Гришунина Ю.Б.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦЕЛЬЮ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ВИДА РЕМОНТА

В данной работе рассматривается техническая система, в которой возможны два вида ремонта: аварийный, по окончании которого износ системы не изменяется, и капитальный, после которого система полностью обновляется. Решение о виде ремонта принимается в соответствии с распределением на множестве решений, зависящим от износа системы на момент отказа. В работе сформулирована и решена задача оптимального выбора вида ремонта с целью максимизации функционала среднего удельного дохода. Доказано, что оптимальная стратегия управления является вырожденной, а для стареющего распределения времени безотказной работы системы – вырожденной и пороговой с не более чем одной точкой переключения управления.

Ключевые слова: *управляемый полумарковский процесс, однородная марковская рандомизированная стратегия управления, аддитивный функционал дохода, принцип максимума Понтрягина, стареющее распределение, оптимальное управление.*

Введение

Одним из определяющих факторов, влияющих на надежность и эффективность функционирования восстанавливаемых систем, является организация процесса их технического обслуживания. Модели систем, в которых возможны различные схемы проведения аварийного, профилактического, планового, предупредительного и других видов ремонта, рассмотрены, например, в [1], [2], [3], где для их исследования применяется математический аппарат марковских и полумарковских процессов с конечным множеством состояний, процессов восстановления и регенерирующих процессов. Для сравнения стратегий обслуживания вычисляются технические и экономические показатели качества функционирования систем: коэффициент готовности, средняя удельная прибыль и т.д. В [4] подробно проанализированы более сложные модели, в которых эволюция системы описывается полумарковским процессом с несчетным множеством состояний и управляемым полумарковским процессом с конечным множеством состояний.

В данной работе рассматривается математическая модель, в которой учитывается изменение вероятностных характеристик технической системы в процессе ее эксплуатации, а именно, зависимость распределения времени безотказной работы системы от ее износа. Процесс функционирования и технического обслуживания системы описывается управляемым полумарковским процессом с несчетным фазовым пространством; множество допустимых стратегий управления также является несчетным и совпадает с множеством марковских однородных рандомизированных стратегий. В качестве критерия эффективности выбран средний удельный доход в единицу времени в стационарном режиме. Задача оптимального управления состоит в выборе стратегии управления, максимизирующей критерий эффективности, и решается с помощью принципа максимума Понтрягина.

Функционирование системы и процесс технического обслуживания

Пусть непрерывная случайная величина X – длительность безотказной работы системы, $F(t)=P(X<t)$ – ее функция распределения. Будем предполагать, что плотность распределения $f(t)$ случайной величины X дифференцируема и $f(t)>0$ при $t\in[0;+\infty)$. Отказы системы проявляются мгновенно. Техническое обслуживание системы осуществляется следующим образом: в момент отказа начинается проведение одного из двух видов восстановительных работ – аварийного или капитального ремонта. Решение о виде ремонта принимается в зависимости от износа системы x на момент отказа: с вероятностью $p(x)$ проводится аварийный ремонт, с вероятностью $q(x)=1-p(x)$ – капитальный.

Длительность аварийного ремонта – случайная величина Y_a с функцией распределения $G_a(t)=P(Y_a<t)$;

$T_a=EY_a=\int\limits_0^\infty t dG_a(t)$ – средняя длительность аварийного ремонта.

После проведения данного вида ремонта износ системы не изменяется, т.е. остается равным x, при этом сама система приводится в работоспособное состояние. При аварийном ремонте происходит замена некоторых приборов, устройств и т.п., обеспечивающих исправное функционирование системы, т.е. происходит частичное восстановление системы.

После завершения аварийного ремонта остаточное время безотказной работы системы $X-x$ имеет условное распределение

$$F_x(y)=P(X-x<y|X\geq x)=\frac{P(X<x+y,X\geq x)}{P(X\geq x)}=\frac{F(x+y)-F(x)}{\overline{F}(x)}.$$

При этом условное математическое ожидание T_x времени безотказной работы системы при условии, что ее износ равен x, равно:

$$T_x=\int\limits_0^\infty y dF_x(y)=\frac{1}{\overline{F}(x)}\int\limits_0^\infty y dF(x+y)=\frac{\int\limits_x^\infty y dF(y)}{\overline{F}(x)}-x=\frac{T-\int\limits_0^x y dF(y)}{\overline{F}(x)}-x,$$

где $T=\int\limits_0^\infty y dF(y)$ – математическое ожидание времени безотказной работы системы.

