ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2013, том 49, № 11, с. 1381–1389

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, СВЯЗАННОЙ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ПОВРЕЖДЕННОЙ КРИВОЙ

 М. Г. Дмитриев, Ю. Л. Сачков

В одной задаче оптимального управления, связанной с восстановлением поврежденной кривой, при введении "дешевых" управлений при минимизации простейшего функционала энергии появляется необходимость решения сингулярно возмущенной вариационной задачи с фиксированным временем и закрепленными концами. Построение равномерного нулевого асимптотического приближения к оптимальному управлению в последней задаче позволяет заключить, что в исходной задаче оптимального управления оптимальные траектории наряду с равномерным движением внутри временного промежутка имеют быстрые переходные слои на границах интервала управления.

DOI: 10.1134/S0374064113110034

1. Введение. Восстановление поврежденных или частично скрытых изображений является одной из актуальных задач компьютерной графики, фотографии, рентгенографии и живописи. Для ее решения разработан ряд подходов, многие из которых основаны на современных математических методах, в частности, на применении вариационного исчисления и оптимального управления [1, 2].

Частным случаем задачи восстановления изображения является задача восстановления кривой на плоскости, некоторые изображения могут быть представлены как семейство линий уровня яркости (так называемый изофот) [3–5].

В рамках геометрической теории управления [3] разработан подход к восстановлению поврежденных или частично скрытых кривых с помощью решения некоторой задачи оптимального управления – субримановой задачи на группе движения плоскости.

Одним из актуальных направлений нейрофизиологии зрения начала нынешнего века является нейрогеометрия, которая изучает геометрические структуры человеческого мозга, моделирующие пространственные образы внешнего мира. Предложена следующая модель первичной зрительной коры головного мозга $V1$ (см. работы [6–10]). Первичная кора головного мозга $V1$ выполняет первоначальное (предшествующее существенной обработке) восприятие зрительных образов. Нейроны первичной коры объединены в колонки ориентации, каждая из которых чувствительна к зрительным раздражениям в данной точке сетчатки для определенного направления на ней. Сетчатка моделируется двумерной плоскостью (или ее подобластью), т.е. каждая ее точка представляется точкой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Направление в заданной точке моделируется проективной прямой, т.е. $\theta \in P^1$ (напомним, что проективная прямая P^1 есть множество прямых на плоскости, проходящих через начало координат, т.е. $P^1 = \mathbb{R}/\sim$, где $\theta \sim \theta'$, если $\theta = \theta' + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Таким образом, первичная зрительная кора $V1$ моделируется так называемым проективным касательным расслоением $PT\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times P^1$. С точки зрения нейрологии колонки ориентации объединены в свою очередь в гиперколонны, каждая из которых чувствительна к раздражениям в заданной точке (x, y) с любым направлением θ. Колонки ориентации соединяются между собой двумя разными способами. Первый способ задается вертикальными связями, соединяющими колонки ориентации, принадлежащие одной гиперколонне и чувствительные к разным направлениям. Второй способ реализуется горизонтальными связями, соединяющими колонки ориентации в разных гиперколоннах и чувствительные к одному направлению.

Таким образом, когда зрительная кора головного мозга $V1$ воспринимает плоскую кривую $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, она вычисляет ее лифт в $PT\mathbb{R}^2$, добавляя новую переменную $\theta(t)$, $t \in [0, T]$, так, чтобы выполнялись уравнения

$$\dot{x} = u\cos\theta, \tag{1}$$

$$\dot{y} = u\sin\theta, \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \sigma. \tag{3}$$

Здесь новая переменная $\theta(t)$ задает направление кривой $(x(t), y(t))$.

Если кривая $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, повреждена на отрезке $[a, b] \subset [0, T]$, то она восстанавливается зрительной корой $V1$ на основе следующего вариационного принципа: восстанавливающая дуга $(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, должна минимизировать энергию J активации нейронов сетчатки, соответствующую этой дуге. Эта энергия моделируется интегралом

$$J = \int_a^b (u^2(t) + \alpha^2\sigma^2(t))\, dt \to \min, \tag{4}$$

где слагаемое $u^2(t)$ (соответственно $\alpha^2\sigma^2(t)$) представляет собой инфинитезимальную энергию, необходимую для активации горизонтальных (соответственно вертикальных) связей. Параметр $\alpha > 0$ определяет относительный вес горизонтальных и вертикальных связей. Искомая траектория управляемой системы (1)–(3) должна удовлетворять граничным условиям

$$(x(a), y(a), \theta(a)) = (x^0, y^0, \theta^0), \tag{5}$$

$$(x(b), y(b), \theta(b)) = (x^1, y^1, \theta^1). \tag{6}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского минимизация функционала энергии эквивалентна минимизации функционала субримановой длины

$$l = \int_a^b \sqrt{u^2(t) + \alpha^2\sigma^2(t)}\, dt \to \min. \tag{7}$$

Таким образом, при восстановлении поврежденных кривых первичная зрительная кора $V1$ вычисляет решение задачи оптимального управления (1)–(3), (5), (7).

