Оценивание индекса Блюменталя-Гетура на основе асимптотического поведения характеристической функции*

Панов В. А.
vladimir.panov@uni-due.de
Москва, лаборатория структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании (МФТИ),
Дуйсбург, университет Дуйсбург-Эссен (Германия)

В данной работе рассмотрена задача оценивания индекса Блюменталя-Гетура для двух классов процессов, широко использующихся для моделирования в задачах финансовой математики - для процессов Леви с изменяющимся временем и для моделей стохастической волатильности. Представлен новый метод получения состоятельных оценок, основанный на изучении асимптотического поведения характеристической функции.

Введение

Процессы Леви являются одним из наиболее популярных инструментов для моделирования финансовых временных рядов. На основе данных процессов можно построить модели, учитывающие специфические свойства финансовых данных [2], [6], [11].

Целью данной работы является оценка *активности прыжков* процесса Леви Z, использующегося для моделирования. Под прыжками мы понимаем моменты времени s, когда $|Z_s - Z_{s-}| > 0$. В задачах финансовой математики, прыжок процесса Z интерпретируется как резкое колебание цены в этот момент времени. В связи с такой трактовкой, *активность прыжков* - это некоторая величина, характеризующая «нервность» (или, наоборот, «стабильность») на рынке.

Предполагается, что доступны наблюдения рассматриваемого процесса в моменты времени $t_k = k\Delta, \quad k = 1..n$. Методы обработки этих данных зависят от предположений об интервале между соседними наблюдениями. Наиболее часто рассматриваются 2 типа предположений: данные имеют высокочастотный или низкочастотный характер (*high-frequency setup* или *low-frequency setup*).

В первом случае Δ стремится к 0 при $n \to \infty$ таким образом, что $\Delta * n$ является постоянной величиной. Для данных такого типа задача оценивания активности прыжков изучена достаточно полно [1]. Процедура оценивания основана на наблюдении, что когда Δ принимает маленькие значения, большое приращение $X_{k\Delta} - X_{(k-1)\Delta}$ свидетельствует о наличии прыжка между точками t_{k-1} и t_k.

В случае, когда данные имеют низкочастотный характер, Δ является величиной, не уменьшающейся при увеличении n. Этот факт делает затруднительным, а иногда и невозможным эффективное оценивание некоторых важных характеристик процессов. Действительно, большое приращение процесса может быть объяснено как прыжком, так и плавной изменчивостью между сооствектствующими моментами времени.

В данной статье описан метод построения состоятельных оценок в случае низкочастотных данных. Метод основан на изучении асимптотического поведения характеристической функции. Данный подход был впервые предложен в работе [2]. Затем похожие идеи были применены к стохастическим моделям волатильности [9]. В рамках данной работы показаны основные идеи данного метода, а также описано применение для ещё одного широкого класса процессов - для процессов Леви с изменяющимся временем.

Основные определения

Процессы Леви

Определение 1. *Процесс* $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ *называется процессом Леви, если*

1) $Z_0 = 0$ *п.н.;*
2) *приращения процесса независимы, т.е.* $\forall\, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_n \leqslant \infty$, *случайные величины* $Z_{t_2} - Z_{t_1}$, $Z_{t_3} - Z_{t_2}$, ..., $Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ *являются независимыми;*
3) *приращения являются стационарными, т.е.* $\forall\, t > s$ *случайная величина* $Z_t - Z_s$ *имеет то же распределение, что и* Z_{t-s}*;*
4) Z_t *обладает свойством стохастической непрерывности, т.е.*

$$\forall\, t > 0,\, \forall\, \varepsilon > 0,\, \lim_{s \to 0} \mathsf{P}\left\{|Z_{t+s} - Z_t| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Например, процессами Леви являются Винеровский процесс, (составной) процесс Пуассона, α - стабильный процесс и многие другие.

Важным свойством процессов Леви является возможность представить характеристическую функцию в виде

$$\varphi(u) := \mathsf{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i} u^{\mathsf{T}} Z_t\right\}\right] = \exp\left\{t\, g(u)\right\},$$

где функция $g(u)$ называется характеристической экспонентой процесса Z. Характеристическая экспонента может быть разложена по следующей фор-

Работа выполнена при финансовой поддержке правительства России, грант № 11.G34.31.0073.

