ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

А.С. Шведов

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ В МНОГОПЕРИОДНОЙ ПОРТФЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Препринт WP2/2007/02
Серия WP2
Количественный анализ
в экономике

Москва
ГУ ВШЭ
2007

УДК 336.763.3
ББК 65.262.2
Ш34

Издание осуществлено в рамках
Инновационной образовательной программы ГУ ВШЭ
«Формирование системы аналитических компетенций
для инноваций в бизнесе и государственном управлении»

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Шведов А.С. Интерполяция сплайнами в многопериодной портфельной задаче: Препринт
Ш 34 WP2/2007/02. — М.: ГУ ВШЭ, 2007. — 32 с.

В работе изучается байесовский подход к составлению портфелей с использованием стохастического динамического программирования. Для уменьшения объема вычислений применяется интерполяция сплайнами. Предлагается тестовое решение рассматриваемой задачи составления портфеля. Приводятся результаты расчетов.

Классификация JEL: C61, G11.

Ключевые слова: составление портфеля; интерполяция сплайнами; байесовские выводы; стохастическое динамическое программирование.

УДК 336.763.3
ББК 65.262.2

Shvedov A.S. Spline Interpolation and the Multiperiod Portfolio Models: Working paper WP2/ 2007/02. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2007. — 32 p. (in Russian)

The paper approaches portfolio selection by dynamic stochastic programming in a Bayesian framework. Interpolation by spline functions is implemented to avoid the computational burden. A solution for testing of the method to the portfolio selection problem is suggested. Results of the test are presented.

JEL Classification: C61, G11.

Key phrases: Portfolio selection; Spline interpolation; Bayesian inference; Dynamic stochastic programming.

Препринты ГУ ВШЭ размещаются на сайте:
http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx.

1. Введение

Весь опыт двадцатого века показывает, что командная экономика неизбежно приводит к очень тяжелым последствиям для населения. В то же время рыночная экономика успешно работает и в мирное, и в военное время.

В предпринимательской деятельности, без которой рыночная экономика невозможна, возникает задача о рассредоточении вкладов, называемая также портфельной задачей.

Начало создания портфельной теории относится ко времени появления первых компьютеров, т.е. к середине двадцатого века. Сложность расчетов, требуемых этой теорией, такова, что они не могут быть проведены вручную и вряд ли на механическом калькуляторе.

Создателем портфельной теории иногда называют Марковица. Хотя это утверждение нуждается в уточнении. Разделы портфельной теории, созданные в пятидесятые годы двадцатого века Марковицем, не просто являются важными, они являются основополагающими для всей современной портфельной теории. Но многие серьезные исследования, относящиеся к портфельной теории, были выполнены за последующие пятьдесят лет и другими учеными. Портфельная теория продолжает развиваться и теперь. Поэтому утверждать, что Марковиц создал всю портфельную теорию, конечно, нельзя. Основные результаты Марковица по портфельной теории опубликованы в книге [20]. Из последующих книг по портфельной теории назовем [10], [13], [14], [25], [26].

В условиях социализма как обязательной для всех системы, включающей в себя и командную экономику, а такая система существовала в нашей стране вплоть до последнего десятилетия двадцатого века, работы по портфельной теории, видимо, считались не только ненужными, но и идеологически вредными, направленными на получение наживы. Если не единственная, то одна из очень немногих публикаций того времени в нашей стране по портфельной теории — это [3, гл. 4].

В книге автора [7] сделана попытка представить наиболее важные результаты, полученные за первые пятнадцать лет существования портфельной теории. Без хорошего понимания этой теории, результаты которой широко применяются в развитых капиталистических странах, полноправное вхождение в мировую экономику невозможно. А науку нельзя понять, если не знать историю этой науки.

Однопериодная портфельная задача (а только такие задачи рассматриваются в [7]) состоит в следующем. Пусть известны цены некоторых активов в моменты времени $-s, -s+1, \dots -1, 0$. Соответственно, известны доходности этих активов за один период $r_{-s+1}, \dots, r_{-1}, r_0$. Здесь при любом j доходность r_j — это n-мерный вектор, где n — количество активов. В момент времени 0 при начальном капитале w_0 требуется составить из рассматриваемых активов портфель, стоимость которого к моменту времени 1 отвечала бы некоторым заранее наложенным условиям. Эти условия формулируются в терминах распределения вероятностей.

В многопериодной портфельной задаче при известных доходностях $r_{-s+1}, \dots, r_{-1}, r_0$ аналогичным условиям должна отвечать стоимость портфеля в некоторый заранее выбранный момент времени $T > 1$, где T — целое число. Вновь требуется составить портфель при начальном капитале w_0 в момент времени 0. После того, как в моменты времени $1, \dots, T-1$ станут известны доходности активов $r_1, \dots, r_{T-1}$, в каждый из этих моментов времени может быть принято решение об изменении состава портфеля.

Подчеркнем, что рассматриваемая нами задача является именно многопериодной, а не обязательно долгосрочной. Промежуток времени длины 1 может быть и достаточно коротким.

Из работ, связанных с многопериодной портфельной задачей, назовем [9], [10], [12], [15]—[19], [21]—[24], [27]—[30].

В разделе 2 настоящей работы дается описание для многопериодной задачи процедуры выбора оптимального в смысле некоторых критериев портфеля. Основные идеи этой процедуры представлены в [30]. Из более ранних работ, в которых рассматриваются близкие подходы, назовем [15], [17], [19], [21]. Кроме того, в разделе 2 обсуждается возможность использования интерполяции для приближенной, но более быстрой реализации данной процедуры. Такой прием применяется, например, в [27].

Для процедуры составления оптимального портфеля необходима некоторая эконометрическая модель для доходностей $r_{-s+1}, \dots, r_0, r_1, \dots, r_T$. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением модели для доходностей, когда все эти случайные вектора независимы, нормальны и одинаково распределены. Эта эконометрическая модель в рамках байесовского подхода рассматривается в разделе 3. В частности, в этом разделе содержится вывод прогнозного распределения вероятностей, которое применяется в процедуре составления оптимального портфеля. Описание деталей этой общепринятой модели объясняется их использованием в разделе 5 при построении тестового решения.

Для интерполяции применяются кубические сплайны, предложенные автором в работе [6]. Описание этих сплайнов дается в разделе 4.

В разделе 5 при $T = 2$ предлагается тестовое решение задачи составления оптимального портфеля, предназначенное для проверки точности процедуры, изложенной в разделе 2.

В разделе 6 описывается организация расчета. В разделе 7 представлены результаты расчетов.

2. Процедура принятия решения о параметрах портфеля

При $t = 0, 1, \dots, T-1$ параметры портфеля, создаваемого в момент времени t, обозначим $d_t = \left(d_t^1, d_t^2, \dots, d_t^n\right)'$. При любом t должно выполняться соотношение

$$d_t^1 + d_t^2 + \dots + d_t^n = 1.$$

Положительное значение параметра d_t^j соответствует длинной позиции по j-му активу, отрицательное значение параметра d_t^j соответствует короткой позиции по j-му активу, нулевое значение параметра d_t^j означает отсутствие j-го актива в портфеле. (Подробно смысл длинной и короткой позиции объясняется в [7]. Если $0 \le d_t^j \le 1$ при любом $j = 1, 2, \dots, n$, то d_t^j — это доля капитала, вложенного в момент времени t в j-й актив.)

В этой работе рассматривается задача, когда платы за изменение портфеля в конце каждого периода нет. Тогда капитал в момент времени T рассчитывается по формуле

$$w_T(d_0, r_1, d_1, r_2, \dots, d_{T-1}, r_T) = w_0 \prod_{t=0}^{T-1} \left(1 + r_{t+1}\right)' d_t;$$

в данной формуле $1 = (1, \dots, 1)'$ — n-мерный вектор.

