

**УПРАВЛЕНИЕ  
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

УДК 681.5

**О КОНСТРУИРОВАНИИ РОБАСТНЫХ  
ПО КРИТЕРИЮ КАЧЕСТВА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

© 2012 г. М. Г. Зотов

Москва, МИЭМ (технический ун-т)

Поступила в редакцию 27.05.11 г., после доработки 27.10.11 г.

Объект управления может работать в двух режимах: штатном и аварийном. Приведена методика коррекции оптимального в штатном режиме регулятора с целью его удовлетворительного функционирования и в аварийном режиме. Настоящая статья дополняет существующие подходы к решению данного класса задач [1–4]. В отличие от решения одной из таких задач в [4] ограничение на необходимость совпадения числа правых полюсов в передаточных функциях объекта в штатном и аварийном режимах снято.

**Введение.** В большинстве практических задач возможны значительные отступления от оптимальных характеристик без существенного ухудшения принятого критерия качества системы. Это характерное свойство оптимальных систем является положительным фактором и позволяет конструктору в достаточно широких пределах варьировать структуру и параметры управляющего устройства без существенного отклонения от оптимального значения критерия качества и тем самым удовлетворять многим другим требованиям, предъявляемым к проектируемой системе, в частности, требованиям робастности, простоты и надежности [5].

Сказанное позволяет предположить, что коррекцией оптимального регулятора можно решить сформулированную ниже задачу. Для простоты рассматриваются лишь два режима: штатный и аварийный. Аварийный режим наступает, когда отказывает какой-либо элемент объекта управления. При этом может меняться порядок дифференциального уравнения объекта, местонахождение полюсов и нулей его передаточной функции. В штатном режиме качество функционирования системы должно быть близко к оптимальному, а в аварийном лишь обеспечиваться приемлемая работоспособность системы.

**1. Постановка задачи.** Объект управления может находиться в двух режимах: в одном – штатном, когда параметры номинальные, имеет передаточную функцию  $W_{0н}(s)$ , в другом – аварийном – функцию  $W_0(s)$ . Требуется найти передаточную функцию регулятора  $W_{1р}^*(s)$ , для которой выполняются соотношения

$$\hat{I}(W_{0н}(s), W_{1р}^*(s)) \approx \hat{I}_{оп}, \quad \tilde{I}(W_0(s), W_{1р}^*(s)) \leq \tilde{I}_п, \quad (1.1)$$

где  $\hat{I}$  – критерий качества работы системы в штатном режиме,  $\hat{I}_{оп}$  – оптимальное значение критерия качества  $\hat{I}$ ,  $\tilde{I}$  – критерий качества работы системы в аварийном режиме,  $\tilde{I}_п$  – наибольшее приемлемое значение критерия качества  $\tilde{I}$ .

Таким образом, спроектированная система должна обладать свойством робастности не только относительно устойчивости, но и качества. Качество работы системы в штатном и аварийном режимах может оцениваться как различными, так и совпадающими критериями.

В основу решения положен приведенный в Приложении частотный критерий устойчивости, который утверждает следующее: для того чтобы все корни характеристического полинома замкнутой системы находились в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы годограф частотного критерия при изменении частоты от нуля до бесконечности в плоскости комплексного переменного точки с координатами  $(-1, j0)$  не охватывал. В отличие от годографа Найквиста, предлагаемый инвариантен относительно числа правых полюсов системы в разомкнутом состоянии, что и позволяет использовать его для поиска параметров регулятора, обеспечивающих устойчивость системы в замкнутом состоянии.

**2. Решение задачи.** Исходя из сказанного во Введении и разд. 1, можно принять следующий порядок конструирования робастной системы.

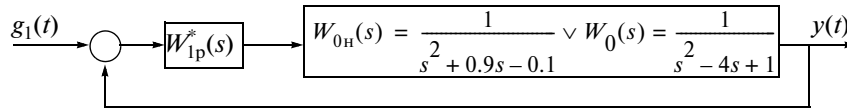


Рис. 1

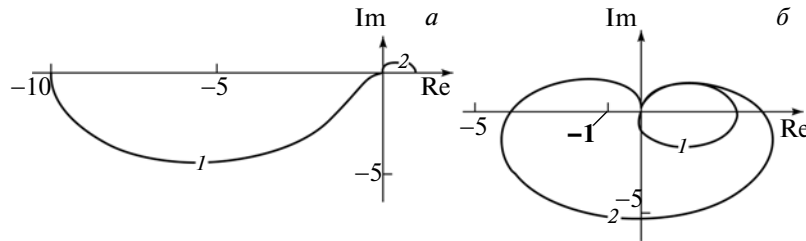


Рис. 2

Этап 1. По постановке задачи формируется функционал  $\hat{I}$ , характеризующий работу системы в штатном режиме. Из условия оптимума функционала  $\hat{I}$  определяются структура и параметры регулятора. Проверяется, является ли система с найденным регулятором устойчивой и в аварийном режиме. Если нет, переходят к этапу 2, если да, то переходят к этапу 3.

Этап 2. Найденные из оптимума  $\hat{I}$  параметры регулятора уточняются так, чтобы как в штатном, так и в аварийном режиме система была робастной относительно свойства устойчивости. Для решения задачи этого этапа используется приведенный в Приложении алгоритм, построенный на сформулированном выше частотном критерии устойчивости.