Длительность капитального ремонта – случайная величина $Y_к$ с функцией распределения $G_к(t)=P(Y_к<t)$;

$T_к=EY_к=\int\limits_0^\infty t dG_к(t)$ – средняя длительность капитального ремонта.

После завершения капитального ремонта система полностью обновляется. Ее износ становится равным нулю, т.е. происходит полное восстановление системы, а время ее безотказной работы после завершения капитального ремонта X снова распределено по закону $F(t)=P(X<t)$.

Естественно предполагать, что для средних длительностей ремонтов справедливо неравенство:

$$T_a<T_к$$

В начальный момент времени считаем систему новой (ее износ равен нулю).

Критерием качества функционирования системы является средний удельный доход в единицу времени в стационарном режиме, который определяется следующими параметрами:

c_0 – доход, получаемый в единицу времени функционирования системы;

c_a – затраты в единицу времени аварийного ремонта;

$c_к$ – затраты в единицу времени капитального ремонта.

Предполагается, что $c_a<c_к$.

Целью исследования является нахождение оптимальной стратегии организации процесса технического обслуживания в описанной системе.

Математическая модель.

Математической моделью данной технической системы является управляемый однородный полумарковский процесс $(\xi(t),\varphi(t))$ с несчетным пространством состояний; компонента $\xi(t)$ – состояние (износ) системы, $\xi(t)\in E$, $E=[0;+\infty)$, $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра на E; компонента $\varphi(t)$ – управление, $\varphi(t)\in U$, $U=\{0,1\}$, где 0 – решение о проведении аварийного ремонта, 1 – капитального.

Состояние $\xi(t)$ определяется следующим образом: $\xi(t)=\xi(t_i+0)$, $t_i<t\le t_{i+1}$, где $t_i, i=1,2...$ – моменты отказов системы (марковские моменты), $\xi(t_i+0)$ – износ системы на момент i-ого отказа; $\xi(t)=0, 0\le t\le t_1$.

Множество стратегий управления совпадает с множеством однородных марковских рандомизированных стратегий, т.е. решение в состоянии x выбирается в моменты t_i+0 (марковская стратегия) в соответствии с законом распределения $\varphi(t_i+0)=\begin{cases}0, p(x)\\ 1, q(x)\end{cases}$ (рандомизированная стратегия) и не зависит от времени (однородная стратегия); $\varphi(t)=\varphi(t_i+0), t_i<t\le t_{i+1}$.

Функционал дохода на траекториях указанного полумарковского процесса является аддитивным и задается следующим образом: пусть $R(x,y,t,\alpha)$, $x,y\in E$, $t\in[0;\infty)$, $\alpha\in U$ – числовая функция, условное математическое ожидание дохода, полученного в состоянии x за время t при условии, что выбрано решение α, и процесс перейдет в состояние y.

Обозначим $\theta_i=t_i-t_{i-1}, i\ge1$, $t_0=0$ – интервалы между моментами изменения состояния процесса $\xi(t)$; $\nu(t)=\max\{i\ge0:t_i<t\}$ – считающий процесс – число изменений состояния процесса $\xi(t)$ в интервале $(0;t)$; $\zeta_t=t-t_{\nu(t)}$ – время от последнего в интервале $(0;t)$ момента изменения состояния процесса до момента t. Тогда доход на траектории процесса $(\xi(t),\varphi(t))$, полученный за время t, имеет вид:

$$\eta(t)=\begin{cases}R(\xi(0),\xi(t_1),t,\varphi(0)), & \nu(t)=0\\ \sum\limits_{i=0}^{\nu(t)-1}R(\xi(t_i),\xi(t_{i+1}),\theta_{i+1},\varphi(t_i))+R\left(\xi(t_{\nu(t)})\xi(t_{\nu(t)+1})\zeta_t,\varphi(t_{\nu(t)})\right) & \nu(t)\ge1\end{cases}$$