Эта задача изучалась в работах [11–13], в которых получена параметризация экстремальных траекторий, исследована их локальная и глобальная оптимальность, задача оптимального управления сведена к решению систем уравнений в эллиптических функциях. Как показано в этих работах, оптимальная кривая $(x(t), y(t))$ часто содержит точку возврата, что нежелательно с точки зрения приложения к восстановлению кривых и изображений. Вычислительные эксперименты показывают, что при изменении весового коэффициента α в функционалах J и l точки возврата могут исчезать. Как правило, устранение точек возврата происходит при приближении параметра α к границе его области изменения, т.е. при $\alpha \to 0$ или $\alpha \to +\infty$.

Возникает вопрос о поведении решений задачи оптимального управления (1)–(3), (5), (7) при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to +\infty$. В частности, для приложений к восстановлению кривых без точек возврата важно исследовать асимптотику этих решений при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to +\infty$ и исчезновение или сохранение точек возврата для этих асимптотик.

Целью данной работы является исследование асимптотики решений задачи (1)–(3), (5), (7) при $\alpha \to 0$. Эта задача сводится к сингулярно возмущенной задаче оптимального управления и затем исследуется с помощью прямой схемы [14] теории сингулярно возмущенных задач управления.

2. Постановка задачи и метод решения. Итак, задача восстановления поврежденной кривой формализуется как задача оптимального управления

$$\dot{x} = u_1 \cos\theta, \quad x(0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1,$$

$$\dot{y} = u_1 \sin\theta, \quad y(0) = y^0, \quad y(t_1) = y^1, \tag{8}$$

$$\dot{\theta} = \sigma, \quad \theta(0) = \theta^0, \quad \theta(t_1) = \theta^1, \quad u_1, \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\int\limits_0^{t_1} (u_1^2 + \varepsilon^2\sigma^2)\, dt \to \min, \tag{9}$$

где x, y – координаты в плоскости кривой, θ – наклон кривой, u_1 и σ – управления, $\varepsilon > 0$ – достаточно малая величина, имеющая смысл весового коэффициента энергии активации горизонтальных и вертикальных связей между нейронами первичной зрительной коры $V1$. Из уравнений (1), (2) следует, что здесь на управления u_1, σ ограничения не накладываются, и задача (1), (2) превращается в так называемую задачу с "дешевым" управлением, методы решения которой тесно связаны с теорией сингулярных возмущений [15, 16].

Действительно, выполняя в уравнениях (1), (2) замену $\varepsilon\sigma = u_2$, приходим к сингулярно возмущенной задаче оптимального управления P_ε

$$\dot{x} = u_1 \cos\theta, \quad \dot{y} = u_1 \sin\theta, \quad \varepsilon\dot{\theta} = u_2, \tag{10}$$

$$v(0) = v^0, \quad v(t_1) = v^1, \tag{11}$$

$$I_\varepsilon(u) = \int\limits_0^{t_1} (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \min, \tag{12}$$

где

$$v = (x, y, \theta)^{\mathrm{т}}, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{т}}. \tag{13}$$

Будем строить асимптотику решения задачи (3), (4) по параметру $\varepsilon \to 0$. Имеются два подхода к построению асимптотики. Первый (традиционный) связан с асимптотикой решения соответствующей краевой задачи для экстремалей, второй – с так называемой прямой схемой построения асимптотики решения вариационных задач. Для построения равномерного нулевого асимптотического приближения будем использовать второй подход, заключающийся в подстановке во все условия задачи постулируемого асимптотического разложения и разложении условий задачи в ряды по степеням параметра ε и последующем решении более простых вариационных задач. Для приближенного решения задачи (3), (4) в качестве постулируемого ряда выберем ряд метода пограничных функций

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t, \varepsilon) + \Pi z(\tau_0, \varepsilon) + Qz(\varepsilon_1, \varepsilon), \tag{14}$$

где $\tau_0 = t/\varepsilon$, $\tau_1 = (t - t_1)/\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, $z^{\mathrm{т}} = (x, y, \theta, u_1, u_2)^{\mathrm{т}}$; $\bar{z}(t, \varepsilon) = \bar{z}_0(t) + \varepsilon\bar{z}_2(t) + \ldots$ – регулярный ряд по целым степеням ε с коэффициентами, зависящими от t, $\Pi z(\tau_0, \varepsilon) = \Pi_0 z(\tau_0) + \varepsilon\Pi_1 z(\tau_0) + \ldots$ – левый пограничный ряд по степеням ε с коэффициентами, зависящими от τ_0, и $Qz(\tau_1, \varepsilon) = Q_0 z(\tau_1) + \varepsilon Q_1 z(\tau_1) + \ldots$ – правый пограничный ряд по целым степеням ε с коэффициентами, зависящими от τ_1.