Этап 3. Найденные на этапе 2 параметры регулятора корректируются так, чтобы как в штатном, так и в аварийном режиме характеристики системы, определяемые исходными функционалами  $\hat{I}$  и  $\tilde{I}$ , были бы приемлемыми, т.е. выполнялись оба соотношения (1.1). Если соотношение (1.1) не выполняется, то переходят к этапу 4.

Этап 4. Структура найденного на предыдущем этапе регулятора усложняется повышением степеней числителя и знаменателя его передаточной функции. Тем самым увеличивается количество варьироваемых параметров. Далее переходят к этапу 2.

Все этапы решения задачи, кроме второго, могут быть реализованы с использованием стандартных процедур. Алгоритм решения задачи этапа 2 приведен в Приложении. Как было сказано выше, в его основу положен частотный критерий устойчивости. Критерий не только констатирует факт устойчивости либо неустойчивости замкнутой системы управления, но и позволяет находить значения коэффициентов регулятора, обеспечивающих устойчивость системы, в том числе и с многорежимным объектом. В Приложении приведен пример конструирования робастного относительно свойства устойчивости регулятора для объекта с четырьмя режимами функционирования. Алгоритм решения задачи, согласно приведенным этапам, продемонстрируем на тестовом примере.

**Пример 1.** Объект управления может находиться в двух режимах: штатном и аварийном. В первом его передаточная функция имеет вид

$$W_{0н}(s) = \frac{Q_{0н}(s)}{P_{0н}(s)} = \frac{1}{(s - 0.1)(s + 1)} = \frac{1}{s^2 + 0.9s - 0.1}.$$

В аварийном режиме передаточная функция объекта трансформируется в соотношение

$$W_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{1}{s^2 - 4s + 1}$$

с двумя полюсами из правой полуплоскости. На рис. 1 приведена система в штатном и аварийном режимах. На рис. 2, а представлены амплитудно-фазовые характеристики объекта в штатном (кривая 1) и в аварийном (кривая 2) режимах. Как видно, характеристики существенно различаются. Желаемая передаточная функция системы  $U_1(s)$  относительно задающего воздействия

$g_1(t)$  равна единице. В обоих режимах в системе должен обеспечиваться астатизм первого порядка. Качество работы системы в штатном и аварийном режимах оценивается одним и тем же критерием. Расчет ведется с использованием методики из [6].

Этап 1. Исходя из постановки задачи, запишем функционал, оценивающий качество работы системы в штатном режиме:

$$\hat{I} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| (U_1(s) - \tilde{H}_H(s)) \frac{1}{s} \right|^2 ds + \lambda \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |s\tilde{H}_H(s)|^2 ds - \rho_1 \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}_H(-s) \frac{1}{s+0.1} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}_H(s) \frac{1}{-s+0.1} ds - 2 \right). \quad (2.1)$$

Здесь

$$\tilde{H}_H(s) = \frac{W_1(s)W_{0H}(s)}{1 + W_1(s)W_{0H}(s)}$$

— передаточная функция системы относительно задающего воздействия  $g_1(t)$  при номинальном штатном режиме.

Первая составляющая в (2.1) обеспечивает астатизм и оценивает близость  $\tilde{H}_H(s)$  к  $U_1(s)$ , вторая — обеспечивает реализуемость звена коррекции, ее величина оценивает квадратичную интегральную составляющую переходного процесса [7]. Последняя составляющая есть ограничение на компенсацию звеном коррекции  $W_1(s)$  правого полюса передаточной функции объекта управления,  $\rho_1$  — множитель Лагранжа,  $\lambda$  — весовой коэффициент.

Функционал (2.1) при  $\lambda = 0.01$  и  $U_1(s) = 1$  достигает своего минимального значения, если исконая функция  $\tilde{H}_H(s)$  удовлетворяет уравнению Винера—Хопфа

$$\left( 0.01s(-s) + \frac{1}{s(-s)} \right) \tilde{H}_H(s) - \left( \frac{1}{s(-s)} + \rho_1 \frac{1}{s+0.1} \right) = \Gamma(s),$$

$\Gamma(s)$  — функция с полюсами из правой полуплоскости. Решая это уравнение, найдем

$$\tilde{H}_H(s) = \frac{10.914s + 1}{s^3 + 4.572s^2 + 10.447s + 1}.$$

Передаточная функция звена коррекции имеет вид

$$W_1(s) = \frac{V_1(s)}{G_1(s)} = \frac{\tilde{H}_H(s)}{W_{0H}(s)(1 - \tilde{H}_H(s))} = \frac{10.914s^2 + 11.914s + 1}{s(s + 4.672)}.$$

Первая составляющая функционала (2.1)  $\hat{I}_1 = 0.356$ , вторая —  $\hat{I}_2 = 13.316$ ,  $\hat{I} = 0.489$ . Проверку на устойчивость системы с найденным регулятором в аварийном режиме проведем с использованием предлагаемого частотного критерия устойчивости из Приложения. Рассмотрим функции

$$\Phi_H(j\omega) = \frac{P_{0H}(j\omega)G_1(j\omega) + Q_{0H}(j\omega)V_1(j\omega)}{(j\omega + 1)^4} - 1, \quad \Phi(j\omega) = \frac{P_0(j\omega)G_1(j\omega) + Q_0(j\omega)V_1(j\omega)}{(j\omega + 1)^4} - 1.$$

Числители функций  $\Phi_H(j\omega)$  и  $\Phi(j\omega)$  есть характеристические полиномы многорежимной системы с оптимальным регулятором. Как показано в Приложении, если годографы  $\Phi_H(j\omega)$  и  $\Phi(j\omega)$  в плоскости комплексного переменного при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности не охватывают точку с координатами  $(-1, j0)$ , то корни характеристических полиномов лежат в левой полуплоскости, т.е. система в замкнутом состоянии устойчива.