Обозначим $S(t)=E\eta(t)$ – математическое ожидание дохода, полученного за время t на траектории описанного управляемого полумарковского процесса $(\xi(t),\varphi(t))$. Тогда $\rho=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}$ – средний удельный доход в единицу времени в стационарном режиме. В [5] сформулированы достаточные условия существования и получена формула для вычисления ρ:

$$\rho=\frac{\int\limits_E R(x)d\pi(x)}{\int\limits_E T(x)d\pi(x)} \quad (1),$$

где числитель – это математическое ожидание дохода за один переход полумарковского процесса, знаменатель – математическое ожидание длительности этого перехода; $R(x)$ – математическое ожидание полного дохода в состоянии x; $T(x)$ – математическое ожидание длительности пребывания процесса в состоянии x; $d\pi(x)$ – стационарное распределение вложенной марковской цепи $\{\xi_n=\xi(t_n), n\ge0\}$;

$$\pi(A)=\int\limits_E\pi(dy)P(y,A),\ \int\limits_E\pi(dy)=1,\ A\in\mathfrak{F} \quad (2),$$

где $P(y,A)$ – переходные вероятности вложенной марковской цепи.

Предельные теоремы для цепей Маркова и полумарковских процессов с общим пространством состояний подробно рассмотрены в [6],[7].

Задача оптимизации.

Задача оптимального управления состоит в нахождении функции $p^*(\cdot)$, при которой достигается максимум среднего удельного дохода на траекториях управляемого полумарковского процесса $(\xi(t),\varphi(t))$ в стационарном режиме, т.е.

$$\rho=\frac{\int_E R(x)d\pi(x)}{\int_E T(x)d\pi(x)}\to\max_{p(\cdot)} \tag{3}$$

Стационарное распределение вложенной марковской цепи.

Выпишем переходные вероятности вложенной марковской цепи. Пусть износ системы равен x, и принято решение о проведении аварийного ремонта. Тогда к моменту следующего отказа износ системы может только увеличиться; чтобы он стал равным y, система должна проработать время $y-x$. Если принято решение о проведении капитального ремонта, то для того, чтобы износ стал равным y, система должна проработать время y, поскольку после капитального ремонта износ системы становится равным 0. По формуле полной вероятности получаем:

$$P\{x,[y;y+dy)\}=\begin{cases}p(x)dF_x(y-x)+q(x)dF(y), & y>x\\ q(x)dF(y), & y\le x\end{cases}$$

Обозначим $\pi'(x)$ – плотность стационарного распределения; $f(x)=F'(x)$ – плотность распределения длительности безотказной работы системы X.

Утверждение 1. *Плотность стационарного распределения вложенной марковской цепи имеет следующий вид:*

$$\pi'(x)=cf(x)\exp\left(\int_0^x\frac{p(y)f(y)}{\overline{F}(y)}dy\right),\ c>0,\ c=const.$$

Доказательство. Подставим полученные выражения для переходных вероятностей в интегральное уравнение (2) для стационарного распределения, получим:

$$\pi(dy)=\int_0^y\pi(dx)p(x)dF_x(y-x)+\int_0^\infty\pi(dx)q(x)dF(y)$$

Так как $dF_x(y-x)\overset{\Delta}{=}d\left[\frac{F(y-x+x)-F(x)}{\overline{F}(x)}\right]=\frac{1}{\overline{F}(x)}dF(y)$, то

$\pi(dy)=\int_0^y\pi(dx)p(x)\frac{1}{\overline{F}(x)}dF(y)+\int_0^\infty\pi(dx)q(x)dF(y)$ или, что то же самое,

$$\pi'(y)=\int_0^y\pi'(x)p(x)\frac{1}{\overline{F}(x)}dxf(y)+\int_0^\infty\pi'(x)q(x)dxf(y).$$