Согласно прямой схеме, ряд (7) подставляем во все условия задачи P_ε и при соответствующих разложениях условий получаем последовательность вариационных задач меньшей размерности, так как, согласно лемме из [14], имеем

$$\inf I_\varepsilon(u) = \inf I_0 + \varepsilon \inf I_1 + \ldots \tag{15}$$

3. Предельная задача. При $\varepsilon = 0$ из задачи (3), (4) получаем так называемую предельную вырожденную задачу P_0:

$$I_0(u,\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_1} (\bar{u}_{10}^2 + \bar{u}_{20}^2)\,dt \to \min,$$

$$\dot{\bar{x}}_0 = \bar{u}_{10}\cos\bar{\theta}_0, \quad \dot{\bar{y}}_0 = \bar{u}_{10}\sin\bar{\theta}_0, \quad 0 = \bar{u}_{20}, \quad (\bar{x}_0, \bar{y}_0)^{\text{т}}_{t=0} = (x^0, y^0)^{\text{т}}, \quad (\bar{x}_0, \bar{y}_0)^{\text{т}}_{t=t_1} = (x^1, y^1)^{\text{т}}.$$

Поскольку здесь одна дифференциальная связь превращается в ограничение типа равенства $\bar{u}_{20}(t) \equiv 0$, то управлением в задаче P_0 наряду с управлениями $\bar{u}_{10}(t)$, $\bar{u}_{20}(t)$ можно считать освободившуюся фазовую переменную $\bar{\theta}_0(t)$ или в предельной задаче в качестве управления появляется физическая фазовая координата θ.

Введем в P_0 гамильтониан

$$\bar{H}(\bar{\psi}, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{u}_{10}, \bar{u}_{20}, \bar{\theta}_0) = \bar{\psi}_{10}\bar{u}_{10}\cos\bar{\theta}_0 + \bar{\psi}_{20}\bar{u}_{10}\sin\bar{\theta}_0 + \bar{\psi}_{30}\bar{u}_{20} + (\psi_0/2)(\bar{u}_{10}^2 + \bar{u}_{20}^2), \tag{16}$$

где $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_{10}, \bar{\psi}_{20}, \bar{\psi}_{30})$.

Пусть $\bar{\psi}_0 = -1$ (нормальный случай), тогда

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{u}_{10}} = \bar{\psi}_{10}\cos\bar{\theta}_0 + \bar{\psi}_{20}\sin\bar{\theta}_0 - \bar{u}_{10}, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{u}_{20}} = \bar{\psi}_{30} - \bar{u}_{20} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\theta}_0} = \bar{u}_{10}(-\bar{\psi}_{10}\sin\bar{\theta}_0 + \bar{\psi}_{20}\cos\bar{\theta}_0) = 0.$$

Так как $\dot{\bar{\psi}}_{10} = 0$, $\dot{\bar{\psi}}_{20} = 0$, то $\bar{\psi}_{10}$, $\bar{\psi}_{20}$ постоянные. Также очевидно, что $\bar{\psi}_{30} = 0$, поскольку $\bar{u}_{20} = 0$ и при этом $\bar{\psi}_{10}$, $\bar{\psi}_{20}$ остаются пока неизвестными.

Из необходимых условий оптимальности следует, что экстремальное управление $\bar{u}_{10}$ имеет вид

$$\bar{u}_{10} = \bar{\psi}_{10}\cos\theta_0 + \bar{\psi}_{20}\cos\theta_0 \quad \text{и} \quad \bar{u}_{10}(-\bar{\psi}_{10}\sin\theta_0 + \bar{\psi}_{20}\cos\theta_0) = 0.$$