На рис. 2, б для найденного звена коррекции приведены годографы  $\Phi_H(j\omega)$  для объекта в штатном (кривая 1) и  $\Phi(j\omega)$  в аварийном режимах (кривая 2). По виду кривых можно сделать вывод, что робастная устойчивость в системе не обеспечивается. Годограф 2 точку с координатами  $(-1, j0)$  охватывает. В аварийном режиме система свойством устойчивости не обладает.

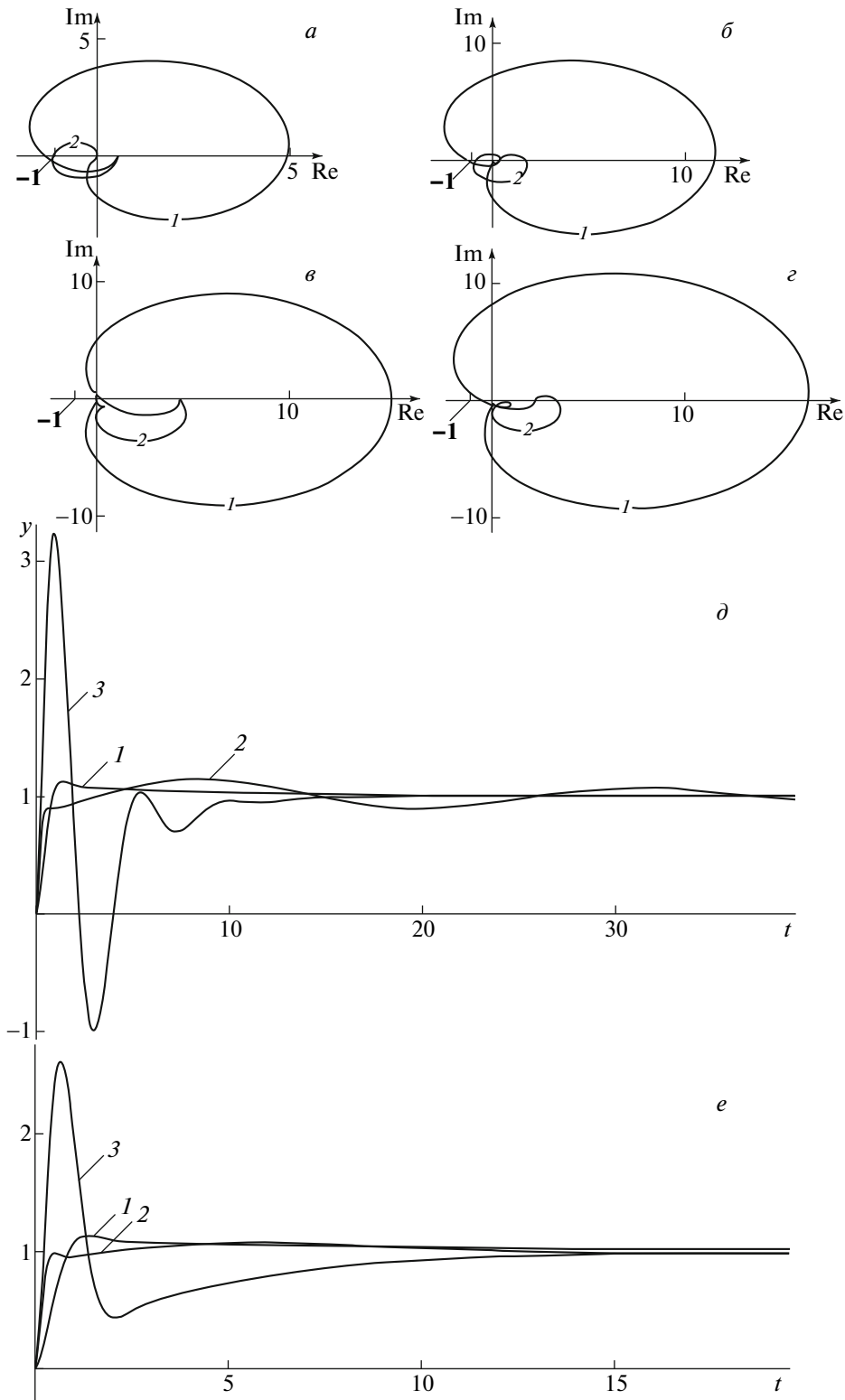


Рис. 3

Этап 2. С использованием методики из Приложения проведем коррекцию параметров передаточной функции  $W_1(s)$  так, чтобы в системе обеспечивалась робастная устойчивость.

На рис. 3, а приведены годографы  $\Phi(j\omega)$  для объекта в штатном (кривая 1) и аварийном режимах (кривая 2) после корректировки передаточной функции звена коррекции  $W_1(s)$  с использова-

нием оценки  $R_3$  из Приложения. Как видно, оптимизация оценки  $R_3$  по параметрам передаточной функции  $W_1(s)$  к решению задачи не привела. На рис. 3, а оба годографа  $\Phi(j\omega)$  точку с координатами  $(-1, j0)$  охватывают.

На рис. 3, б представлен результат оптимизации оценки  $R_4$  из Приложения: для объекта в штатном режиме годограф  $\Phi(j\omega)$  точку  $(-1, j0)$  охватывает, а в аварийном не охватывает. Робастная устойчивость не обеспечивается. В то же время оптимизация оценок  $R_1$  и  $R_2$  из Приложения по параметрам функции  $W_1(s)$  привела к следующему: годографы  $\Phi(j\omega)$  на рис. 3, в, г точку  $(-1, j0)$  не охватывают.