Получили интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода. Методы решения этого и других типов интегральных уравнений изложены, например, в [9]. В данном случае решение интегрального уравнения легко может быть сведено к решению линейного дифференциального уравнения 1-го порядка. Разделим обе части на $f(y)$:

$$\frac{\pi'(y)}{f(y)}=\int_0^y\pi'(x)p(x)\frac{1}{\overline{F}(x)}dx+\int_0^\infty\pi'(x)q(x)dx$$

Продифференцируем обе части по y:

$$\frac{\pi''(y)f(y)-\pi'(y)f'(y)}{f^2(y)}=\pi'(y)p(y)\frac{1}{\overline{F}(y)}$$

$$\pi''(y)f(y)\overline{F}(y)-\pi'(y)f'(y)\overline{F}(y)-\pi'(y)p(y)f^2(y)=0\,.$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными относительно $\pi'(y)$. Решая его, получаем утверждение 1. Константа c определяется из условия нормировки в (2).

Функционал среднего удельного дохода.

Обозначим $u(x)=\exp\left(\int\limits_0^x \frac{p(y)f(y)}{\overline{F}(y)}dy\right)$.

Утверждение 2. *Функционал среднего удельного дохода* ρ *имеет вид:*

$$\rho=\frac{\int\limits_0^\infty \left(p(x)\left(-c_aT_a+c_\kappa T_\kappa+c_0\left(T_x-T\right)\right)+c_0T-c_\kappa T_\kappa\right)f(x)u(x)dx}{\int\limits_0^\infty \left(p(x)\left(T_a-T_\kappa+T_x-T\right)+T+T_\kappa\right)f(x)u(x)dx}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1).

Вычислим математическое ожидание полного дохода $R(x)$ и среднее время пребывания $T(x)$ процесса в состоянии x. Пусть износ системы равен x, и принято решение о проведении аварийного ремонта. Тогда время пребывания процесса в состоянии x складывается из длительности аварийного ремонта Y_a и остаточного времени безотказной работы системы $X-x$; доход, полученный в состоянии x, равен доходу от функционирования системы за остаточное время безотказной работы за вычетом затрат на аварийный ремонт. Если в состоянии x принято решение о капитальном ремонте, то время пребывания процесса в состоянии x складывается из длительности капитального ремонта Y_κ и времени безотказной работы системы X; доход, полученный в состоянии x, равен доходу от функционирования системы за время безотказной работы за вычетом затрат на капитальный ремонт. Учитывая, что $q(x)=1-p(x)$, по формуле полного математического ожидания получаем:

$$R(x)=p(x)\left(c_0T_x-c_aT_a\right)+q(x)\left(c_0T-c_\kappa T_\kappa\right)=$$

$$=p(x)\left(-c_aT_a+c_\kappa T_\kappa+c_0\left(T_x-T\right)\right)+c_0T-c_\kappa T_\kappa$$

$$T(x)=p(x)\left(T_a+T_x\right)+q(x)\left(T+T_\kappa\right)=p(x)\left(T_a-T_\kappa+T_x-T\right)+T+T_\kappa.$$

Подставляя в (1) полученные выражения для $R(x)$ и $T(x)$ и формулу для стационарного распределения из утверждения 1, получаем утверждение 2.

Решение задачи оптимизации.

Лемма 1. *Пусть решение задачи (3) существует;* $p^*(\cdot)$ *– оптимальная стратегия управления,* $\rho^*=\max\limits_{p(\cdot)}\frac{\int_E R(x)d\pi(x)}{\int_E T(x)d\pi(x)}$*. Тогда задача (3) эквивалентна следующей задаче:*

$$\int_0^\infty \Big[p(x)\Big(\rho^*(T_a - T_\kappa + T_x - T) - \big(-c_a T_a + c_\kappa T_\kappa + c_0(T_x - T)\big)\Big) + \rho^*(T + T_\kappa) - (c_0 T - c_\kappa T_\kappa)\Big] f(x)u(x)dx \to \min_{p(\cdot)} \quad (4.1)$$

$$u'(x) = \frac{p(x)f(x)}{\overline{F}(x)}u(x) \quad (4.2) \quad (4)$$

$$u(0) = 1 \quad (4.3)$$

$$p \in [0;1] \quad (4.4)$$

Доказательство. Напомним, что $u(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{p(y)f(y)}{\overline{F}(y)}dy\right)$, откуда, очевидно, следует (4.2) и (4.3); (4.4) также очевидно, поскольку $p(\cdot)$ – это вероятность.