В процедуре принятия решения участвует некоторая функция полезности. В данной работе рассматривается функция полезности

$$u(w) = -\exp\left(-\frac{w}{\gamma}\right),$$

где $\gamma > 0$. Ожидаемая в момент времени $T-1$ полезность

$$v_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1}) =$$
$$= E_{T-1}(u(w_T(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1}, r_T))).$$

Отложим до конца раздела 3 обсуждение вопроса, относительно какого n-мерного распределения вероятностей случайного вектора r_T берется ожидание E_{T-1}. Практически для расчета может быть использована формула

$$v_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1}) =$$
$$= \frac{1}{l}\sum_{\iota=1}^{l} u(w_T(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1}, r_{T,\iota})),$$

где l — некоторое натуральное число, а $r_{T,1}, r_{T,2}, ..., r_{T,l}$ — случайная выборка из того n-мерного распределения вероятностей, относительно которого берется ожидание E_{T-1}. Затем ожидаемая полезность максимизируется по d_{T-1}:

$$u_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-2}, r_{T-1}) =$$
$$= \max_{d_{T-1}} v_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., r_{T-1}, d_{T-1}).$$

Дальнейшее движение назад по времени проводится аналогично. Определяется

$$v_{T-2}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-2}) =$$
$$= E_{T-2}(u_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-2}, r_{T-1})).$$

Опять отложим обсуждение вопроса, относительно какого n-мерного распределения вероятностей случайного вектора r_{T-1} берется ожидание E_{T-2}. Практически для расчета $v_{T-2}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-2})$ может быть использована формула, аналогичная той, которая используется для расчета $v_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1})$, где вместо

$$u(w_T(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1}, r_{T,\iota}))$$

стоит $u_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-2}, r_{T-1,\iota})$. Затем определяется

$$u_{T-2}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-3}, r_{T-2}) =$$
$$= \max_{d_{T-2}} v_{T-2}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., r_{T-2}, d_{T-2}).$$

И так далее. Наконец, определяется

$v_1(d_0, r_1, d_1) = E_1(u_2(d_0, r_1, d_1, r_2))$.

Вновь мы не уточняем пока, относительно какого n-мерного распределения вероятностей случайного вектора r_2 берется ожидание E_1. Затем рассчитывается

$$u_1(d_0, r_1) = \max_{d_1} v_1(d_0, r_1, d_1),$$

и затем

$$v_0(d_0) = E_0(u_1(d_0, r_1)),$$

где вновь откладывается обсуждение того, относительно какого n-мерного распределения вероятностей случайного вектора r_1 берется ожидание E_0.

Аргумент, при котором достигается максимум функции $v_0(d_0)$, и есть искомый набор параметров d_0. Представленная процедура принятия решения о параметрах портфеля d_0 относится к методам стохастического динамического программирования.

Логически прямолинейная реализация описанной процедуры состоит в следующем. Пусть существуют k различных наборов параметров портфеля d, которые могут быть использованы. При каждом из k возможных значений вектора d_0 и при каждом из l возможных значений вектора r_1 определяется капитал к моменту времени 1:

$$w_1(d_0, r_1) = w_0\left(1 + r_1\right)' d_0.$$

Затем при каждом из k возможных значений вектора d_1 и при каждом из l возможных значений вектора r_2 определяется капитал к моменту времени 2:

$$w_2(d_0, r_1, d_1, r_2) = w_1(d_0, r_1)\left(1 + r_2\right)' d_1.$$

И так далее до момента времени T, когда определяется $w_T(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1}, r_T)$. Этот этап расчета называется «индукция вперед».

Затем по приведенным выше формулам рассчитываются $v_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1})$ и $u_{T-1}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-2}, r_{T-1})$. Затем рассчитываются $v_{T-2}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-2})$ и $u_{T-2}(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-3}, r_{T-2})$. И так далее до момента времени 0, когда определяется $v_0(d_0)$. Затем определяется точка d_0, в которой функция $v_0(d_0)$ достигает максимума. Этот этап расчета называется «индукция назад».

Число траекторий (d_0, r_1), используемых для периода 1, умножается на число траекторий (d_1, r_2), используемых для периода 2. Полученное произведение умножается на число траекторий (d_2, r_3), используемых для периода 3, и т.д. Таким образом, в расчете используется $(lk)^T$ траекторий вида $(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{T-1}, r_T)$. Объем вычислительной работы при этом, как правило, становится очень большим, во многих случаях, даже невыполнимо большим.

Но существует прием, позволяющий, грубо говоря, заменить операцию умножения, о которой говорится в предыдущем абзаце, на операцию сложения, что существенно уменьшает объем вычислительной работы.

При описанной прямолинейной реализации по построенной траектории $(d_0, r_1, d_1, r_2, ..., d_{t-1}, r_t)$ определяется, во-первых, капитал w_t и, во-вторых, те характеристики траектории, которые используются для нахождения распределения вероятностей, относительно которого берется ожидание E_t. При этом для многих траекторий и капитал, и указанные характеристики оказываются близкими, но в прямолинейной реализации процедуры это никак не учитывается.

Однако эта близость траекторий позволяет использовать интерполяцию. Чтобы не загромождать обозначения, мы опишем интерполяцию при $T = 2$, но аналогичным образом интерполяция может быть сделана и при любом числе периодов. К краткому обсуждению случая произвольного T мы возвращаемся в разделе 6.

Берется некоторая сетка w^i на интервале возможных значений капитала, который может быть получен к моменту времени 1 при различных d_0 и r_1. Также берется некоторая сетка x^j в области возможных значений той характеристики траектории (d_0, r_1), от которой зависит используемое распределение вероятностей случайного вектора r_2.

Для каждой пары (w^i, x^j) и для каждой пары (d_1, r_2) рассчитывается капитал

$$w_2(w^i, x^j, d_1, r_2) = w^i \left(1 + r_2\right)' d_1$$

(фактически этот капитал не зависит от x^j, но удобнее включить x^j в число аргументов в левой части). Затем определяется

$$v_1(w^i, x^j, d_1) = E_1(u(w_2(w^i, x^j, d_1, r_2)))$$

(и здесь существенно включение x^j в число аргументов в левой части, поскольку от x^j зависит распределение вероятностей, относительно которого берется ожидание E_1). Затем рассчитывается

$$u_1(w^i, x^j) = \max_{d_1} v_1(w^i, x^j, d_1).$$

Непосредственное определение $v_0(d_0)$ по формуле

$$v_0(d_0) = \frac{1}{l} \sum_{\iota=1}^{l} u_1(d_0, r_{1,\iota})$$

невозможно, поскольку при индукции назад определяются величины $u_1(w^i, x^j)$, а не величины $u_1(d_0, r_{1,\iota})$. Однако для каждой траектории $(d_0, r_{1,\iota})$ известны капитал w_1 к моменту времени 1 и характеристика траектории x. Поэтому при каждом ι величина $u_1(d_0, r_{1,\iota})$ может быть определена путем интерполяции с сетки (w^i, x^j) величин $u_1(w^i, x^j)$. Затем рассчитывается $v_0(d_0)$ при заданном d_0. После этого находится точка d_0, в которой функция $v_0(d_0)$ достигает максимума.