Для дальнейшего использования выбраны параметры регулятора, найденные в результате оптимизации критерия  $R_1$ . При таких параметрах годографы  $\Phi(j\omega)$  удалены от точки  $(-1, j0)$  на большее расстояние по сравнению с результатом оптимизации критерия  $R_2$ . Найденная передаточная функция регулятора, обеспечивающая системе свойство робастной устойчивости, имеет вид

$$W_{1p}(s) = \frac{V_{1p}(s)}{G_{1p}(s)} = \frac{23.767s^2 + 2.715s + 2.126}{0.397s^2 + 4.842s} = \frac{59.866s^2 + 6.839s + 5.355}{s^2 + 12.196s}. \quad (2.2)$$

Проведем оценку качества функционирования системы с найденным регулятором в штатном

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left( 1 - \frac{W_{0н}(s)W_{1p}(s)}{1 + W_{0н}(s)W_{1p}(s)} \right) \frac{1}{s} \right|^2 ds + 0.01 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{sW_{0н}(s)W_{1p}(s)}{1 + W_{0н}(s)W_{1p}(s)} \right|^2 ds = \\ &= \hat{I}_1 + 0.01\hat{I}_2 = 1.625, \quad \hat{I}_1 = 0.395, \quad \hat{I}_2 = 126.103 \end{aligned}$$

и аварийном режимах

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left( 1 - \frac{W_0(s)W_{1p}(s)}{1 + W_0(s)W_{1p}(s)} \right) \frac{1}{s} \right|^2 ds + 0.01 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{sW_0(s)W_{1p}(s)}{1 + W_0(s)W_{1p}(s)} \right|^2 ds = \\ &= \tilde{I}_1 + 0.01\tilde{I}_2 = 12.407, \quad \tilde{I}_1 = 9.706, \quad \tilde{I}_2 = 270.608. \end{aligned}$$

На рис. 3, д приведены графики переходных процессов. Кривая 1 – переходный процесс в системе с оптимальным звеном коррекции  $W_1(s)$  и объектом в штатном режиме, 2 и 3 – переходные процессы в системе с робастным регулятором  $W_{1p}(s)$  для объекта в штатном и аварийном режимах соответственно. Переход от оптимального регулятора  $W_1(s)$  к робастному регулятору  $W_{1p}(s)$  ухудшил качество переходного процесса системы в штатном режиме: появилась плохо затухающая колебательная составляющая. В случае аварийного режима величина перерегулирования слишком высока.

Этап 3. Уточним найденные параметры робастного относительно свойства устойчивости регулятора  $W_{1p}(s)$  из условия минимума критерия:

$$\begin{aligned} I &= \hat{I} + \chi\tilde{I} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left( 1 - \frac{W_{0н}(s)W_{1p}(s)}{1 + W_{0н}(s)W_{1p}(s)} \right) \frac{1}{s} \right|^2 ds + 0.01 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{sW_{0п}(s)W_{1p}(s)}{1 + W_{0п}(s)W_{1p}(s)} \right|^2 ds + \\ &+ \chi \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left( 1 - \frac{W_0(s)W_{1p}(s)}{1 + W_0(s)W_{1p}(s)} \right) \frac{1}{s} \right|^2 ds + 0.01 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{sW_0(s)W_{1p}(s)}{1 + W_0(s)W_{1p}(s)} \right|^2 ds \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Критерий (2.3) записан как линейная комбинация оценок (1.1). Его минимизация ведется по параметрам  $W_{1p}(s)$  при следующих ограничениях: коэффициенты двух характеристических полиномов

$$T_n(s) = P_{0н}(s)G_{1p}(s) + Q_{0н}(s)V_{1p}(s), \quad T(s) = P_0(s)G_{1p}(s) + Q_0(s)G_{1p}(s)$$

и составленные из них главные определители Гурвица больше нуля. За счет выбора весового коэффициента  $\chi$  можно менять вклад слагаемых  $\hat{I}$  и  $\tilde{I}$  в критерий (2.3), стремясь выполнить соотношение (1.1). Заметим, что в качестве начальных значений при минимизации критерия приняты коэффициенты робастного регулятора  $W_{1p}(s)$ . При этих коэффициентах корни характери-

Таблица

Регулятор	Режимы	Интегральные показатели			Переходные процессы
		$\hat{I}_1, \tilde{I}_1$	$\hat{I}_2, \tilde{I}_2$	$\hat{I}, \tilde{I}$	
Оптимальный для штатного режима $W_1(s) = \frac{10.914s^2 + 11.914s + 1}{s^2 + 4.672s}$	Штатный	0.356	13.316	0.489	Рис. 3, <i>д, е</i> (кривая 1)
	Аварийный	$\infty$	$\infty$	$\infty$	
Робастный относительно свойства устойчивости $W_{1p}(s) = \frac{59.866s^2 + 6.839s + 5.355}{s^2 + 12.196s}$	Штатный	0.395	126.103	1.625	Рис. 3, <i>д</i> (кривая 2)
	Аварийный	9.706	270.608	12.407	Рис. 3, <i>д</i> (кривая 3)
Робастный относительно свойства устойчивости и качества $W_{1p}^*(s) = \frac{64.524s^2 + 21.686s + 8.376}{s^2 + 10.538s}$	Штатный	0.158	173.24	1.89	Рис. 3, <i>е</i> (кривая 2)
	Аварийный	2.235	396.161	6.197	Рис. 3, <i>е</i> (кривая 3)

ческих полиномов  $T_n(s)$  и  $T(s)$  находятся в левой полуплоскости. В процессе минимизации они в правую полуплоскость не попадут, так как иначе будет нарушено ограничение на положительность главных определителей Гурвица.