Рассмотрим два случая:

a) $(\bar{\psi}_{10}, \bar{\psi}_{20}) = (0, 0)$, тогда $\bar{u}_{10} \equiv 0$ и $\bar{\theta}_0$ не определяется из необходимых условий. При этом $\dot{\bar{x}}_0 = 0$, $\dot{\bar{y}}_0 = 0$, что невозможно при $(x^0, y^0) \neq (x^1, y^1)$. Если же $(x^0, y^0) = (x^1, y^1)$, то решение задачи P_0 имеет вид $\bar{u}_{10} \equiv 0$, $I_0^* = 0$;

b) $(\bar{\psi}_{10}, \bar{\psi}_{20}) \neq (0, 0)$. Переходя к полярным координатам, получаем $\bar{\psi}_{10} = \rho\cos\varphi$, $\bar{\psi}_{20} = \rho\sin\varphi$, $\rho \neq 0$. Тогда $\bar{u}_{10} = \rho(\cos\varphi\cos\bar{\theta}_0 + \sin\varphi\sin\bar{\theta}_0) = \rho\cos(\bar{\theta}_0 - \varphi)$. Так как

$$-\bar{\psi}_{10}\sin\bar{\theta}_0 + \bar{\psi}_{20}\cos\bar{\theta}_0 = \rho(-\cos\varphi\sin\bar{\theta}_0 + \sin\varphi\cos\bar{\theta}_0) = -\rho\sin(\bar{\theta}_0 - \varphi),$$

то

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\theta}_0} = -\rho^2\cos(\bar{\theta}_0 - \varphi)\sin(\bar{\theta}_0 - \varphi) = 0,$$

где использованы обозначения $\bar{\theta}_0 = \varphi$, $\bar{u}_{10} = \rho$. Таким образом, для предельных траекторий получаем задачу

$$\dot{\bar{x}}_0 = \rho\cos\varphi, \quad \dot{\bar{y}}_0 = \rho\sin\varphi,$$

$$\bar{x}_0(0) = x^0, \quad \bar{x}_0(t_1) = x_1, \quad \bar{y}_0(0) = y^0, \quad \bar{y}_0(t_1) = y_1.$$

Имеем

$$\bar{x}_0(t) = x^0 + \rho t\cos\varphi, \quad \bar{y}_0(t) = y^0 + \rho t\sin\varphi,$$

$$\rho = r/t_1, \tag{17}$$

где r – расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_0, y_0), а φ – угол между вектором, соединяющим эти точки, и положительным направлением оси x, т.е. $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)^{\text{т}} = r(\cos\varphi, \sin\varphi)^{\text{т}}$.

Итак, $\bar{\theta}_0 = \varphi$, а следовательно, $\bar{u}_{10}(t) \equiv \rho$. Отметим, что из предыдущего вытекает, что $-\bar{\psi}_{10}\sin\bar{\theta}_0 + \bar{\psi}_{20}\cos\bar{\theta}_0 \equiv 0$.

Таким образом, оптимальное управление в задаче P_0 имеет вид $\bar{u}_{10} = \rho$, $\bar{u}_{20} = 0$, $\bar{\theta}_0 = \varphi$, оптимальное значение функционала равно $\bar{I}_0^* = \rho^2 t_1/2$, сопряженные переменные принимают значения

$$\bar{\psi}_{10} = \rho\cos\varphi, \quad \bar{\psi}_{20} = \rho\sin\varphi, \quad \bar{\psi}_{30} = 0.$$

Если в задаче P_0 вычислить матрицу вторых частных производных для функции (16) по управляющим переменным $\bar{u}_{10}$, $\bar{u}_{20}$, $\bar{\theta}_0$, то она оказывается отрицательно определенной, т.е. в задаче P_0 выполняется усиленное условие Лежандра–Клебша.

Введем функцию

$$H(\tau_0) = \cos(\bar{\theta}_0(0) + \Pi_0\theta(\tau_0))\bar{\psi}_{10}(0)\bar{u}_{10}(0) + \sin(\bar{\theta}_0(0) + \Pi_0\theta(\tau_0))\bar{\psi}_{10}(0)\bar{u}_{10}(0) -$$

$$-\frac{1}{2}\bar{u}_{10}^2(0) - \frac{1}{2}(\bar{u}_{20}(0) + \Pi_0 u_2(\tau_0))^2,$$

которая является гамильтонианом предельной задачи $\bar{H}$, только здесь вместо быстрых переменных θ и u_2 подставляются значения регулярных членов быстрых переменных в нуле с учетом соответствующих пограничных функций. Соответственно определяется функция $H(\tau_1)$.

Под $\bar{H}(0)$ и $\bar{H}(t_1)$ будем понимать функции $\bar{H}$, где все переменные вычисляются при $t = 0$ и $t = t_1$ соответственно.