Метод динамического программирования создан Беллманом. Автор затрудняется ответить на вопрос, кому принадлежит идея использовать интерполяцию в задачах стохастического динамического программирования. Приведем в связи с этим следующую цитату из книги [4, с. 10]: «Насколько мы можем судить, отдельные части этой книги оригинальны. Конкретные же формулы или отдельные результаты уже появлялись в печати раньше. Поскольку, к сожалению, мы не имеем ни малейшего понятия о том, где и когда большинство из них было опубликовано впервые, мы оставляем историкам право указать, кому принадлежит честь их открытия. Однако мы проявили бы непростительную небрежность, если бы не упомянули тех, кто внес наиболее существенный вклад в разработку основных идей в данной области. Нет нужды говорить о том, что мы в долгу у Неймана, Пирсона, Джеффриса, фон Неймана, Вальда, Блекуэлла, Гиршика и Сэвиджа». Как уже сказано выше, одна из последних работ, где в задачах стохастического динамического программирования используется интерполяция, это [27].

3. Эконометрическая модель для доходностей

В этой работе мы ограничимся рассмотрением модели для доходностей, в которой все случайные вектора $r_{-s+1}, ..., r_0, r_1, ..., r_T$ независимы, нормальны и одинаково распределены,

$$E(r_\nu) = \mu, \qquad Var(r_\nu) = Q^{-1}, \ \nu = -s+1, ..., T,$$

ожидание μ неизвестно (т.е. не используется при расчете параметров портфеля), а матрица точности Q известна (т.е. используется при расчете параметров портфеля). Матрица Q предполагается невырожденной.

В процедуре принятия решения о параметрах портфеля, изложенной в разделе 2, удобно использовать байесовский подход. Будем считать априорное распределение μ нормальным с ожиданием μ_Λ и с матрицей точности Λ, т.е. априорная функция плотности

$$f(\mu) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu-\mu_\Lambda)'\Lambda(\mu-\mu_\Lambda)\right).$$

Поскольку прогнозное распределение вероятностей этой эконометрической модели играет основную роль в том тестовом решении, которое строится в разделе 5, ниже приводится вывод прогнозного распределения.

Функция правдоподобия

$$lik(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_\nu (r_\nu-\mu)'Q(r_\nu-\mu)\right),$$

t – целое неотрицательное число, суммирование по ν здесь и далее ведется от $-s+1$ до t. Будем использовать обозначение

$$\bar r = \frac{1}{s+t}\sum_\nu r_\nu .$$

Тогда

$$\sum_\nu (r_\nu-\mu)'Q(r_\nu-\mu) = \sum_\nu (r_\nu-\bar r+\bar r-\mu)'Q(r_\nu-\bar r+\bar r-\mu) =$$

$$=\sum_\nu (r_\nu-\bar r)'Q(r_\nu-\bar r)+(\bar r-\mu)'Q\sum_\nu (r_\nu-\bar r)+\sum_\nu (r_\nu-\bar r)'Q(\bar r-\mu)+$$

$$(s+t)(\mu-\bar r)'Q(\mu-\bar r) = \sum_\nu (r_\nu-\bar r)'Q(r_\nu-\bar r)+(s+t)(\mu-\bar r)'Q(\mu-\bar r)\ .$$

Поэтому

$$lik(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu-\bar r)'((s+t)Q)(\mu-\bar r)\right).$$

Используем выражение для апостериорной функции плотности $f(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t)$ через априорную функцию плотности и функцию правдоподобия

$$f(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t) \propto f(\mu)\cdot lik(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t)$$

(см., например, [2], [11]). Введем обозначения

$$M = Q+\frac{1}{s+t}\Lambda,\ \ a = M^{-1}\left(\frac{1}{s+t}\Lambda\mu_\Lambda+Q\bar r\right).$$

Для суммы аргументов экспонент, входящих в произведение $f(\mu)\cdot lik(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t)$, без учета множителя $-\frac{1}{2}$ получаем

$$(\mu-\mu_\Lambda)'\Lambda(\mu-\mu_\Lambda)+(\mu-\bar r)'((s+t)Q)(\mu-\bar r) =$$

$$=(\mu-a+a-\mu_\Lambda)'\Lambda(\mu-a+a-\mu_\Lambda)+$$

$$+(\mu-a+a-\bar r)'((s+t)Q)(\mu-a+a-\bar r) =$$

$$=(\mu-a)'(\Lambda+(s+t)Q)(\mu-a)+\ \mu'\Lambda(a-\mu_\Lambda)+\ (a-\mu_\Lambda)'\Lambda\mu+$$

$$+\mu'((s+t)Q)(a-\bar r)+\ (a-\bar r)'((s+t)Q)\mu+\dots,$$

где многоточие — это члены, не содержащие μ. Сумма второго и четвертого слагаемых из правой части

$$\mu'\Lambda(a-\mu_\Lambda)+\ \mu'((s+t)Q)(a-\bar r) = \ \mu'\Big((\Lambda+(s+t)Q)a-\Lambda\mu_\Lambda-(s+t)Q\bar r\Big) =$$

$$=\frac{1}{s+t}\mu'\left(M\,a-\left(\frac{1}{s+t}\Lambda\mu_\Lambda+Q\bar r\right)\right)=0$$

по определению вектора a и матрицы M. Сумма третьего и пятого слагаемых из правой части

$$(a-\mu_\Lambda)'\Lambda\mu+\ (a-\bar r)'((s+t)Q)\mu =$$

$$\Big(a'(\Lambda+(s+t)Q)-(\mu_\Lambda)'\Lambda-\bar r'((s+t)Q)\Big)\mu =$$

$$=\frac{1}{s+t}\left(a'M-\left(\frac{1}{s+t}\Lambda\mu_\Lambda+Q\bar r\right)'\right)\mu = 0$$

по определению вектора a и матрицы M. Таким образом, правая часть имеет вид

$$(\mu-a)'((s+t)M)(\mu-a)+\dots$$

Поэтому апостериорная функция плотности

$$f(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu-a)'((s+t)M)(\mu-a)\right).$$

Прогнозная функция плотности определяется соотношением

$$f(r_{t+1}\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t) = \int_{R^n} f_N(r_{t+1};\mu,Q^{-1})f(\mu\,|\,r_{-s+1},\dots,r_t)d\mu,$$

где $f_N(r_{t+1};\mu,Q^{-1})$ — функция плотности n-мерного нормального распределения с ожиданием μ и с ковариационной матрицей Q^{-1}. Введем обозначение

$$L=(s+t)M\ .$$

Тогда из найденного выражения для апостериорной функции плотности, используя обозначение r вместо r_{t+1}, получаем, что

$$f(r\,|\,r_{-s+1},...,r_t)\propto\int\limits_{R^n}\exp\left(-\frac{1}{2}(r-\mu)'Q(r-\mu)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(\mu-a)'L(\mu-a)\right)d\mu.$$

Введем обозначения

$$K=L+Q\ ,\ b=K^{-1}(La+Qr).$$

Для суммы аргументов экспонент, входящих в подинтегральную функцию, без учета множителя $-\frac{1}{2}$ получаем

$$\begin{gathered}(\mu-r)'Q(\mu-r)+(\mu-a)'L(\mu-a)=\\ =(\mu-b+b-r)'Q(\mu-b+b-r)+\\ +(\mu-b+b-a)'L(\mu-b+b-a)=\\ =(\mu-b)'Q(\mu-b)\ +(\mu-b)'Q(b-r)\ +(b-r)'Q(\mu-b)\ +(b-r)'Q(b-r)+\\ +(\mu-b)'L(\mu-b)+\ (\mu-b)'L(b-a)\ +(b-a)'L(\mu-b)\ +(b-a)'L(b-a).\end{gathered}$$

Сумма второго и шестого слагаемых из правой части

$$(\mu-b)'(Q(b-r)+L(b-a)).$$

Из определения вектора b следует, что

$$(Q+L)b-Qr-La=La+Qr-Qr-La=0.$$

Поэтому сумма второго и шестого слагаемых из правой части равна нулю. Сумма третьего и седьмого слагаемых из правой части

$$((b-r)'Q+(b-a)'L)(\mu-b)$$

также равна нулю, поскольку, как только что было установлено, равен нулю первый сомножитель.