Передаточная функция регулятора с уточненными из условия минимума критерия (2.3) коэффициентами при  $\chi = 1$  имеет вид

$$W_{1p}^* = \frac{64.524s^2 + 21.686s + 8.376}{s^2 + 10.538s}.$$

Величины составляющих функционала (2.3):

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + 0.01\hat{I}_2 = 0.158 + 0.01 \cdot 173.24 = 1.89;$$

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + 0.01\tilde{I}_2 = 2.235 + 0.01 \cdot 396.161 = 6.197; \quad I = 8.087.$$

На рис. 3, *е* приведены графики переходных процессов. Начальное значение критерия (2.3) регулятором (2.2) при  $\chi = 1$  равно 14.032.

В таблице приведены поэтапные результаты конструирования регулятора, робастного относительно свойства устойчивости и качества. При оценке качества сконструированной системы принимаются во внимание как величина составляющих критерия (1.1), так и вид переходных процессов. Если результаты неприемлемы, их можно улучшить, перейдя к этапу 4, или скорректировать требования к характеристикам системы.

**Заключение.** Предложена методика коррекции оптимального в штатном режиме регулятора с целью его удовлетворительного функционирования в аварийном режиме и близкого к оптимальному в штатном режиме. Методика основана на частотном критерии устойчивости и его оценках. Минимизация оценок позволяет корректировать параметры оптимального регулятора с целью придания многорежимной системе свойства робастной устойчивости. Предлагаемый способ решения задачи может быть использован для конструирования робастного регулятора и при большем, чем два, количестве режимов работы объекта управления.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим частотный критерий, который позволяет найти, если они существуют, параметры передаточной функции регулятора, обеспечивающего устойчивость системы, в том числе и с многорежимным объектом управления.

Частотный критерий устойчивости для однорежимного объекта. Рассмотрим систему с однорежимным объектом управления. Запишем характеристический полином замкнутой системы

$$T(s) = G_1(s)P_0(s) + V_1(s)Q_0(s),$$

здесь  $Q_0(s)/P_0(s) = W_0(s)$  – передаточная функция объекта управления;  $V_1(s)/G_1(s) = W_1(s)$  – передаточная функция регулятора;  $T(s)$  – характеристический полином замкнутой системы. Образует дробно-рациональную функцию

$$\Pi(s) = \frac{G_1(s)P_0(s) + V_1(s)Q_0(s)}{cD(s)} = \frac{T(s)}{cD(s)}, \quad (\text{П.1})$$

$cD(s)$  – полином с корнями из левой полуплоскости комплексного переменного, степени полиномов  $T(s)$  и  $cD(s)$ , а также коэффициенты при их старших степенях совпадают. В качестве функции  $cD(s)$  можно принять полином  $c(s+1)^n$ ,  $c > 0$ .

Рассмотрим функцию

$$\Phi(s) = \Pi(s) - 1.$$

Используя принцип аргумента [8], сформулируем критерий устойчивости системы с характеристическим полиномом  $T(s)$ . Для того, чтобы все корни полинома  $T(s)$  из (П.1) находились в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы годограф  $\Phi(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности в плоскости комплексного переменного точку с координатами  $(-1, j0)$  не охватывал. Сформулированный критерий можно интерпретировать как записанный в форме Найквиста частотный критерий Михайлова. Однако в отличие от критерия Найквиста в предлагаемом критерии независимо от количества правых полюсов в передаточной функции разомкнутой системы для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы годограф  $\Phi(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности повернулся вокруг точки  $(-1, j0)$  на нуль радиан.

Кроме вышеприведенного необходимого и достаточного критерия, могут быть сформулированы и достаточные критерии. Обратимся к рис. 4, а. На нем изображен годограф  $\Phi(j\omega)$  ( $\omega = 0 \dots \infty$ ), если

$$L_1 = \min_{\omega} \operatorname{Re} \Phi(j\omega) > -1, \quad (\text{П.2})$$

то корни  $T(s)$  находятся слева от мнимой оси. Очевидно, если значение  $L_1$  равно нулю, то весь годограф  $\Phi(j\omega)$  располагается в правой полуплоскости. Если

$$L_2 = \min_{\omega_i} \operatorname{Re} \Phi(j\omega_i) > -1, \quad \operatorname{Im} \Phi(j\omega_i) = 0, \quad (\text{П.3})$$

то корни  $T(s)$  находятся слева от мнимой оси.

Оценки выполнимости достаточных критериев устойчивости. Величины  $L_1, L_2$  есть прямые оценки выполнимости сформулированных выше достаточных критериев устойчивости. Алгоритм поиска регулятора, обеспечивающего устойчивость, заключается в максимизации величин  $L_1, L_2$  по параметрам регулятора  $W_1(s)$ .