Определим разность

$$H(\tau_0) - \bar{H}(0) = \bar{\psi}_{10}(0)\bar{u}_{10}(0)[\cos(\Pi_0\theta_0(\tau_0) + \bar{\theta}_0(0)) - \cos(\theta_0(0))] +$$

$$+\bar{\psi}_{20}(0)\bar{u}_{10}(0)[\sin(\Pi_0\theta_0(\tau_0) + \bar{\theta}_0(0))] - \Pi_0^2 u_2(\tau_0).$$

Непосредственными вычислениями находим

$$H(\tau_0) - \bar{H}(0) = -\rho^2[1 - \cos(\Pi_0\theta(\tau_0))] - \Pi_0^2 u_2(\tau_0).$$

Аналогично можно вычислить разность

$$H(\tau_1) - \bar{H}(t_1) = -\rho^2[1 - \cos(Q_0\theta(\tau_1))] - Q_0^2 u_2(\tau_1).$$

Следуя прямой схеме [14], имеем $I_\varepsilon^* = I_0^* + \varepsilon I_1^* + \ldots$, где I_0^* – минимальное значение функционала в P_0, а $I_1^* = \Pi I^* + Q_0 I^* + D$, где D – известная постоянная, определяемая решением задачи P_0 и краевыми условиями для быстрой переменной $\theta(t)$,

$$D = \bar{\psi}_{30}(t_1)\theta - \bar{\psi}_{30}(0)\theta^0 - \int\limits_0^{t_1} \bar{\psi}_{30}(t)\bar{\theta}_0(t)\,dt = 0,$$

так как $\bar{\psi}_{30}(t) \equiv 0$. Здесь $\Pi_0 I^*$, $Q_0 I^*$ – минимальные значения функционалов двух задач оптимального управления в окрестности границ промежутка $[0, t_1]$, а именно задачи $\Pi_0 P$:

$$-\int\limits_0^\infty (H(\tau_0) - \bar{H}(0))\,d\tau \to \min, \quad \frac{\Pi_0 Q}{d\tau_0} = \Pi_0 u_2, \quad \Pi_0\theta(0) = \theta^0 - \bar{\theta}_0(0) = \theta^0 - \varphi \tag{18}$$

и задачи $Q_0 P$:

$$\int\limits_0^{-\infty} (H(\tau_1) - \bar{H}(0))\,d\tau_1 \to \min, \quad \frac{dQ_0\theta}{d\tau_1} = Q_0 u_2, \quad Q_0\theta(0) = \theta(t_1) - \bar{\theta}_0(t_1) = \theta^1 - \varphi. \tag{19}$$

Исследуем задачу $\Pi_0 P$. Введем гамильтонову систему

$$\frac{d\Pi_0 Q}{d\tau_0} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \Pi_0 u_x(\tau_0), \quad \Pi_0\theta(0) = \theta^0 - \varphi,$$

$$\frac{dp}{d\tau_0} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Pi_0\theta} = \rho^2 \sin(\Pi_0\theta),$$

где $\tilde{H} = p\Pi_0 u_2 - \rho^2[1-\cos(\Pi_0\theta(\tau_0))] - \Pi_0^2 u_2$. Для нахождения $\Pi_0 u_2(\tau_0)$ имеем дополнительное условие

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Pi_0 u_2} = p(\tau_0) - 2\Pi_0 u_2(\tau_0) = 0,$$

т.е. $\Pi_0 u_2(\tau_0) = p(\tau_0)$. Тогда получаем систему

$$\frac{d\Pi_0\theta}{\partial \tau_0} = \frac{1}{2} p(\tau_0), \quad \frac{dp}{d\tau_0} = \bar{u}_{10}^2(0)\sin(\Pi_0\theta(\tau_0)). \tag{20}$$

Решение этой системы с граничными условиями $\Pi_0\theta(0) = \theta^0 - \varphi$, $\lim\limits_{\tau_0\to+\infty} \Pi_0\theta(\tau_0) = 0$ имеет вид

$$\Pi_0\theta(\tau_0) = \arccos(1 - 2\,\mathrm{th}^2(c + \bar{u}_{10}\tau_0/\sqrt{2})) - \pi,$$
$$p(\tau_0) = 2\sqrt{2}\,\bar{u}_{10}/\,\mathrm{ch}(c + \bar{u}_{10}\tau_0/\sqrt{2}\,), \tag{21}$$

где

$$c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos((\theta^0-\varphi)/2)}{1-\cos((\theta^0-\varphi)/2)}.$$