Докажем (4.1). Обозначим $a(p)$ – числитель функционала среднего удельного дохода из утверждения 2, $b(p)$ – знаменатель. Заметим, что для любой стратегии управления $p(\cdot)$ $b(p) > 0$, т.к. $b(p)$ – математическое ожидание положительной случайной величины.

Поскольку $p^*(\cdot)$ – оптимальная стратегия, и $\frac{a(p^*)}{b(p^*)} = \rho^*$, то для любой другой стратегии управления $p(\cdot) \neq p^*(\cdot)$ $\frac{a(p)}{b(p)} \leq \rho^*$. Тогда, поскольку $b(p) > 0$, получаем: $a(p) \leq \rho^* b(p)$ или $a(p) - \rho^* b(p) \leq 0$, а для оптимальной стратегии $a(p^*) - \rho^* b(p^*) = 0$.

Таким образом, задача $\frac{a(p)}{b(p)} \to \max_{p(\cdot)}$ эквивалентна задаче: $a(p) - \rho^* b(p) \to \max_{p(\cdot)}$, или задаче $\rho^* b(p) - a(p) \to \min_{p(\cdot)}$. Подставляя выражения для $a(p)$ и $b(p)$, получаем (4.1).

Заметим, что задача (4) – это задача оптимального управления без фазовых ограничений со свободным правым концом. Для ее решения воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности для такой задачи сформулированы в [9].

Функция Понтрягина имеет вид:

$$H(x,u,p,\lambda,\lambda_0) = \lambda(x)\frac{p(x)f(x)}{\overline{F}(x)}u(x) -$$

$$-\lambda_0\Big[p(x)\Big(\rho^*(T_a - T_\kappa + T_x - T) - \big(-c_a T_a + c_\kappa T_\kappa + c_0(T_x - T)\big)\Big) + \rho^*(T + T_\kappa) - (c_0 T - c_\kappa T_\kappa)\Big] f(x)u(x) =$$

$$= p(x)f(x)u(x)\left[\frac{\lambda(x)}{\overline{F}(x)} - \lambda_0\Big(\rho^*(T_a - T_\kappa + T_x - T) - \big(-c_a T_a + c_\kappa T_\kappa + c_0(T_x - T)\big)\Big)\right] -$$

$$-f(x)u(x)\lambda_0\big(\rho^*(T + T_\kappa) - (c_0 T - c_\kappa T_\kappa)\big) \quad (5).$$

а) Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 = 1$, поскольку, если бы $\lambda_0 = 0$, то $\lambda(x)$ должна была бы тождественно равняться 0.

б) Сопряженное уравнение:

$$\lambda'(x) = -H_u = -p(x)f(x)\left[\frac{\lambda(x)}{\overline{F}(x)} - \left(\rho^*\left(T_a - T_{\text{к}} + T_x - T\right) - \left(-c_a T_a + c_{\text{к}} T_{\text{к}} + c_0\left(T_x - T\right)\right)\right)\right] +$$

$$+f(x)\left(\rho^*\left(T + T_{\text{к}}\right) - \left(c_0 T - c_{\text{к}} T_{\text{к}}\right)\right)$$

в) Условие трансверсальности: $\lambda(\infty) = 0$

г) $H\left(x, u^*(x), p^*(x), \lambda(x), \lambda_0\right) = \max\limits_{p\in[0;1]} H\left(x, u^*(x), p, \lambda(x), \lambda_0\right)$ для почти всех $x \in E$.

Теорема 1. *Оптимальная стратегия управления $p^*(\cdot)$ является вырожденной, т.е. для почти всех $x \in E$ $p^*(x) = 0$ или $p^*(x) = 1$.*

Доказательство. Заметим, что функция Понтрягина (5) линейна по $p(\cdot)$. Поэтому утверждение теоремы следует из условия г), поскольку максимум линейной функции достигается на границе допустимого множества.