Рассмотрим косвенные оценки. Под косвенными оценками понимаются некоторые числа, которые можно определить более простым способом, чем прямые оценки. Эти числа определенным образом связаны с прямыми оценками, так что по ним можно судить о прямых оценках. Практически во всех программных продуктах, предназначенных для численных расчетов, имеется функция условных выражений, например, в системе *Mathcad* – функция  $if(cond, x, y)$ , которая возвращает выражение  $x$ , если условие  $cond$  выполняется, и выражение  $y$  в остальных случаях [9]. С учетом сказанного соотношения

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} if(\operatorname{Re}(\Phi(j\omega)) < 0, |\Phi(j\omega)|^2, 0) d\omega, \quad (\text{П.4})$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} if((\operatorname{Re}(\Phi(j\omega)) < 0, |\operatorname{Re}(\Phi(j\omega))|), 0) d\omega \quad (\text{П.5})$$

могут служить такими косвенными оценками. Если величина этих интегралов равна нулю, годограф  $\Phi(j\omega)$  находится в правой полуплоскости и все корни полинома  $T(s)$  располагаются слева от мнимой оси.

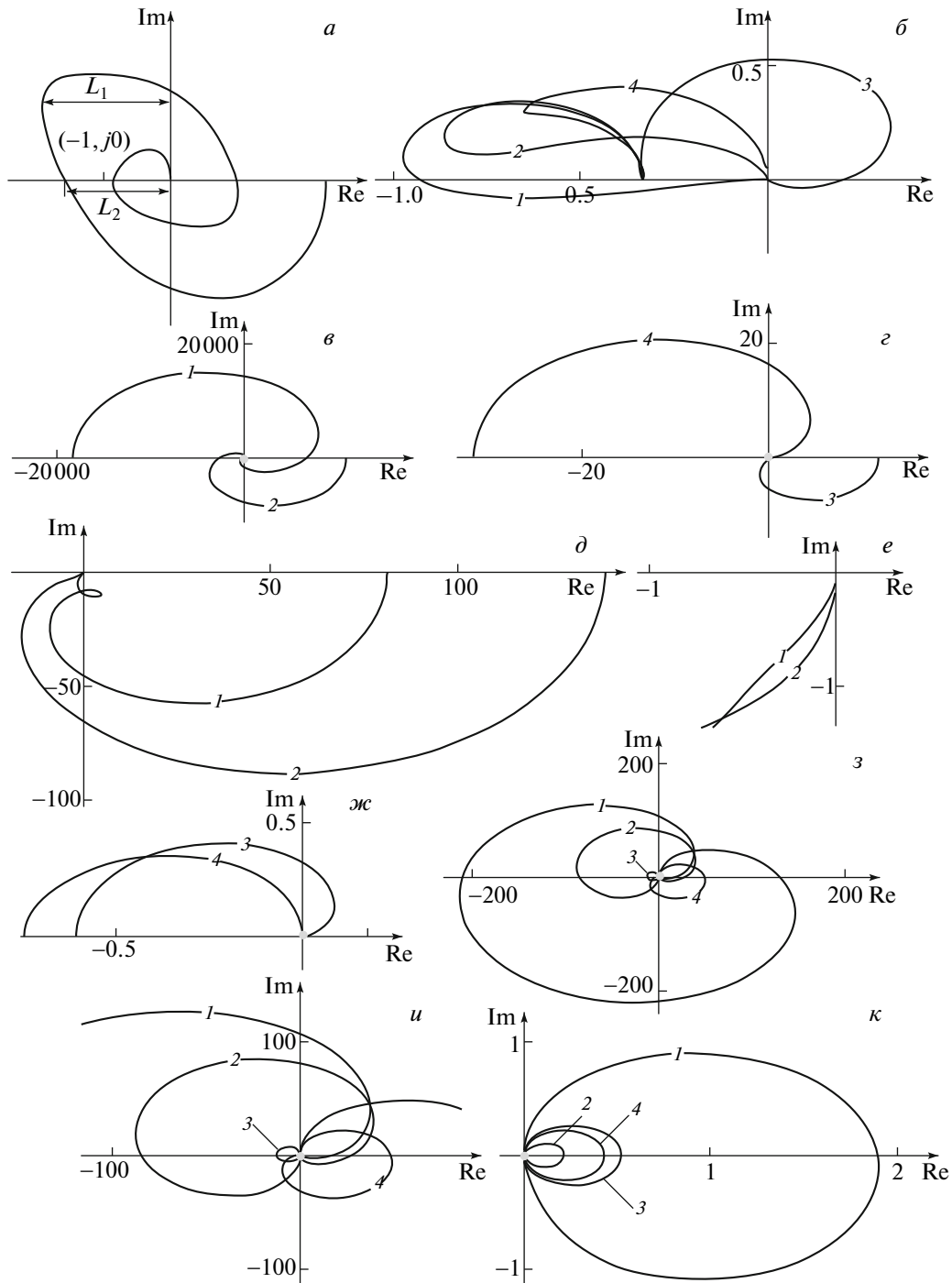


Рис. 4

Алгоритм поиска регулятора, обеспечивающего устойчивость, заключается в минимизации величин  $I_1$  или  $I_2$  по параметрам регулятора  $W_1(s)$ . Отметим, что найденные по параметрам  $W_1(s)$  оптимальные значения оценок не гарантируют нахождение корней полинома  $T(s)$  в левой полуплоскости. Препятствием на пути использования приведенных выше оценок для конструирования робастных систем может служить их невыпуклость, т.е. оценки могут иметь локальные экстремумы. Однако если принять, что локальные экстремумы у оценок не совпадают (численные эксперименты показывают, что это имеет место), а в процессе поиска годографа  $\Phi(j\omega)$  из левой



полуплоскости для оценок (П.2)–(П.5) перемещаются вправо, то при достижении локального экстремума одной из оценок можно продолжить поиск, переходя к следующей оценке, оптимизация которой будет продолжать перемещать годограф  $\Phi(j\omega)$  в правую полуплоскость. Кроме того, существуют стандартные процедуры поиска глобального оптимума [10], которые могут быть использованы при решении задачи.