Следовательно, подинтегральная функция имеет вид

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(b-r)'Q(b-r)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(b-a)'L(b-a)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(\mu-b)'K(\mu-b)\right).$$

Первые два сомножителя не зависят от μ и могут быть вынесены из под знака интеграла. После этого легко увидеть, что значение интеграла не зависит от b и, следовательно, не зависит от r. Поэтому

$$\begin{gathered}f(r\,|\,r_{-s+1},...,r_t)\propto\\ \propto\exp\left(-\frac{1}{2}(b-r)'Q(b-r)\right)\cdot\ \exp\left(-\frac{1}{2}(b-a)'L(b-a)\right).\end{gathered}$$

Для суммы аргументов экспонент, входящих в последнее произведение, без учета множителя $-\frac{1}{2}$ получаем

$$\Sigma=(b-r)'Q(b-r)+(b-a)'L(b-a)\ .$$

Из определения вектора b и матрицы K получаем

$$b-r=K^{-1}(La+Qr-Kr)=K^{-1}L(a-r)$$

и

$$b-a=K^{-1}(La+Qr-Ka)=K^{-1}Q(r-a)\ .$$

Соответственно,

$$(b-r)'=(a-r)'LK^{-1}\ ,\ (b-a)'=(r-a)'QK^{-1}\ .$$

Поэтому

$$\Sigma=(r-a)'(LK^{-1}QK^{-1}L+QK^{-1}LK^{-1}Q)(r-a)\ .$$

Рассмотрим матрицу

$$C=Q^{-1}+L^{-1}=Q^{-1}+\frac{1}{s+t}M^{-1}\ .$$

Тогда, если I — единичная $n\times n$ матрица, то

$$\begin{gathered}(LK^{-1}QK^{-1}L)^{-1}=L^{-1}(L+Q)Q^{-1}(L+Q)L^{-1}=\ (I+L^{-1}Q)Q^{-1}QQ^{-1}(I+QL^{-1})=\\ =(Q^{-1}+L^{-1})Q(Q^{-1}+L^{-1})=CQC\end{gathered}$$

и аналогично

$$\begin{gathered}(QK^{-1}LK^{-1}Q)^{-1}=Q^{-1}(L+Q)L^{-1}(L+Q)Q^{-1}=\ (Q^{-1}L+I)L^{-1}LL^{-1}(LQ^{-1}+I)=\\ =(Q^{-1}+L^{-1})L(Q^{-1}+L^{-1})=CLC\ .\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\Sigma=(r-a)'(C^{-1}Q^{-1}C^{-1}+C^{-1}L^{-1}C^{-1})(r-a)=\\ =(r-a)'C^{-1}CC^{-1}(r-a)=(r-a)'C^{-1}(r-a)\ .\end{gathered}$$

Таким образом,

$$f(r\,|\,r_{-s+1},...,r_t) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(r-a)'C^{-1}(r-a)\right).$$

Прогнозное распределение случайного вектора r_{t+1} — это n-мерное нормальное распределение с ожиданием a и с ковариационной матрицей C.

В разделе 2 ожидание E_t берется относительно прогнозного распределения случайного вектора r_{t+1}.

4. Интерполяция сплайнами

Под сплайном в данной работе мы будем понимать кубический сплайн класса C^1, определение этого сплайна приводится ниже. О других сплайнах см., например, [1], [5].

Пусть $[a,b]$ — отрезок действительной прямой R, и пусть дано некоторое разбиение этого отрезка

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b.$$

Функция $f:[a,b] \to R$ называется кубическим сплайном класса C^1, если выполнены следующие два условия.

1. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,2,..., N-1$, функция $f(x)$ совпадает с некоторым многочленом не выше, чем третьей степени, т.е. при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$f(x) = \alpha_{0,i}x^3 + \alpha_{1,i}x^2 + \alpha_{2,i}x + \alpha_{3,i},$$

где $\alpha_{0,i}, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \alpha_{3,i}$ — некоторые действительные числа.

2. $f \in C^1[a,b]$, т.е. функция f дифференцируема на $[a,b]$, и ее производная непрерывна на $[a,b]$.

Пусть $f_1, f_2, ..., f_{N-1}, f_N$ — некоторые заданные действительные числа. Задача, которую мы рассматриваем, состоит в построении такого сплайна, для которого выполняются условия

$$f(x_i) = f_i \text{ при } i = 1,2,..., N-1, N.$$

Эти условия будем называть условиями интерполяции, а сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции, — интерполяционным сплайном.

Можно показать, что для любого набора чисел $g_1, g_2, ..., g_{N-1}, g_N$ существует кубический сплайн класса C^1, для которого выполняются условия интерполяции и условия

$$f'(x_i) = g_i \text{ при } i = 1,2,..., N-1, N,$$

причем наборами чисел $f_1, f_2, ..., f_{N-1}, f_N$ и $g_1, g_2, ..., g_{N-1}, g_N$ сплайн определяется однозначно. Это легко увидеть, приведя выражения для коэффициентов $\alpha_{0,i}, \alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \alpha_{3,i}$ через f_i, g_i, f_{i+1}, g_{i+1}.

Поэтому построение интерполяционного кубического сплайна класса C^1 — это выбор чисел $g_1, g_2, ..., g_{N-1}, g_N$. От выбора этих чисел существенно зависят свойства интерполяционного сплайна.

Прежде чем говорить о свойствах сплайна, введем некоторые обозначения. Пусть $h_i = x_{i+1} - x_i$ — длина отрезка разбиения,

$$\delta_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \text{ — первая разделенная разность,}$$

$$\delta_i^2 = \frac{\delta_{i+1} - \delta_i}{h_i + h_{i+1}} \text{ — вторая разделенная разность.}$$

В работе [6] автором предложен способ построения интерполяционных кубических сплайнов класса C^1, обладающих следующими свойствами.

1. Монотонность. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,2,..., N-1$, сплайн $f(x)$ является монотонной функцией. Эта функция монотонно возрастающая при $f_i < f_{i+1}$, монотонно убывающая при $f_i > f_{i+1}$ и постоянная при $f_i = f_{i+1}$.

2. Ограниченность первой и второй производных. Выполняются соотношения

$$\max_{a \le x \le b} |f'(x)| \le A \max_{1 \le i \le N-1} |\delta_i|, \quad \max_{a \le x \le b} |f''(x)| \le B \max_{1 \le i \le N-2} |\delta_i^2|,$$

где A — абсолютная константа, B – константа, зависящая лишь от $x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N$. В частности, из неравенства для второй производной вытекает, что если $f_1, f_2, ..., f_{N-1}, f_N$ — значения линейной функции в точках $x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N$, то сплайн $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ является линейной функцией.