Замечание. Очевидно, оптимальное управление будет следующим: $p^*(x) = 1$, если множитель при $p(\cdot)$ положителен, и $p^*(x) = 0$, если множитель при $p(\cdot)$ отрицателен; если множитель при $p(\cdot)$ равен нулю, то решение в состоянии x может быть любым. Отметим также, что из теоремы 1 не следует единственность оптимальной стратегии, поскольку необходимое условие оптимальности г) должно быть выполнено для почти всех $x \in E$, т.е. для множеств, имеющих ненулевую меру Лебега. Это означает, в частности, что любая стратегия $p(\cdot)$, отличная от $p^*(x)$ в конечном или счетном числе точек, также является оптимальной.

Теорема 2. *Пусть распределение времени безотказной работы системы является стареющим: это означает, что интенсивность отказов $\dfrac{f(x)}{\overline{F}(x)}$ – возрастающая функция. Тогда оптимальная стратегия управления $p^*(\cdot)$ является пороговой и имеет не более одной точки переключения управления, т.е. возможны 3 случая:*

(I) $p^*(x) = 0$ для любых $x \in E$;
(II) $p^*(x) = 1$ для любых $x \in E$;

(III) Существует пороговое значение x^* такое, что $p^*(x) = \begin{cases} 1, x \le x^* \\ 0, x > x^* \end{cases}$.

Доказательство. По замечанию к теореме 1 значение оптимального управления в состоянии x определяется знаком множителя при $p(\cdot)$ в функции Понтрягина (5), который равен

$$f(x)u(x)\left[\frac{\lambda(x)}{\overline{F}(x)} - \lambda_0\left(\rho^*\left(T_a - T_{\text{к}} + T_x - T\right) - \left(-c_a T_a + c_{\text{к}} T_{\text{к}} + c_0\left(T_x - T\right)\right)\right)\right].$$

Поскольку $f(x)u(x) > 0$ для любых $x \in E$, а по условию а) $\lambda_0 = 1$, то знак множителя совпадает со знаком выражения

$$\frac{\lambda(x)}{\overline{F}(x)} + T_x\left(c_0 - \rho^*\right) + \rho^*\left(T_{\text{к}} + T - T_a\right) + c_{\text{к}} T_{\text{к}} - c_a T_a - c_0 T \qquad (6).$$

Найдем сопряженную переменную $\lambda(x)$ из уравнения б) и условия в). Сопряженное уравнение б) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая его и учитывая условие в), получаем:

$$\lambda(x)=-\frac{\int_x^{\infty}u(y)f(y)\Big(p(y)\big(T_y(\rho^*-c_0)+A\big)+B\Big)dy}{u(x)},$$

где $A=\rho^*(T_a-T_\kappa-T)+c_aT_a-c_\kappa T_\kappa+c_0T$, $B=\rho^*(T+T_\kappa)-(c_0T-c_\kappa T_\kappa)$

Подставим $\lambda(x)$ в (6); преобразуя (6), получаем, что его знак совпадает со знаком функции

$$W(x)=-\int_x^{\infty}u(y)f(y)\Big(p(y)\big(T_y(\rho^*-c_0)+A\big)+B\Big)dy+u(x)T_x\bar{F}(x)(c_0-\rho^*)-Au(x)\bar{F}(x)=$$

$$=-\int_x^{\infty}u(y)\Big(T_a(\rho^*+c_a)f(y)+(\rho^*-c_0)\bar{F}(y)\Big)dy=$$

$$=-\int_x^{\infty}u(y)\bar{F}(y)\left(T_a(\rho^*+c_a)\frac{f(y)}{\bar{F}(y)}+(\rho^*-c_0)\right)dy.$$

Обозначим: $\omega(x)=T_a(\rho^*+c_a)\dfrac{f(x)}{\bar{F}(x)}+(\rho^*-c_0)$.

Тогда $W(x)=-\int_x^{\infty}u(y)\bar{F}(y)\omega(y)dy$; $W'(x)=u(x)\bar{F}(x)\omega(x)$ (7).