Оценки выполнимости необходимого и достаточного условия критерия устойчивости. С использованием вышеприведенных оценок найти параметры регулятора, обеспечивающие устойчивость, не всегда возможно. Существуют такие системы, в которых свойство устойчивости имеет место, а достаточные условия не соблюдаются. В этих случаях приходится применять оценки выполнимости необходимого и достаточного условий критерия устойчивости. К сожалению, вычисление этих оценок сложнее, чем оценок выполнимости достаточного критерия устойчивости. Рассмотрим оценку

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Pi(j\omega) - 1|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{T(j\omega)}{cD(j\omega)} - 1 \right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega.$$

Расшифровка значений функций, входящих в  $I_3$ , приведена в начале Приложения.

Проводится минимизация  $I_3$  по параметрам регулятора и параметрам  $D(s)$  при условии, что главный определитель Гурвица  $D_n$  полинома  $D(s)$  больше нуля, т.е. корни полинома  $D(s)$  всегда находятся в левой полуплоскости. При малом значении  $I_3$  имеет место соотношение  $T(s) \approx cD(s)$ , но корни  $D(s)$  – из левой полуплоскости. Это в силу выполнения соотношения  $T(s) \approx cD(s)$  имеет место и для полинома  $T(s)$ . Отметим, если  $I_3 = 0$ , то корни полинома  $T(s)$  находятся в левой полуплоскости, но из условия нахождения корней полинома  $T(s)$  в левой полуплоскости не следует, что  $I_3 = 0$ .

Возможен и другой вариант оценки:

$$I_4 = \sum_{i=0}^n \alpha_i |a_i - b_i|, \quad a_i > 0, \quad D_n > 0,$$

здесь  $a_i$  и  $b_i$  – коэффициенты соответственно полиномов  $cD(s)$  и  $T(s)$ ,  $\alpha_i$  – весовые коэффициенты,  $D_n$  – главный определитель Гурвица, составленный из коэффициентов  $a_i$ .

Минимизация  $I_4$  ведется по параметрам регулятора и параметрам  $cD(s)$  при условии, что  $a_i$  и главный определитель Гурвица  $D_n$ , составленный из этих коэффициентов, больше нуля. При малом значении оценки  $I_4$  имеет место соотношение  $T(s) \approx cD(s)$ . Ограничение  $D_n > 0$  можно заменить условием

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |D^{-1}(j\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (\text{П.6})$$

Действительно, в начале поиска все корни полинома  $D(s)$  находятся в левой полуплоскости и ограничение  $D_n > 0$  соблюдается. Если в процессе поиска хотя бы один корень  $D(s)$  окажется на мнимой оси, то величина ограничения (П.6) будет бесконечной. Так что если условие (П.6) в процессе поиска всегда имеет место, то корни полинома  $D(s)$  из левой полуплоскости в правую полуплоскость не перейдут.

В связи со сказанным при поиске параметров регулятора с использованием процедур минимизации  $I_3$  и  $I_4$  ограничение  $D_n > 0$  можно не вводить, а ввести ограничение (П.6). Возможно совместное использование оценок  $I_3$  и  $I_4$ . Обоснование такого использования приведено в этом разделе выше.

Частотный критерий робастной устойчивости. Приведенные выше соотношения для однорежимного объекта обобщим на многорежимный объект. Передаточную функцию объекта, функционирующего в  $i$ -м режиме, обозначим  $W_{0i}(s) = Q_{0i}(s)/P_{0i}(s)$ . Составим функции вида (П.1)

$$\Pi_i(s) = \frac{G_1(s)P_{0i}(s) + V_1(s)Q_{0i}(s)}{c_i D_i(s)} = \frac{T_i(s)}{c_i D_i(s)}. \quad (\text{П.7})$$

Из них образуем функции

$$\Phi_i(s) = \Pi_i(s) - 1.$$

Для того чтобы система обладала свойством робастной устойчивости, необходимо и достаточно, чтобы годографы  $\Phi_i(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности в плоскости комплексного переменного точку с координатами  $(-1, j0)$  не охватывали. Аналогичным образом могут быть сформулированы и достаточные критерии как обобщение критериев (П.2) и (П.3) на многорежимные системы: если

$$L_{1i} = \min_{\omega} \operatorname{Re} \Phi_i(j\omega) > -1$$

или

$$L_{2i} = \min_{\omega_i} \operatorname{Re} \Phi_i(j\omega_i) > -1, \quad \operatorname{Im} \Phi_i(j\omega_i) = 0,$$

то система относительно свойства устойчивости является робастной.

Для поиска параметров робастного относительно свойства устойчивости регулятора могут быть использованы аналогичные соотношениям (П.2)–(П.5) оценки

$$R_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} L_{1i}, \quad R_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} L_{2i}, \quad R_3 = \sum_{i=1}^n \alpha_{3i} I_{1i}, \quad R_4 = \sum_{i=1}^n \alpha_{4i} I_{2i}, \quad (\text{П.8})$$

здесь  $n$  – количество режимов функционирования системы,  $\alpha_{ki}$  – весовые коэффициенты. Тестирование оценок (П.8) показало их эффективность. Сказанное поясним примером.