Приведем данный в работе [6] способ определения чисел $g_1, g_2, ..., g_{N-1}, g_N$. Точки $(x_1, f_1), (x_2, f_2), ..., (x_{N-1}, f_{N-1}), (x_N, f_N)$ называются узлами сплайна. Введем два дополнительных узла

$$x_0 = 2x_1 - x_2,\ f_0 = 2f_1 - f_2,\ x_{N+1} = 2x_N - x_{N-1},\ f_{N+1} = 2f_N - f_{N-1}.$$

При $i = 1, 2, ..., N$ положим

$$g_i = \begin{cases} sign\,\delta_i \cdot \min(|\delta_{i-1}|, |\delta_i|) & \textit{при} \quad sign\,\delta_{i-1} = sign\,\delta_i \\ 0 & \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь $sign\, y$ — знак действительного числа y, т.е.

$$sign\, y = \begin{cases} -1, & \textit{если}\ \ y < 0 \\ 0, & \textit{если}\ \ y = 0 \\ 1, & \textit{если}\ y > 0 \end{cases}$$

В работе [6] показано, что при таком определении чисел $g_1, g_2, ..., g_{N-1}, g_N$ сплайн $f(x)$ обладает свойствами 1 и 2, т.е. является монотонной функцией на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., N-1$, и справедливы неравенства для первой и второй производных из свойства 2 с константами

$A = \frac{3}{2}$,

$$B = 6 \max_{1 \le i \le N-1} \max\left(\frac{h_i + h_{i+1}}{h_i}, \frac{h_i + h_{i+1}}{h_{i+1}} \right).$$

Особенностью данного сплайна является то, что на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., N-1$, он обладает точкой перегиба, т.е. точкой, в которой выполняется условие $f''(x) = 0$. Это означает, что являясь хорошим с точки зрения сохранения монотонности интерполируемой функции и ограниченности первой и второй производных, данный способ построения интерполяционных сплайнов является плохим с точки зрения сохранения выпуклости интерполируемой функции. Данная проблема обсуждается и в работе [6]. Нетрудно увидеть, что интерполяционный сплайн не может одновременно сохранять и монотонность, и выпуклость интерполируемой функции.

5. Тестовое решение задачи, используемое для проверки изложенной процедуры принятия решения о параметрах портфеля

Если число периодов $T = 2$, для доходностей $r_{-s+1}, ..., r_{-1}, r_0, r_1, r_2$ используется эконометрическая модель, описанная в разделе 3, и натуральное

число s велико, то для задачи стохастического динамического программирования, описанной в разделе 2, приближенное решение может быть построено аналитическим методом, в котором лишь на последнем этапе включается численный алгоритм поиска максимума функции.

Ожидание для прогнозного распределения случайного вектора r_1 имеет вид

$$a = M^{-1}\left(\frac{1}{s}\Lambda\mu_\Lambda + Q\frac{1}{s}\sum_{\nu=-s+1}^{0} r_\nu \right),$$

где $M = Q + \frac{1}{s}\Lambda$; ожидание для прогнозного распределения случайного вектора r_2 имеет вид

$$a = M^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\Lambda\mu_\Lambda + Q\frac{1}{s+1}\sum_{\nu=-s+1}^{1} r_\nu \right),$$

где $M = Q + \frac{1}{s+1}\Lambda$ (см. раздел 3). Во втором случае ожидание зависит не только от «исторических данных» $r_{-s+1}, ..., r_{-1}, r_0$, но и от реализованного на траектории значения случайного вектора r_1. Однако при больших s вкладом r_1 в величину a и отличием коэффициента $\frac{1}{s+1}$ от коэффициента $\frac{1}{s}$ можно пренебречь и считать, что ожидание для прогнозного распределения случайного вектора r_2 совпадает с ожиданием для прогнозного распределения случайного вектора r_1. Также будем считать, что ковариационная матрица случайного вектора r_2 совпадает с ковариационной матрицей случайного вектора r_1 (матрица C в разделе 3).

Если распределение случайного вектора r_2 — это n-мерное нормальное распределение с ожиданием a и с ковариационной матрицей C, то распределение случайной величины

$$w_2 = w_1 \left(1 + r_2\right)' d_1$$

– это нормальное распределение, ожидание и дисперсия которого определяются по формулам

$$\mu_1 = w_1 \left(1 + a\right)' d_1,\ \sigma_1^2 = w_1^2\,(d_1)'\,C\,d_1.$$

Тогда (о выборе полезности $u(w_2)$ сказано в разделе 2)

$$v_1(d_0,r_1,d_1)=E_1(u(w_2))=-\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{y}{\gamma}\right)\exp\left(-\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)dy.$$

Для суммы аргументов экспонент, входящих в подинтегральное выражение, получаем

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_1^2}-2y\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}\right)=-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(y^2-2y\left(\mu_1-\frac{\sigma_1^2}{\gamma}\right)+\mu_1^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(\left(y-\left(\mu_1-\frac{\sigma_1^2}{\gamma}\right)\right)^2+\mu_1^2-\left(\mu_1-\frac{\sigma_1^2}{\gamma}\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(y-\left(\mu_1-\frac{\sigma_1^2}{\gamma}\right)\right)^2-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(2\mu_1\frac{\sigma_1^2}{\gamma}-\frac{\sigma_1^4}{\gamma^2}\right).$$

Поэтому

$$v_1(d_0,r_1,d_1)=-\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2\mu_1}{\gamma}-\frac{\sigma_1^2}{\gamma^2}\right)\right).$$

Следующий шаг состоит в нахождении

$$u_1(d_0,r_1)=\max_{d_1}v_1(d_0,r_1,d_1).$$

Для этого следует найти условный максимум функции $\frac{2\mu_1}{\gamma}-\frac{\sigma_1^2}{\gamma^2}$ при условии $1'\,d_1=1$, где $1'=(1,\ldots,1)$. Запишем функцию Лагранжа

$$L=2\frac{w_1}{\gamma}\left(1+a\right)'d_1-\frac{w_1^2}{\gamma^2}(d_1)'\,C\,d_1-\lambda(1'd_1-1).$$

Воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial Ax}{\partial x}=A'\,,\ \frac{\partial x'Ax}{\partial x}=(A+A')x,$$

где x — n-мерный вектор, а A — матрица такой размерности, чтобы было выполнимо умножение. Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial d_1}=2\frac{w_1}{\gamma}\left(1+a\right)-2\frac{w_1^2}{\gamma^2}Cd_1-\lambda\cdot 1.$$

Приравняв частную производную нулю, получаем

$$2\frac{w_1^2}{\gamma^2}Cd_1=2\frac{w_1}{\gamma}\left(1+a\right)-\lambda\cdot 1\,,$$

откуда

$$d_1=\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-1}C^{-1}(1+a)-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-2}C^{-1}\cdot 1.$$

Из условия $1'\,d_1=1$ получаем

$$1=\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-1}1'\,C^{-1}(1+a)-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-2}1'\,C^{-1}\cdot 1,$$

откуда

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{1'\,C^{-1}(1+a)}{1'\,C^{-1}\cdot 1}\frac{w_1}{\gamma}-\frac{1}{1'\,C^{-1}\cdot 1}\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^2.$$

Если ввести обозначения

$$\varsigma=-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{1'\,C^{-1}\cdot 1}\,,\ \ \eta=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1'\,C^{-1}(1+a)}{1'\,C^{-1}\cdot 1}\,,$$

то

$$\frac{\lambda}{2}=\eta\,w_1+\varsigma\,w_1^2\,.$$

Отсюда возможная точка условного экстремума

$$d_1=\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-1}C^{-1}(1+a)-(\eta\,w_1+\varsigma\,w_1^2)\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-2}C^{-1}\cdot 1.$$

Из вида функции $v_1(d_0,r_1,d_1)$ как функции аргумента d_1 и из условия $1'\,d_1=1$ нетрудно увидеть, что условный максимум у этой гладкой функции есть. И единственная точка, для которой выполняется необходимое условие условного максимума, — это найденная точка d_1.