Заметим, что $\rho^*+c_a>0$, а $\rho^*-c_0<0$. Действительно, в самом «худшем» случае, если нет дохода от исправного функционирования системы, а все время проводятся только ремонтные работы, то доход в единицу времени равен либо $-c_a$, если проводится аварийный ремонт, либо $-c_\kappa$, если капитальный; поскольку ρ^* – это максимум среднего удельного дохода, а $c_a<c_\kappa$ по условию, то $\rho^*\geq -c_a$. Если же $\rho^*=-c_a$, это означает, что в системе все время проводятся ремонтные работы, а ее функционирование не приносит никакой прибыли, что экономически нецелесообразно. Поэтому $\rho^*>-c_a$. Неравенство $\rho^*<c_0$ выполняется потому, что в системе предусмотрено проведение ремонтных работ, которые требуют материальных и временных затрат. Поскольку $\rho^*+c_a>0$ и интенсивность отказов $\dfrac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ возрастает, то функция $\omega(x)$ также возрастает, а, значит, уравнение $\omega(x)=0$ имеет не более одного решения на $(0;+\infty)$.

Рассмотрим сначала случай, когда уравнение $\omega(x)=0$ не имеет корней на $(0;+\infty)$. Возможны два варианта:

1) $\omega(0)\geq 0$. Тогда $\omega(x)>0$ для любых $x\in(0;+\infty)$. Поскольку $u(x)\bar{F}(x)>0$, то $W(x)<0$ и $p^*(x)=0$ для любых $x\in E$ (случай (I)).

2) $\omega(0)<0$. Тогда $\omega(x)<0$ для любых $x\in[0;+\infty)$. Следовательно, $W(x)>0$ и $p^*(x)=1$ для любых $x\in E$ (случай (II)).

Пусть теперь уравнение $\omega(x)=0$ имеет единственный корень; обозначим его $\acute{x}$, $\omega(\acute{x})=0$. Так как функция $\omega(x)$ строго возрастает, то $\omega(x)<0$ при $x<\acute{x}$ и $\omega(x)>0$ при $x>\acute{x}$. Тогда из (7) следует, что функция $W(x)$ является убывающей при $x<\acute{x}$, имеет минимум в точке $\acute{x}$, и для любых $x\geq\acute{x}$ $W(x)<0$, а $p^*(x)=0$.

Снова возможны два варианта:
1) $W(0)\leq 0$. Тогда $W(x)<0$ и $p^*(x)=0$ для любых $x\in E$ (случай (I)).

2) $W(0)>0$. Тогда на $(0;\acute{x})$ уравнение $W(x)=0$ имеет единственный корень; обозначим его x^*. При $x<x^*$ $W(x)>0$; при $x>x^*$ $W(x)<0$, а соответствующая оптимальная стратегия имеет вид: $p^*(x)=\begin{cases}1, x\le x^*\\ 0, x>x^*\end{cases}$ (случай (III)).

Замечание. Стратегия (I) $p^*(x)=0$ для любых $x\in E$ предписывает после отказа системы независимо от ее износа проводить капитальный ремонт, т.е. полное восстановление системы; стратегия (II) $p^*(x)=1$ для любых $x\in E$ означает, что независимо от износа системы после ее отказа следует проводить аварийный ремонт, т.е. частичное восстановление. В случае оптимальной стратегии (III) если износ системы на момент отказа не превосходит порогового значения x^*, то проводится аварийный ремонт, если превосходит, то капитальный.

Уравнение для нахождения порогового значения.

Теорема 3. *Пороговое значение x^* для оптимальной стратегии (III) является корнем уравнения*

$$\int_{x^*}^{\infty}\overline{F}(y)dy+\frac{\left[T_\kappa\dfrac{(c_\kappa-c_a)}{(c_0+c_a)}-x^*\right]\overline{F}(x^*)}{\left[\dfrac{(c_\kappa+c_0)T_\kappa}{(c_a+c_0)T_a}-1-\ln\overline{F}(x^*)\right]}=0 \qquad (8).$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 следует, что пороговое значение x^* – это единственный на $(0;+\infty)$ корень уравнения $W(x)=0$. Поэтому

$$W(x^*)=-\int_{x^*}^{\infty}u(y)\overline{F}(y)\left(T_a\left(\rho^*+c_a\right)\frac{f(y)}{\overline{F}(y)}+\left(\rho^*-c_0\right)\right)dy=0$$