Считая $p(\tau_0)$ функцией $\Pi_0\theta$, т.е. выбирая управление в пограничном слое как обратную связь, из [17] при наличии условий гладкости, усиленного условия Лежандра–Клебша для предельной задачи, управляемости в пограничном слое, которые здесь очевидно выполняются, вытекает существование условно устойчивого многообразия такого, что вдоль него систему (20) с помощью замены $(\Pi_0\theta, p)^{\mathrm{T}} = M^{-1}(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}})^{\mathrm{T}}$ можно привести к виду

$$\begin{pmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{\tilde{y}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{A} & 0\\ 0 & -\tilde{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{\tilde{y}}\end{pmatrix} + \chi(s), \quad s = \begin{pmatrix}\tilde{y}\\ \tilde{\tilde{y}}\end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\chi(s)$ – гладкая вектор-функция, удовлетворяющая следующему условию: для любого $\xi > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\chi(s) - \chi(s^1)\| \le \xi\|s - s^1\|$, если $\max(\|s\|, \|s^1\|) \le \delta$. Здесь $\widetilde{A} = -K$ – положительное решение уравнения Риккати $K^2 - \rho^2/4 = 0$, т.е. $K = \rho/2$. Матрицы M_1 и M_2 имеют вид

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & K^{-1}\\ 8K & -4\end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & K^{-1}\\ 8K & -2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\tilde{A} < 0$, т.е. для гамильтоновой системы (20) после невырожденного преобразования получаем систему (22), которая в линейном приближении расщепляется на две подсистемы – одна для $\tilde{y}$, другая для $\tilde{\tilde{y}}$.

Первая линейная подсистема асимптотически устойчива в прямом времени, а вторая – в обратном.

Представление (22) и свойства нелинейности функции $\chi(s)$ на основе работы [17] позволяют утверждать существование таких постоянных $a > 0$, $C > 0$, что для решения задачи (20) имеют место оценки

$$|\Pi_0\theta(\tau_0)| \le C\varepsilon^{-\alpha\tau_0}, \quad |p(\tau_0)| \le C\varepsilon^{-\alpha\tau_0}, \quad 0 < \tau_0 < +\infty,$$

а следовательно, и неравенства $|\Pi_0 u_2| \le Ce^{-\alpha\tau_0}$, если начальное условие $\theta^0 - \bar{\theta}_0(0)$ находится в некоторой малой окрестности начала координат.

Далее, нетрудно видеть, что задача $Q_0 P$ имеет аналогичное решение $Q_0 u_2(\tau_1) = q$, где

$$\frac{dQ_0\theta(\tau_1)}{d\tau_1} = Q_0 u_2, \quad Q_0\theta(0) = \theta^1 - \varphi, \quad \frac{dq}{d\tau_1} = \rho^2 \sin(Q_0\theta(\tau_1)), \quad Q_0\theta(\tau_1) \to 0, \quad \tau_1 \to -\infty.$$

Последнюю задачу с помощью аналогичной замены $(Q_0\theta, q)^{\mathrm{т}} = M_2^{-1}(k,l)^{\mathrm{т}}$ можно привести к виду (22), где $\tilde{A} = -2K$, но K здесь уже является отрицательно определенным решением уравнения Риккати $K^2 - \rho^2/4 = 0$, т.е. $K = -\rho/2$, $M_2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & K^{-1} \\ 8K & -4 \end{pmatrix}$.

Соответственно имеют место аналогичные оценки

$$|Q_0\theta(\tau_1)| \le Ce^{\alpha\tau_1}, \quad |q(\tau_1)| \le Ce^{\alpha\tau_1}, \quad |Q_0 u_2(\tau_1)| \le Ce^{\alpha\tau_1}, \quad -\infty < \tau_1 < 0,$$

если начальное условие $\theta^1 - \varphi$ находится в некоторой малой окрестности нулевого положения равновесия.

Аппроксимируя задачи (18) и (19) линейно-квадратичными, легко найти приближенные представления решений этих задач.

Действительно, выделяя первые члены разложений правых частей и подынтегральных выражений, получаем следующие две задачи:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty [(\tilde{\Pi}_0\theta)^2 + (\tilde{\Pi}_0 u_2)^2]\, d\tau_0 \to \min, \quad \frac{d\tilde{\Pi}_0\theta}{d\tau_0} = \tilde{\Pi}_0 u_2, \quad \tilde{\Pi}_0\theta(0) = \theta^0 - \varphi,$$

и

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\infty} [\rho^2(\tilde{Q}_0\theta)^2 + (\tilde{Q}_0 u_2)^2]\, d\tau_1 \to \min, \quad \frac{d\tilde{Q}_0\theta}{d\tau_1} = \tilde{Q}_0 u_2, \quad \tilde{Q}_0\theta_0(0) = \theta^1 - \theta_0(1) = \theta^l - \varphi.$$