Но в данном случае нас интересует не сама точка условного максимума, а значение максимизируемой функции в этой точке. Имеем

$$d_1=\left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-1}C^{-1}\Big((1+a)-\gamma(\eta+\varsigma\,w_1)\cdot 1\Big),$$

и если ввести вектор

$$b = (1+a) - \gamma\,\eta \cdot 1,$$

то

$$d_1 = \left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^{-1} C^{-1}\left(b - \gamma\varsigma\, w_1 \cdot 1\right).$$

Тогда

$$\frac{2\mu_1}{\gamma} = 2\frac{w_1}{\gamma}\left(1+a\right)' d_1 = 2\left(1+a\right)' C^{-1}\left(b - \gamma\,\varsigma\, w_1 \cdot 1\right),$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\gamma^2} = \left(\frac{w_1}{\gamma}\right)^2 (d_1)' C\, d_1 = \left(b' - \gamma\varsigma\, w_1 \cdot 1'\right) C^{-1}\left(b - \gamma\varsigma\, w_1 \cdot 1\right).$$

Введем обозначение

$$\theta = 2(1+a)' C^{-1} b - b' C^{-1} b.$$

Имеем

$$\frac{2\mu_1}{\gamma} - \frac{\sigma_1^2}{\gamma^2} = \theta - 2\gamma\,\varsigma\, w_1 (1+a)' C^{-1} \cdot 1 + \gamma\,\varsigma\, w_1 1' C^{-1} b +$$

$$+\gamma\,\varsigma\, w_1 b' C^{-1} \cdot 1 - \gamma^2 \varsigma^2\, w_1^2 1' C^{-1} \cdot 1 =$$

$$= \theta - 2\gamma\,\varsigma\, w_1 \cdot \gamma\,\eta\; 1' C^{-1} \cdot 1 - \gamma^2 \varsigma^2\, w_1^2 1' C^{-1} \cdot 1 =$$

$$= \theta + 2\eta w_1 + \varsigma w_1^2.$$

Таким образом, если определить функцию

$$U(w_1) = -\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\varsigma w_1^2 + 2\eta w_1 + \theta\right)\right),$$

то $u_1(d_0, r_1) = U(w_1)$, где $w_1 = w_0\left(1+r_1\right)' d_0$.

Функция $U(w_1)$ как функция аргумента w_1 может рассматриваться как функция полезности. Поскольку $\varsigma < 0$, при достаточно больших w_1 данная функция является монотонно убывающей, что парадоксально для функции полезности. Однако если выбрать параметр γ того же масштаба, что и капитал w_0, и считать, что все моделируемые доходности по абсолютной величине существенно меньше 1, то функция $U(w_1)$ пре-

вращается из монотонно возрастающей в монотонно убывающую при настолько больших w_1, что сделанное замечание не имеет практического значения.

Если распределение случайного вектора r_1 — это n-мерное нормальное распределение с ожиданием a и с ковариационной матрицей C, то распределение случайной величины

$$w_1 = w_0\left(1+r_1\right)' d_0$$

– это нормальное распределение, ожидание и дисперсия которого определяются по формулам

$$\mu_0 = w_0\left(1+a\right)' d_0,\ \sigma_0^2 = w_0^2\,(d_0)' C\, d_0.$$

Тогда

$$v_0(d_0) = E_0(U(w_1)) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\varsigma y^2 + 2\eta y + \theta\right)\right) \exp\left(-\frac{(y-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) dy.$$

Для суммы аргументов экспонент, входящих в подинтегральное выражение, без учета множителя $-\frac{1}{2}$ получаем

$$\Sigma = y^2\left(\varsigma + \frac{1}{\sigma_0^2}\right) + 2y\left(\eta - \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) + \theta + \frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2},$$

что после замены

$$z = y\sqrt{\varsigma + \frac{1}{\sigma_0^2}} = y\frac{\sqrt{\varsigma\sigma_0^2 + 1}}{\sigma_0}$$

(при условии, что выражение, стоящее под корнем, положительно, а это так, если выбрать параметр γ того же масштаба, что и капитал w_0, и считать, что все моделируемые доходности по абсолютной величине существенно меньше 1) дает

$$\Sigma = z^2 + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{\varsigma\sigma_0^2 + 1}}\left(\eta - \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) z + \frac{\sigma_0^2}{\varsigma\sigma_0^2 + 1}\left(\eta - \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)^2 + G,$$

где

$$G=\theta+\frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}-\frac{\sigma_0^2}{\varsigma\sigma_0^2+1}\left(\eta-\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\Sigma=\left(z+\frac{\sigma_0}{\sqrt{\varsigma\sigma_0^2+1}}\left(\eta-\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\right)^2+G.$$

Поэтому

$$v_0(d_0)=-\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\varsigma\sigma_0^2+1}}\exp\left(-\frac{1}{2}G\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(z+\frac{\sigma_0}{\sqrt{\varsigma\sigma_0^2+1}}\left(\eta-\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\right)^2\right)dz=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\varsigma\sigma_0^2+1}}\exp\left(-\frac{1}{2}G\right).$$

Точка условного максимума функции $v_0(d_0)$ при условии $1'\,d_0=1$ может быть найдена с использованием того или иного численного метода. Например, может быть использован метод, о котором говорится в разделе 6. Так найденная точка условного максимума d_0 и есть то приближенное решение, которое используется для проверки процедуры, описанной в разделе 2.

6. Организация расчета

В этом разделе дается описание конкретной реализации процедуры, изложенной в разделе 2. Описание этой реализации необходимо, чтобы можно было изложить результаты расчетов. Как и в последней части раздела 2, рассмотрение ведется для случая $T=2$.

Во-первых, обратимся к вопросу, каким способом строится сетка (w^i,x^j), и что является той характеристикой x траектории (d_0,r_1), от которой зависит прогнозное распределение случайного вектора r_2.

Как показано в разделе 3, прогнозное распределение случайного вектора r_2 — это n-мерное нормальное распределение с ожиданием a и с ковариационной матрицей C. Матрица C зависит лишь от момента времени t, в данном случае $t=1$, и не зависит ни от каких характеристик траектории. Ожидание a зависит от вектора $\overline{r}=\frac{1}{s+1}\sum_{\nu=-s+1}^{1}r_\nu$, что сводится к зависимости от r_1, поскольку «исторические данные» $r_{-s+1},\dots,r_{-1},r_0$ одинаковы для всех траекторий. Поэтому характеристика x является n-мерным вектором $\overline{r}$.

Для построения сетки (w^i,x^j) проводится пилотный расчет, соответствующий одному шагу индукции вперед от момента времени 0 до момента времени 1. При выбранных значениях k и l при каждом из k возможных значений вектора d_0 и при каждом из l возможных значений вектора r_1 определяется капитал к моменту времени 1: $w_1(d_0,r_1)=w_0\left(1+r_1\right)'d_0$, $w_{\min}$ и $w_{\max}$ — соответственно, минимальное и максимальное значения капитала по всем траекториям (d_0,r_1). Строится сетка, например, равномерная на отрезке $[w_{\min},w_{\max}]$:

$$w_{\min}=w^1<w^2<\dots<w^{N-1}<w^N=w_{\max},$$

и таким способом определяются точки w^i. Также при этом пилотном расчете определяются вектора

$$\overline{r}_\iota=\frac{1}{s+1}\left(r_{1,\iota}+\sum_{\nu=-s+1}^{0}r_\nu\right),\ \iota=1,2,\dots,l.$$

Возможны разные подходы к тому, как при выбранном q сделать сетку $x^1,x^2,\dots,x^q$ достаточно хорошо представляющей все множество построенных векторов $\overline{r}_\iota$. При принятой реализации в качестве x^1 берется вектор $\overline{r}_\iota$, ближайший к вектору $\frac{1}{s}\sum_{\nu=-s+1}^{0}r_\nu$. При $j=2,\dots,q$ в качестве x^j берется вектор $\overline{r}_\iota$, наиболее удаленный от множества векторов $x^1,\dots,x^{j-1}$.