Учитывая, что оптимальная стратегия (III) имеет вид $p^*(x)=\begin{cases}1, x\le x^*\\ 0, x>x^*\end{cases}$, найдем значение ρ^*. После преобразований получаем:

$$\rho^*=\frac{c_aT_a\ln\overline{F}(x^*)+c_0\left[x^*+\dfrac{1}{\overline{F}(x^*)}\displaystyle\int_{x^*}^{\infty}\overline{F}(y)dy\right]-c_\kappa T_\kappa}{-T_a\ln\overline{F}(x^*)+x^*+\dfrac{1}{\overline{F}(x^*)}\displaystyle\int_{x^*}^{\infty}\overline{F}(y)dy+T_\kappa}$$

Подставляя этот результат в $W(x^*)$, получаем уравнение (8).

Выводы

В работе рассмотрена техническая система, в которой возможно проведение двух видов ремонта – аварийного и капитального. Математической моделью процесса функционирования и технического обслуживания системы является управляемый однородный полумарковский процесс с несчетным множеством состояний. Множество допустимых стратегий управления – однородные марковские рандомизированные стратегии. Для любой фиксированной рандомизированной стратегии управления выписан в явном виде функционал среднего удельного дохода в единицу времени в стационарном режиме. Для этого получены выражения для математического ожидания полного дохода и среднего времени пребывания в каждом состоянии, и найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова как решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Сформулирована и решена задача оптимального выбора вида ремонта; в качестве критерия эффективности выбран функционал среднего удельного дохода. Задача оптимального управления решена с помощью принципа максимума Понтрягина. Доказано, что оптимальная стратегия управления является вырожденной с точностью до множеств, имеющих нулевую меру Лебега. Это означает, что для данной системы при таком выборе критерия эффективности рандомизация не улучшает управления. Для стареющего распределения времени безотказной работы системы доказано, что оптимальная стратегия является вырожденной и пороговой с не более чем одной точкой переключения управления; выведено уравнение для нахождения порогового значения и получено выражение для оптимального значения критерия эффективности.

Литература

1. **Б.В.Гнеденко, Ю.К.Беляев, А.Д.Соловьев.** Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: Наука, 1965.
2. **Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А.** Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем (Библиотека инженера по надежности). М.: Сов. Радио, 1971.
3. Вопросы математической теории надежности. / Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983.
4. **В.А.Каштанов.** Полумарковские модели процесса технического обслуживания. М.: Знание, 1987.
5. **В.А.Каштанов.** Асимптотический анализ полумарковских процессов с несчетным множеством состояний. Труды МИЭМ «Некоторые прикладные вопросы теории вероятностей и математической статистики». Вып. 57, 1976.
6. **Э.Нуммелин.** Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.
7. **В.М. Шуренков.** Эргодические процессы Маркова. М.: Наука, 1989.
8. **М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И. Макаренко.** Интегральные уравнения. М.: УРСС, 2003.
9. **А.Д.Иоффе, В.М.Тихомиров.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Grishunina J.B.

OPTIMAL STRATEGY OF REPAIR IN SEMI-MARKOV MODEL OF TECHNICAL MAINTENANCE

A technical system with two possible types of maintenance is considered. The first type of maintenance is an emergency repair, by the termination of which tear and wear of the system doesn't change. The second type is the major repair by a termination of which the system is totally updated. The decision about the type of the repair is taken according to the distribution of the solution set that depends on the tear and wear of the system at the moment of the failure. We formulate and solve the problem of optimal choice of the repair type with the maximization target of functional average specific income. It was proved that the optimal control is singular. Moreover, in the case of an increasing failure rate (IFR) lifetime distribution the optimal control is singular and has a form of a threshold with no more than one switching point.

Keywords: *controlled semi-Markov process, homogeneous Markov randomized strategy of control, additive functional of income, Pontryagin's maximum principle, increasing failure rate (IFR) distribution, optimal control.*