**Пример 2.** Объект функционирует в четырех режимах. Режимам соответствуют передаточные функции

$$W_{01}(s) = \frac{3660s^2 - 13140s + 9120}{s^4 + 16s^3 - 3559s^2 + 20786s - 27480}, \quad W_{02}(s) = \frac{5160s - 5520}{s^4 + 16s^3 + 101s^2 - 4834s + 16440},$$

$$W_{03}(s) = \frac{-6.5625}{s^3 + 5s^2 + 10.1875s + 19.3125}, \quad W_{04}(s) = \frac{-17.6400s + 15.1200}{s^2 + 20.8400s - 45.6800}.$$

$W_{0i}(s) = Q_{0i}(s)/P_{0i}(s)$  (здесь и далее  $i$  – номер режима). Передаточные функции  $W_{0i}(s)$  имеют разное количество нулей и полюсов из правой полуплоскости: у функции  $W_{01}(s)$  их соответственно 2 и 3, у  $W_{02}(s)$  – 1 и 2, у  $W_{03}(s)$  – все нули и полюса из левой полуплоскости, у  $W_{04}(s)$  – 1 и 1. На рис. 4, б приведены соответствующие им амплитудно-фазовые характеристики. Структура передаточной функции регулятора задана  $W_1(s) = V_1(s)/G_1(s) = (v_1s + v_0)/(g_1s + g_0)$ . Необходимо найти численное значение параметров регулятора, обеспечивающего устойчивость системы в четырех режимах функционирования.

На рис. 4, в, г для каждого из режимов при начальных значениях коэффициентов передаточной функции регулятора, равных единице, т.е.  $W_1(s) = (s + 1)/(s + 1)$ , приведены годографы функций

$$\Phi_i(j\omega) = \frac{G_1(s)P_{0i}(s) + V_1(s)Q_{0i}(s)}{c_i(s + 1)^n} - 1 = \frac{T_i(s)}{c_i(s + 1)^n} - 1, \quad (\text{П.9})$$

$n$  – порядок характеристического полинома  $T_i(s)$ , индексы годографов совпадают с номером режима. К сожалению, ввиду несовместимости масштабов функций  $\Phi_i(j\omega)$  они изображены отдельно на рис. 4, в и г.

На рис. 4, д, е в различных масштабах приведены годографы рис. 4, в после поиска параметров звена коррекции с использованием первой оценки из (П.8). На рис. 4, ж представлены годографы рис. 4, г после проведения той же процедуры и той же оценки. Годографы точки с координатами  $(-1, j0)$  не охватывают. В результате была найдена передаточная функция регулятора

$$W_1(s) = (8.656s - 25.342)/(8.545s - 8.436),$$

обеспечивающего робастную устойчивость объекта во всех четырех режимах его работы. Как видно из рис. 4, *в, з*, годографы  $\Phi_i(j\omega)$  приходится выполнять в разных масштабных сетках, что нецелесообразно в том числе и для функционирования алгоритма поиска параметров звена коррекции. Для того чтобы годографы  $\Phi_i(j\omega)$  размещались на одном рисунке и при начальных параметрах поиска имели величины оценок (П.8) одного порядка, вместо полинома  $c_i(s+1)^n$  в (П.9) можно использовать функции вида

$$\Phi_i(s) = \frac{T_i(s)}{c_i \left( s + \left| \frac{g_0 p_{0i} + v_0 q_{0i}}{c_i} \right|^{n-1} \right)^n} - 1,$$

здесь  $g_0, p_{0i}, v_0, q_{0i}$  — соответственно свободные коэффициенты полиномов  $G_1(s), P_{0i}(s), V_1(s), Q_{0i}(s)$ . Начальные значения коэффициентов  $g_0$  и  $v_0$  должны удовлетворять системе неравенств

$$g_0 p_{0i} + v_0 q_{0i} > 0.$$

В этом случае годографы  $\Phi_i(j\omega)$  начинаются и заканчиваются в начале координат плоскости комплексного переменного. На рис. 4, *з, и* для регулятора с передаточной функцией  $W_1(s) = (s - 30)/(s - 10)$  в разных масштабах рассмотрены четыре годографа  $\Phi_i(j\omega)$ . Как видно, такой регулятор робастной устойчивости не обеспечивает. Поиск параметров  $W_1(s)$  с использованием второй оценки из (П.8) привел к результатам, приведенным на рис. 4, *к*. Все четыре годографа  $\Phi_i(j\omega)$  располагаются в правой полуплоскости. Передаточная функция робастного относительно свойства устойчивости регулятора имеет вид

$$W_1(s) = \frac{33.320s - 99.688}{33.333s - 33.157}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Ким Д.П. Синтез систем управления максимальной робастной степени устойчивости // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 5. С. 52–57.
3. Александров А.Г. Запасы устойчивости и робастная устойчивость // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 6. С. 32–41.
4. Зотов М.Г. Об одном подходе к конструированию робастных систем // АиТ. 2010. № 11. С. 149–158.
5. Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г. Основы статистической теории автоматических систем. М.: Машиностроение, 1974.
6. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2004.
7. Кухтенко В.И. К расчету корректирующих цепей систем автоматического управления по критерию минимума среднеквадратичной ошибки // АиТ. 1959. № 9. С. 1180–1187.
8. Теория автоматического управления. Ч. 1 / Под ред. А.А. Воронова. М.: Высш. шк., 1977.
9. Дьяконов В. П. Mathcad 2000. СПб: ПИТЕР, 2001.
10. Жигляевский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.