муле, известной как формула Леви-Хинчина:

$$g(u) = \mathrm{i}\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \\ + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{\mathrm{i}ux} - 1 - \mathrm{i}ux \cdot \mathbf{1}_{\{|x|\leqslant 1\}}\right) \nu(dx),$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, а мера ν на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, называемая мерой Леви, удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (|x|^2 \wedge 1)\, \nu(dx) < \infty.$$

Таким образом, тройка (μ, σ^2, ν) задаёт характеристическую функцию процесса. В данной работе мы предполагаем что эта тройка известна.

Индекс Блюменталя-Гетура

Определение 2. *Для одномерного процесса Леви $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ с мерой Леви ν, индекс Блюменталя-Гетура (БГ) определяется как*

$$\mathtt{BG}(Z) := \inf\left\{ r > 0 : \int_{|x|\leqslant 1} |x|^r \nu(dx) < \infty \right\}.$$

Оценивание этой величины важно по нескольким причинам. Во-первых, индекс БГ является характеристикой активности прыжков. Индекс изменяется от 0 до 2; чем больше значение, чем более данный процесс Леви похож на Винеровский [9]. Во-вторых, порядки сходимости различных алгоритмов, основанных на методе Монте-Карло, зависят от значения этого индекса [7].

Стохастические модели волатильности

Наиболее известной моделью для процессов цены является модель Блэка-Шоулза, определяемая решением стохастического дифференциального уравнения

$$\frac{dS_t}{S_t} = a\, dt + v\, dW_t, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $v > 0$, и W_t является Винеровским процессом. Решение уравнения (1) может быть выписано в явном виде

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - v^2/2\right) t + v W_t \right\}.$$

Параметр v называется *волатильностью*. Этот параметр тесно связан с дисперсией процесса цены,

$$v^2 = \frac{1}{t}\mathsf{D}\left(\ln S_t\right).$$

Многочисленные исследования показывают, что представление волатильности как детерминированной величины может привести к некорректным результатам. Например, если цена ведёт себя скачкообразно, то волатильность также меняется [5], [8]. Это наблюдение приводит к рассмотрению более общего класса моделей, в которых волатильность представлена некоторым случайным процессом. Такие модели известны как *стохастические модели волатильности* [6].

Рассмотрим модель, в которой процесс цены X_t и процесс волатильности V_t задаются как решения системы стохастических дифференциальных уравнений,

$$\begin{aligned} dX_t &= (a_X + b_X V_{t-})dt + \sqrt{V_{t-}}\, dW_{1,t} + dZ_{1,t}, \\ dV_t &= (a_V - b_V V_{t-})dt + a_V \sigma_V \sqrt{V_{t-}}\, dW_{2,t} + dZ_{2,t}, \end{aligned}$$

где $(W_{1,t}, W_{2,t})$ - это двумерный Винеровский процесс, $\sigma_V \geqslant 0$, $a_V \geqslant 0$, $b_V > 0$, $Z_{1,t}$ и $Z_{2,t}$ являются процессами Леви, причём процесс $Z_{2,t}$ возрастает по времени или является постоянной величиной.

Напомним, что целью данного исследования является оценивание индекса БГ для процессов Леви по выборке из низкочастотных данных $X_{\Delta k}$, $k = 1..n$. Основу для данного алгоритма составляет следующий теоретический факт:

Теорема 1. *[4], [9]. Пусть процесс V_t является эргодическим. Тогда характеристическая функция приращений $X_{k\Delta} - X_{(k-1)\Delta}$ может быть представлена как*

$$\log\left|\varphi^{\Delta}(u)\right| = -\tau_1 u - \tau_2 u^{\alpha}(1 + r(u)), \\ |r(u)| \leqslant \tau_3 u^{-\varkappa}, \quad u > 1,$$

где τ_1, τ_2, τ_3, α и $\varkappa$ - неотрицательные числа. Кроме того,

- *если $a_V > 0$, то $\tau_1 > 0$ и $\alpha = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$;*
- *если $a_V = 0$, то $\tau_1 = 0$ и $\alpha = \max\{\gamma_1, 2\gamma_2\}$,*

где γ_1 и γ_2 - индексы БГ для процессов $Z_{1,t}$ и $Z_{2,t}$ соотв.

Таким образом, оценивание параметра α ведёт к верхним оценкам для индексов БГ. Основная идея приведённой ниже процедуры оценивания α состоит в следующем пробразовании логарифма характеристической функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(u) &:= \log\left\{ -\log\left[\left|\varphi^{\Delta}(u)\right|^{2\theta} / \left|\varphi^{\Delta}(\theta u)\right|^2 \right] \right\} \\ &= \log(2\tau_\theta) + \alpha \log(u) + \log(Q(u)), \end{aligned}$$

где $\theta > 1$, $\tau_\theta = \tau_2(\theta - \theta^{\alpha})$ и $Q(u) \to 1$ при $u \to \infty$. Отметим, что задача оценивания α может быть теперь рассмотрена как задача регрессии.

Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. оценивание характеристической функции [12]:

$$\varphi_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}u(Y_{\Delta k} - Y_{\Delta(k-1)})}; \tag{2}$$

2. оценивание функции $\mathcal{Y}(u)$:
$$\mathcal{Y}_n(u) = \log\left\{-\log\left[|\varphi_n(u)|^{2\theta}/\,|\varphi_n(\theta u)|^2\right]\right\}; \quad (3)$$
3. оценивание параметра α:
$$\alpha_n = \int_0^\infty w^{U_n}(u)\mathcal{Y}_n(u)\,du, \quad (4)$$
где U_n - это последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$, а весовая функция $w^{U_n}(u)$ допускает разложение $w^{U_n}(u) = U_n^{-1}w^1(u/U_n)$, причём функция w^1 имеет компактный носитель $[\delta, 1]$ и удовлетворяет условиям
$$\int_\delta^1 w^1(u)\,du = 0, \quad \int_\delta^1 w^1(u)\log u\,du = 1.$$

Как следует из теоремы 1, характеристическая функция для моделей с положительным параметром a_V и характеристическая функция для моделей с параметром $a_V = 0$ имеют разное асимптотическое поведение. По этой причине свойства оценки α_n различаются в зависимости от параметра a_V. В следующей теореме представлены некоторые свойства оценки α_n для случая $a_V > 0$.

Теорема 2. *[9]. Пусть последовательность U_n выбрана так, что*
$$\frac{\log n}{\sqrt{n}}\, e^{2\theta(\tau_1+\tau_2+\tau_2\tau_3)U_n} \to 0, \quad n \to \infty.$$
Тогда

1. *(состоятельность)*
$$\mathsf{P}\left\{|\alpha - \alpha_n| > C_1 \log^{-\varkappa} n\right\} \leqslant C_2 n^{-1-\delta},$$
где $C_1,\ C_2,\ \delta > 0$;
2. *(асимптотическая нормальность)*
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\lambda_n}}(\alpha_n - \bar{\alpha}_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to +\infty,$$
причём λ_n ведёт себя асимптотически следующим образом:
$$\lambda_n = C\,U_n^{-3/2}\log^{-2}\left(|\varphi^\Delta(U_n\theta)|^2/|\varphi^\Delta(U_n)|^{2\theta}\right) \frac{1-|\varphi^\Delta(\theta U_n)|^2}{|\varphi^\Delta(\theta U_n)|^4}[1+o(1)],\ n \to \infty,$$
где $C > 0$.

Процессы Леви с изменяющимся временем

Рассмотрим теперь другой тип моделей, для которых подобная техника также приводит к построению состоятельных оценок для индекса БГ.

Пусть $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ - процесс Леви, а $T = (T(s))_{s\geqslant 0}$ - неотрицательный неубывающий процесс, причём $T(0) = 0$. Тогда *процесс Леви с изменяющимся временем* определяется как $Y = (Y_s)_{s\geqslant 0} := (Z_{T(s)})_{s\geqslant 0}$. Замена времени основана на идее, что периоды большой волатильности (большей «нервности» на рынке) можно представить как периоды, когда время течёт быстрее [11].

Анализ моделей с изменяющимся временем труден прежде всего потому, что процессы Z и T не наблюдаются непосредственно. Поэтому возникают задачи, связанные с оцениванием составных функций [3]. Кроме того, процесс Z не является процессом Леви - его приращения являются в общем случае зависимыми. Напомним также, данные имеют низкочастотный характер, что приводит к затруднениям, описанным во введении.

Предполагая независимость между процессами Z и T, а также стационарность и эргодичность процесса T, можно доказать следующий теоретический факт, который является аналогом теоремы 1.

Теорема 3. *[10]. Пусть функция плотности случайной величины T_Δ (процесс T в момент времени Δ) допускает следующее представление*
$$p^\Delta(x) = x^{\beta-1}f(x),$$
где $\beta > 0$, и $f(x)$ - бесконечно гладкая функция. Тогда характеристическая функция приращений $Y_{k\Delta} - Y_{(k-1)\Delta}$ может быть представлена следующим образом:
$$\left|\psi^\Delta(u)\right| = \frac{c_\beta}{u^{2\beta}}\left(1 - \frac{\tau_1\beta d_\gamma}{u^{2-\gamma}} - \frac{\tau_2\beta d_{\gamma-\chi}}{u^{2-(\gamma-\chi)}}(1+o(1))\right), \quad u \to \infty,$$
где γ - индекс Блюменталя-Гетура для процесса Z, и $\tau_1, \tau_2, \chi, c_\beta, d_\gamma > 0$.