Имеем

$$\tilde{\Pi}_0 u_2(\tau_0) = -(\rho/2)\tilde{\Pi}_0\theta(\tau_0), \quad \tilde{\Pi}_0\theta(\tau_0) = (\theta^0) - \varphi)e^{\rho\tau_0/2} \to 0, \quad \tau_0 \to +\infty,$$
$$\tilde{Q}_0 u_2(\tau_1) = +(\rho/2)\tilde{Q}_0\theta(\tau_1), \quad \tilde{Q}_0\theta(\tau_1) = (\theta^1 - \varphi)e^{\rho\tau_1/2} \to 0, \quad \tau_1 \to -\infty,$$

и при этом из работы [17] следует, что при достаточно малых $|\theta^0 - \varphi|$ и $|\theta^1 - \varphi|$ имеют место оценки

$$\begin{gathered} |\Pi_0\theta(\tau_0) - \tilde{\Pi}_0\theta(\tau_0)| = O(\Pi_0^2\theta(\tau_0)), \quad |\Pi_0 u(\tau_0) - \tilde{\Pi}_0 u(\tau_0)| = O(\Pi_0^2\theta(\tau_0)), \\ |Q_0\theta(\tau_1) - \tilde{Q}_0\theta(\tau_1)| = O(Q_0^2\theta(\tau_1)), \quad |Q_0 u(\tau_1) - \tilde{Q}_0 u(\tau_1)| = O(Q_0^2\theta(\tau_1)). \end{gathered} \tag{23}$$

4. Основная теорема. Введем нулевое асимптотическое приближение

$$z_0(t,\varepsilon) = \bar{z}_0(t) + \Pi_0 z(\tau_0) + Q_0 z(t_1),$$

где построенные выше пограничные функции отличны от нуля только для быстрых переменных – угла и угловой скорости. Соответствующее приближение для управления при этом равно

$$u_0(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} u_{10}(t,\varepsilon) \\ u_{20}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \Pi_0 u_2(\tau_0) + Q_0 u_2(\tau_1) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Поскольку в правой части уравнения для угла θ в системе (8) отсутствуют члены, содержащие θ, желательно для корректного численного интегрирования замкнутой системы ввести искусственно неполную обратную связь по θ, как описано в [14]. Для этого вместо $u_{20}(t,\varepsilon)$

будем рассматривать $v_{20}(\theta,t,\varepsilon) = -D\theta + \omega_{20}(t,\varepsilon)$, $\omega_{20}(t,\varepsilon) = u_{20}(t,\varepsilon) + D\theta_0(t,\varepsilon)$, где $D > 0$ – некоторая постоянная.

Итак, вместо $u_0(t,\varepsilon)$ будем использовать функцию

$$v_0(\theta,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \rho \\ v_{20}(\theta,t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Известны (см. обзор [16]) несколько подходов для доказательства оценок остаточного члена асимптотики решения задач оптимального управления без ограничений на значения управляющих воздействий с малым параметром. Один из них [14] связан с построением множества допустимых управлений, где функционал исходной возмущенной задачи оказывается сильно выпуклым. Будем использовать этот подход. Так как в настоящей работе имеются краевые условия для переменных состояния, то множество допустимых управлений расширяем, вводя ε-допустимые управления, которые переводят переменные состояния в ε-окрестность конечных условий. Нетрудно показать, используя метод из [14, 18], что построенное v_0 является ε-допустимым управлением. Введем шар Ω в L_2 с центром v_0 и радиусом $L\varepsilon$, где $L > 0$ – некоторое заданное число. В работе [13] установлено существование оптимального управления $u^*(t,\varepsilon)$ в задаче (10), (12) для любого $\varepsilon > 0$, и это управление, очевидно, принадлежит шару Ω. Однако для некоторых симметричных граничных условий, описанных в работах [11–13], оптимальных управлений может быть два, каждому из которых, очевидно, отвечает единственная траектория $(x^*(t,\varepsilon), y^*(t,\varepsilon), \theta^*(t,\varepsilon))$. Асимптотика решения строится в окрестности единственного решения вырожденной задачи и порождает соответствующее асимптотическое приближение. В случае неединственности оптимального управления построенная нами асимптотика дает одно и то же равномерное нулевое приближение для обоих оптимальных управлений. Теперь вместо задачи (10), (12) будем рассматривать соответствующую задачу со свободным правым концом. В этой новой задаче, действуя, как и в [14], можно установить сильную выпуклость функционала на множестве Ω. Отсюда вытекает существование единственного оптимального управления $\tilde{u}$ на шаре Ω в соответствующей аппроксимирующей задаче на множестве Ω. А из этого непосредственно вытекает следующее основное утверждение.

