7. Спенсер Дж., Алон Н. Вероятностный метод. —М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
8. Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — № 1 (56). — С. 107–146.

ОЦЕНКА ЧИСЛА ГРАФОВ В НЕКОТОРЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССАХ

В. А. Замараев (Нижний Новгород)

Рассматриваются бесконечные наследственные классы графов. Множество X называется наследственным классом графов, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу графа из X, также принадлежит X. Все графы являются помеченными, с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$. Известно, что любой наследственнй класс графов X можно определить с помощью множества M запрещённых подграфов, при этом принято писать, что $X = Free(M)$. В [1] доказано, что для любого бесконечного наследственного класса графов, отличного от класса всех графов, справедливо:

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{c(X)}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2), \qquad (1)$$

где $c(X)$ — натуральное число, называемое индексом класса X и определенное в [1]. При этом множество всех бесконечных наследственных классов графов, отличных от класса всех графов, разбивается на слои, где каждому слою принадлежат классы с одним и тем же значением индекса. Например, множество классов, которым соответствует индекс, равный единице, называется унитарным слоем. В [1] описаны также минимальные классы каждого слоя. Например, при $c = 2$ имеется только три минимальных класса: класс двудольных графов, класс графов, дополнительных к двудольным (кодвудольных), и класс расщепляемых графов. Таким образом, унитарный слой может быть охарактеризован как слой, состоящий из тех и только тех бесконечных наследственных классов, которые не содержат ни одного из трех перечисленных. Унитарный слой представляет особый интерес, так как при $c = 1$ соотношение (1) не даёт асимптотики для величины $\log_2 |X_n|$, знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса X [2]. В то же время этому слою принадлежат многие известные классы: леса, планарные графы, рёберные графы, интервальные графы, кографы и др. Целью данного исследования является изучение классов графов из унитарного слоя, определяемых не более чем тремя запрещёнными подграфами. Так как классы принадлежат слою с индексом, равным единице, то в множестве запрещённых графов должно быть хотя бы по одному представителю из класса двудольных, класса кодвудольных и класса расщепляемых графов. Если запрещённый подграф один, то такой подграф должен быть двудольным, кодвудольным и расщепляемым. Всего имеется шесть графов, удовлетворяющих этим требованиям, все они являются порождёнными подграфами графа P_4. Класс $Free(P_4)$ хорошо изучен. Далее логично поставить вопрос о характеристиках классов из унитарного слоя, определяемых двумя запрещёнными подграфами. В этом случае один из запрещённых подграфов должен принадлежать одновременно двум классам. На текущем этапе исследований рассматриваются классы, у которых один запрещённый подграф двудольный и расщепляемый, а второй — полный (являющийся кодвудольным). В частности, в данной работе даётся оценка числа n-вершинных графов в классах $Free(K_{1,s}+O_p, K_q)$. Заметим, что число n-вершинных графов в классе $M_{s,p,q} = Free(K_{1,s} + O_p, K_q)$ не превосходит числа n-вершинных графов в классе $M_{t,t,t} = N_t$, где $t = \max\{s, p, q\}$. Если мы получим верхнюю оценку для числа n-вершинных графов в классе N_t, то эта же оценка будет справедлива и для класса $M_{s,p,q}$. Поэтому здесь рассматриваются только классы N_t, это позволяет уменьшить количество используемых индексов. Далее используются следующие обозначения. Подграф графа G, порождённый множеством вершин $A \subseteq V(G)$, обозначается через $G[A]$. Через $R(q,p)$ обозначается число Рамсея с параметрами q и p, то есть такое наименьшее число, что всякий граф с числом вершин не менее $R(q,p)$ содержит либо K_q, либо O_p в качестве порождённого подграфа. Доказательство главного результата данной работы основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть G — некоторый n-вершинный граф из класса $Free(K_{1,p}+O_p, K_p)$, $p \geq 2$. Существует разбиение $V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_r \cup C$ множества вершин графа G со следующими свойствами:*

1) $r < R(R(p,p)+1, p)$;

2) $|A_i| \geq d$, где $i = \overline{1,r}$, $d = p2^{p-1} + 2p(p-1) + 1$;

3) A_i порождает пустой подграф, $i = \overline{1,r}$;

4) $G[C] \in Free(O_d, K_p)$.

Основной результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Для любого p, $p \geq 2$, число n-вершинных графов в классе N_p не превосходит n^{cn}, где c — некоторая константа, зависящая только от p.*

Список литературы

1. Алексеев В. Е. Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, вып. 2. — С. 148–157.

2. Алексеев В. Е. Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 151–164.

ВЗВЕШЕННЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА В ГРАФАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ МИНОРАМИ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ

Д. В. Захарова (Нижний Новгород)

В задаче о взвешенном независимом множестве (ВНМ) дан граф с приписанными его вершинам положительными целыми весами, и требуется найти множество попарно несмежных вершин с наибольшим суммарным весом. Пусть w_i — вес вершины i, $i = 1, 2, \dots, n$. Задача ВНМ может быть сформулирована как задача целочисленного линейного программирования: найти целочисленный вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующий величину $\sum w_i x_i$ при ограничениях $x_i + x_j \leq 1$ для каждого ребра (i, j) и $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Матрица этой задачи — транспонированная матрица инцидентности графа. В. Н. Шевченко [2] предположил, что для любой константы