Построение оценки для индекса БГ (и доказательство свойств этой оценки) в данном случае сложнее, чем для стохастических моделей волатильности. Основное затруднение вызывает существенная зависимость коэффициентов разложения характеристической функции от параметра β, который как правило не известен. Поэтому предлагается оценить сначала параметр β, а затем оценить γ, используя полученную оценку для β.

Алгоритм оценивания состоит из следующих шагов:

1. оценивание характеристической функции приращений наблюдаемого процесса Z:
$$\psi_n(u) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{\mathrm{i}u(Z_{\Delta k} - Z_{\Delta(k-1)})}; \quad (5)$$
2. оценивание параметра β:
$$\beta_n := -\frac{1}{2}\int_0^\infty w^{U_n}(u)\log|\psi_n(u)|\,du, \quad (6)$$

где весовая функция $w^{U_n}(u)$ и последовательность U_n удовлетворяют условиям, описанным после формулы (4);

3. оценивание индекса Блюменталя-Гетура:

$$\gamma_n(\beta_n) := 2 - \int_0^\infty w^{V_n}(u) \log R_n(u)\, du, \qquad (7)$$

где

$$R_n(u) = 1 - \frac{|\psi_n(u)| u^{2\beta_n}}{c_{\beta_n}},$$

а последовательность V_n удовлетворяет тем же условиям, что и U_n.

Состоятельность и порядки сходимости этой оценки показаны в следующей теореме.

Теорема 4. *Обозначим событие*

$$W_n := \Big\{ |\gamma_n(\alpha_n) - \gamma| \leqslant \Psi_1 V_n^{-\chi} + \\ + \Psi_2 \frac{\log n}{\sqrt{n}} V_n^{2\alpha+(2-\gamma)} + \Psi_3 V_n^{2-\gamma} \log V_n \, |\alpha_n - \alpha| \Big\},$$

где $\Psi_1, \Psi_2,\ \Psi_3$ - некоторые известные положительные функции, зависящие от α и γ [10]. Тогда найдутся положительные числа B и δ такие, что

$$\mathsf{P}\{W_n\} > 1 - Bn^{-1-\delta}.$$

Выводы

В данной работе рассмотрены два широких класса моделей, основанных на процессах Леви - аффинные стохастические модели волатильности и процессы Леви с изменяющимся временем. В работе показано, что для обоих классов моделей активность прыжков (в терминах индекса Блюменталя-Гетура) может быть состоятельно оценена при помощи исследования асимптотического поведения характеристической функции. Предложены конкретные алгоритмы для оценивания, а также описаны некоторые свойства полученных оценок.

Литература

[1] Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. Estimating the degree of activity of jumps in high frequency financial data. *Ann.Stat.*, 37(5A):2202–2244, 2009.

[2] Belomestny, D. Spectral estimation of the fractional order of a Lévy process. *Ann.Stat.*, 38(1):317–351, 2010.

[3] Belomestny, D. Statistical inference for time-changed Lévy processes via composite characteristic function estimation. *Ann. Stat.*, 39(4):2205–2242, 2011.

[4] Belomestny, D. and Panov, V. Abelian theorems for stochastic volatility models with application to the estimation of jump activity of volatility. WIAS Preprint, 1631, 2011.

[5] Black, F. Fact and fantasy in the use of options. *Financial Analysist J.*, 31(4):36–41, 1975.

[6] Cont, R. and Tankov, P. *Financial modelling with jump process.* CRC Press UK, 2004.

[7] Dereich, S. Multilevel Monte Carlo algorithms for Lévy-driven SDEs with Gaussian correction. *Ann. Appl. Probab.*, 21:283–311, 2011.

[8] Lewis, A. *Option valuation under stochastic volatility.* Finance Press, Newport Beach, 2000.

[9] Panov, V. *Abelian theorems for stochastic volatility models and semiparametric estimation of the signal space.* PhD thesis, Humboldt University, 2012.

[10] Panov, V. Statistical estimation of the jump activity for time-changed Lévy processes. In *Information Technologies and Systems 2012 (ITaS'12)*, Petrozavodsk, Russia, 2012.

[11] Schoutens, W. *Lévy processes in finance.* John Wiley and Sons, 2003.

[12] Ushakov, N.G. *Selected topics in characteristic functions.* VSP, Utrecht, 1999.