После того как сетка (w^i,x^j), $i=1,2,\dots,N$; $j=1,2,\dots,q$ построена, для каждой точки сетки (w^i,x^j) проводится расчет, включающий один шаг индукции вперед (от момента времени 1 до момента времени 2) и один шаг индукции назад (от момента времени 2 до момента времени 1). На шаге индукции вперед при выбранных значениях k и l при каждом из k возможных значений вектора d_1 и при каждом из l возможных значений вектора r_2 определяется капитал к моменту времени 2:

$$w_2(w^i, x^j, d_1, r_2) = w^i\left(1 + r_2\right)' d_1 ,$$

вектора r_2 берутся из распределения с характеристикой x^j. На шаге индукции назад рассчитываются

$$v_1(w^i, x^j, d_1) = \frac{1}{l}\sum_{\iota=1}^{l} u(w_2(w^i, x^j, d_1, r_{2,\iota}))$$

и

$$u_1(w^i, x^j) = \max_{d_1} v_1(w^i, x^j, d_1) .$$

Затем проводится расчет, включающий один шаг индукции вперед (от момента времени 0 до момента времени 1) и один шаг индукции назад (от момента времени 1 до момента времени 0). На шаге индукции вперед при выбранных значениях k и l при каждом из k возможных значений вектора d_0 и при каждом из l возможных значений вектора r_1 определяется капитал к моменту времени 1:

$$w_1(d_0, r_{1,\iota}) = w_0\left(1 + r_{1,\iota}\right)' d_0 , \ \iota = 1, 2, ..., l .$$

Также определяется точка x^j, ближайшая к $\overline{r}_\iota$, и фиксируется данное значение j. При этом значении j проводится интерполяция сплайном на сетке $w^1, w^2, ..., w^{N-1}, w^N$ значений $u_1(w^i, x^j)$. В качестве $u_1(d_0, r_{1,\iota})$ берется значение сплайна в точке $w_1(d_0, r_{1,\iota})$. Если значение $w_1(d_0, r_{1,\iota})$ не попадает в отрезок $[w_{\min}, w_{\max}]$, то вместо интерполяции сплайном проводится экстраполяция по двум крайним значениям. После этого делается шаг индукции назад

$$v_0(d_0) = \frac{1}{l}\sum_{\iota=1}^{l} u_1(d_0, r_{1,\iota}) ,$$

и определяется точка d_0, в которой функция $v_0(d_0)$ достигает максимума.

И в пилотном расчете, и в расчете для периода 2, и в расчете для периода 1 могут выбираться свои значения k и l. Но и для пилотного расчета, и для расчета для периода 1 набор случайных векторов $r_{1,\iota}$, $\iota = 1, 2, ..., l$ остается одним и тем же для всех рассматриваемых d_0, а для расчета для периода 2 набор случайных векторов $r_{2,\iota}$, $\iota = 1, 2, ..., l$ остается одним и тем же для всех рассматриваемых w^i, x^j и d_1. Иначе результат оказывается зависящим не только от параметров, влияние которых необходимо отследить, но и от конкретного набора случайных векторов.

Аналогичным образом интерполяция может быть включена в процедуру принятия решения и при любом числе периодов T. Сначала производится расчет от момента времени $T-1$ до момента времени T. Затем производится расчет от момента времени $T-2$ до момента времени $T-1$ и т.д.

При нахождении $\max_{d_1} v_1(w^i, x^j, d_1)$ и $\max_{d_0} v_0(d_0)$ максимальное значение сначала определяется на сетке, состоящей из k точек d_1 или d_0. При прямолинейной реализации процедуры, о которой говорится в разделе 2, когда интерполяция не проводится, последующее включение численных методов поиска максимума функции приводит к существенному усложнению алгоритма. Когда интерполяция проводится, включение численных методов поиска максимума функции осуществляется значительно легче, весь пересчет не выходит за пределы одного периода.

Нами используется численный метод нахождения максимума, являющийся вариантом метода подъема по градиенту, когда в направлении точки максимума передвигаются несколько точек. Описание этого метода приведено в [8, Приложение 4]. Поскольку для компонент вектора d выполняется соотношение $d^n = 1 - d^1 - ... - d^{n-1}$, во всех случаях ищется максимум функции $(n-1)$ переменной $d^1, ..., d^{n-1}$.

И в пилотном расчете, и в расчете для периода 2, и в расчете для периода 1 используется некоторая сетка, состоящая из k точек n-мерного пространства d, каждая точка d представляет собой набор параметров портфеля и удовлетворяет условию $1' d = 1$.

Данная сетка определяется натуральным числом m и действительным числом $\xi \geq 1$. Сначала строится сетка из k точек

$$\tilde{d} = (\tilde{d}^1, \tilde{d}^2, ..., \tilde{d}^n)' .$$

Каждый из параметров $\tilde{d}^1, \tilde{d}^2, ..., \tilde{d}^n$ принимает все возможные значения

$$\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ..., \frac{m-1}{m}, \frac{m}{m},$$

но с соблюдением условия $1' \tilde{d} = 1$. Например, при $m = 20$ число точек сетки $k = 231$, при $m = 30$ число точек сетки $k = 496$. Вектор d определяется затем по вектору $\tilde{d}$ соотношением

$$d = \xi\left(\tilde{d} - \frac{1}{n}\cdot 1\right) + \frac{1}{n}\cdot 1,$$

т.е. происходит растяжение сетки, и это позволяет рассматривать вектора d и с некоторыми отрицательными компонентами. Соотношение $1' d = 1$ при этом выполняется.

7. Результаты расчетов

В данном разделе проводится сравнение параметров портфеля, рассчитанных с использованием процедуры, изложенной в разделах 2 и 6, с параметрами портфеля, рассчитанными методом, описанным в разделе 5.

Приведем параметры, которые остаются одними и теми же для всех расчетов, результаты которых приводятся в данном разделе.

Число периодов $T = 2$.

Число активов $n = 3$.

Начальный капитал $w_0 = 10$.

Параметр функции полезности $\gamma = 10$.

Число «наблюдений» $s = 5000$. «Наблюдения» $r_{-s+1}, ..., r_{-1}, r_0$ строятся, как значения независимых трехмерных нормальных случайных векторов с ожиданием

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.111689783, & 0.101626331, & 0.099084505 \end{pmatrix}'$$

и с ковариационной матрицей

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0.001917578 & 0.000768118 & 0.000608742 \\ 0.000768118 & 0.001787244 & 0.001157042 \\ 0.001157042 & 0.001157042 & 0.002302292 \end{pmatrix}$$

«Наблюдения» остаются одними и теми же для всех расчетов. Среднее всех «наблюдений»

$$\frac{1}{s} \sum_{\nu=-s+1}^{0} r_\nu = \begin{pmatrix} 0.112337034, & 0.102686398 & 0.099720370 \end{pmatrix}'.$$

При этом, как уже сказано в разделе 2, вектор μ в расчете параметров портфеля не используется.

Априорное распределение берется с ожиданием

$$\mu_\Lambda = \begin{pmatrix} 0.1, & 0.1, & 0.1 \end{pmatrix}'$$

и с матрицей точности $\Lambda = Q$.

При выбранных значениях параметров тестовое решение, построенное методом, изложенным в разделе 5, оказывается равным

$$d_{0*} = \begin{pmatrix} d_{0*}^1, & d_{0*}^2, & d_{0*}^3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5.033583, & -1.543494, & -2.488342 \end{pmatrix}'.$$

При пилотном расчете для капитала в момент времени 1 получены следующие минимальное и максимальное значения:

$$w_{\min} = -10.151027448\,,\ w_{\max} = 32.487605506\,.$$

Число различных прогнозных распределений, используемых для периода 2, $q = 5$. Характеристики этих распределений при пилотном расчете получены следующие:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0.112321280, & 0.102648699, & 0.099670269 \end{pmatrix}',$$
$$x^2 = \begin{pmatrix} 0.112365039, & 0.102725068, & 0.099758487 \end{pmatrix}',$$
$$x^3 = \begin{pmatrix} 0.112294398, & 0.102684853, & 0.099731586 \end{pmatrix}',$$
$$x^4 = \begin{pmatrix} 0.112365837, & 0.102692087, & 0.099699481 \end{pmatrix}',$$
$$x^5 = \begin{pmatrix} 0.112346424, & 0.102674505, & 0.099749538 \end{pmatrix}'.$$

Параметр, отвечающий за растяжение сетки, составленной из точек d, $\xi = 16$.

В пилотном расчете при построении сетки, составленной из точек d, используется значение $m = 30$. И в расчете для периода 1, и в расчете для периода 2 при построении сетки, составленной из точек d, используется значение $m = 20$.

В пилотном расчете берется число случайных векторов $l = 5000$. В расчете для периода 1 берется число случайных векторов $l = 200000$. В расчете для периода 2 берется число случайных векторов $l = 10000$.

При различных N на отрезке $[w_{\min}, w_{\max}]$ строится равномерная сетка $w_{\min} = w^1 < w^2 < ... < w^{N-1} < w^N = w_{\max}$, и с использованием процедуры, описанной в разделах 2 и 6, определяется набор параметров портфеля, $d_0 = \begin{pmatrix} d_0^1, & d_0^2, & d_0^3 \end{pmatrix}$ при котором достигает максимума функция $v_0(d_0)$.

Для оценки близости полученного решения к тестовому решению используется показатель

$$\delta = \sqrt{(d_{0*}^1 - d_0^1)^2 + (d_{0*}^2 - d_0^2)^2 + (d_{0*}^3 - d_0^3)^2}\,.$$

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

N	d_0			δ
7	4.435508	−1.311268	−2.124240	0.737694
13	5.038750	−1.551790	−2.486961	0.009871
21	5.046779	−1.560130	−2.486650	0.021302
31	5.046314	−1.563997	−2.482317	0.024875
41	5.047924	−1.564821	−2.483103	0.026229
51	5.044846	−1.564342	−2.480504	0.024959

За исключением расчета с $N = 7$ совпадение наборов параметров d_0 с набором d_{0*} можно считать удовлетворительным. Начиная с некоторого значения числа узлов сплайна, дальнейшее увеличение N не приводит к увеличению точности. Это естественно, поскольку остаются фиксированными такие параметры, как l и q. Интересно отметить, что точка d_0, полученная при $N = 13$, оказывается ближе к точке d_{0*}, чем точки d_0, полученные при $N \geq 21$.

Точка d_{0*}, используемая в качестве тестового решения, является приближенным, а не точным решением рассматриваемой задачи. Основным упрощением, используемым при получении решения d_{0*}, является предположение об одинаковости всех прогнозных распределений. В самой исследуемой процедуре такое упрощающее предположение не делается. И тем не менее результаты оказываются достаточно близкими.

8. Литература

[1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.

[2] Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. М.: Статистика, 1977.

[3] Райфа Г. Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[4] Райфа Х., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений. М.: Статистика, 1977.

[5] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.

[6] Шведов А.С. Интерполяция локальными кубическими сплайнами и построение поверхности, проходящей через заданные точки. Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР. 1983. № 91.

[7] Шведов А.С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг. М.: Высшая школа экономики, 1999.

[8] Шведов А.С. Математические основы и оценка параметров эконометрических моделей состояние-наблюдение. М.: ГУ ВШЭ, 2005.

[9] Aguilar O., West M. Bayesian Dynamic Factor Models and Variance Matrix Discounting for Portfolio Allocation // J. of Business and Economic Statistics. 2000. Vol. 18. P. 338—357.

[10] Bawa V.S., Brown S.J., Klein R.W. Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice. Studies in Bayesian Econometrics / A. Zellner, J.B. Kadane (eds.). Vol. 3. Amsterdam: North Holland, 1979.

[11] Box G.E.P., Tiao G.C. Bayesian Inference in Statistical Analysis. Reading (MA): Addison-Wesley, 1973.

[12] Brown S.J. The Portfolio Choice Problem: Comparison of Certainty Equivalence and Optimal Bayes Portfolios // Communications in Statistics. B. 1978. Vol. 7. P. 321 —334.

[13] Campbell J., Viceira L. Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.

[14] Elton E., Gruber M. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. N.Y.: Wiley, 1987.

[15] Fama E.F. Multiperiod Consumption—Investment Decisions // American Economic Review. 1970. Vol. 60. P. 163—174.

[16] Gohout W., Specht K. Mean-Variance Portfolios Using Bayesian Vector-Autoregressive Forecasts // Statistical Papers. 2007. Vol. 48. P. 403—418.

[17] Hakansson N. Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions // Econometrica. 1970. Vol. 38. P. 587—607.

[18] Jorion P. Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis // J. of Financial and Quantitative Analysis. 1986. Vol. 21. P. 279—292.

[19] Mao J.C.T., Sarndal C.E. A Decision Theory Approach to Portfolio Selection // Management Science. 1966. Vol. 12. P. B323—B333.

[20] Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. N.Y.: Wiley, 1959.

[21] Mossin J. Optimal Multiperiod Portfolio Policies // J. of Business. 1968. Vol. 41. P. 215—229.

[22] Polson N.G., Tew B.V. Bayesian Portfolio Selection: An Empirical Analysis of the S&P 500 Index 1970—1996 // J. of Business and Economic Statistics. 2000. Vol. 18. P. 164—173.

[23] Quintana J.M., Lourdes V., Aguilar O., Liu J. Global Gambling // Bayesian Statistics 7 / J.M. Bernardo, M.J. Bayarri, J.O. Berger, A.P. Dawid,

D. Heckerman, A.F.M. Smith, M. West (eds.). N.Y.: Oxford Univ. Press, 2003. P. 349—367.

[24] Samuelson P.A. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming // Review of Economics and Statistics. 1969. Vol. 51. P. 239—246.

[25] Scherer B. Portfolio Construction and Risk Budgeting. L.: Riskwaters, 2002.

[26] Sharpe W.F. Portfolio Theory and Capital Markets. N.Y.: McGraw-Hill, 1970.

[27] Soyer R., Tanyeri K. Bayesian Portfolio Selection with Multi-Variate Random Variance Models // European J. of Operational Research. 2006. Vol. 171. P. 977—990.

[28] VanBinsbergen J.H., Brandt M.W. Solving Dynamic Portfolio Choice Problems by Recursing on Optimized Portfolio Weights or on the Value Function? // Comput. Econ. 2007. Vol. 29. P. 355—367.

[29] Winkler R.L. Bayesian Models for Forecasting Future Securuty Prices // J. of Financial and Quantitative Analysis. 1973. Vol. 8. P. 387—406.

[30] Winkler R.L., Barry C.B. A Bayesian Model for Portfolio Selection and Revision // J. of Finance. 1975. Vol. 30. P. 179—192.

Препринт WP2/2007/02
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

А.С. Шведов

Интерполяция сплайнами в многопериодной портфельной задаче

Публикуется в авторской редакции

Выпускающий редактор *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Отпечатано в типографии ГУ ВШЭ с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 2.
Усл. печ. л. 1,86. Заказ № . Изд. № 829.

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73

Для заметок