Теорема 1. *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ для решения задачи (10)–(12) в некоторой окрестности решения задачи P_0 имеют место следующие оценки при $\varepsilon \to +0$:*

$$\|x(v_0,t,\varepsilon) - \bar{x}_0(t)\| = O(\varepsilon), \quad \|y(v_0,t,\varepsilon) - \bar{y}_0(t)\| = O(\varepsilon),$$

$$\begin{gathered} \|\theta(v_0,t,\varepsilon) - \theta(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \|v_0(\theta,t,\varepsilon) - u_0(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \\ \|x^*(t,\varepsilon) - x(v_0,t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \|y^*(t,\varepsilon) - y(v_0,t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \\ \|\theta^*(t,\varepsilon) - \theta(v_0,t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \|u^*(t,\varepsilon) - v_0(\theta,t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \\ \|u^*(t,\varepsilon) - \tilde{u}(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \end{gathered} \tag{25}$$

где $(x^*(t,\varepsilon), y^*(t,\varepsilon), \theta^*(t,\varepsilon))$ и $u^*(t,\varepsilon)$ – оптимальная траектория и соответствующее управление в задаче (10)–(12).

Из теоремы непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ управление*

$$\tilde{u}_0(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma_0(\theta,t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_{20}(\theta,t,\varepsilon)/\varepsilon \end{pmatrix} \tag{26}$$

в задаче (8), (9) является ε-допустимым и имеют место следующие оценки при $\varepsilon \to +0$:

$$|u_1^*(t,\varepsilon) - \rho| = O(\varepsilon), \quad |\sigma^*(t,\varepsilon) - v_{20}(\theta,t,\varepsilon)/\varepsilon| = O(1).$$

Следствие 2. *При достаточно малом $\varepsilon \to +0$ вдоль управления $\tilde{u}_0(t,\varepsilon)$ из (25) в задаче (8), (9) справедлива оценка $|I(\tilde{u}_0) - I_\varepsilon^*| = O(\varepsilon^2)$.*

Итак, управления

$$u_1(t,\varepsilon)=\rho, \quad \sigma(\theta,t,\varepsilon)=(\Pi_0\theta(t/\varepsilon)+Q_0\theta((t-t_1)/\varepsilon))/\varepsilon,$$

где $\Pi_0\theta(t/\varepsilon)$ и $Q_0\theta((t-t_1)/\varepsilon)$ – некоторые эллиптические функции, решения соответствующих задач в пограничном слое образуют ε^2-субоптимальный по функционалу и ε-допустимый по ограничениям вектор управления.

Таким образом, из представления (26) и установленных выше экспоненциальных оценок для пограничных функций вытекает, что управление $\sigma_0(\theta,t,\varepsilon)$ содержит на границе отрезка $[0,t_1]$ аппроксимации двух импульсов. Первый импульс обеспечивает перевод θ при $t=0$ из θ в ε-окрестность φ, а второй при $t=t_1$ переводит θ из ε-окрестности φ в θ^1.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 8209), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00913 и 13-01-91162-ГФЕН а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chan T., Kang S., Shen J.* Euler’s elastica and curvature based inpainting // SIAM J. of Appl. Math. 2002. V. 63. № 2. P. 564–592.
2. *Citti G., Sarti A.* A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // J. Math. Imaging Vision. 2006. V. 24. № 3. P. 307–326.
3. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М., 2005.
4. *Jurdjevic V.* Geometric control theory. Cambridje, 2006.
5. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries their geodesics and applications. AMS. Providence, 2002.
6. *Petitot J.* Vers une neuro-geometrie. Fibrations conticales, structures de contact et contours subjectifs modaux // Math. Inform. Sci. Humaines. 1999. V. 145. P. 5–101.
7. *Petitot J.* Neurogeometrie de la vision – Modeles mathematiques et physiques des architectures fonctionnelles, Les Editions de l’Ecole Polythecnique. Palaiseau, 2008.
8. *Petitot J.* The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure // J. of Physiology. Paris, 2003. V. 97. P. 265–309.
9. *Sanguinetti G., Citti G., Sarti A.* Image completion using a diffusion driven mean curvature flow in a sub-riemannian space // Int. Conf. on Computer Vision Theory Applications (VISAPP’08). Funchal, 2008. P. 22–25.
10. *Hladky R.K., Pauls S.D.* Minimal Surfaces in the Roto-Translation Group with Applications to a Neuro-Biological Image Completion Model // J. Math. Imaging. 2010. V. 36. P. 1–27.
11. *Moiseev I., Sachkov Yu. L.* Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2010. V. 16. № 2. P. 380–399.
12. *Sachkov Yu.L.* Conjugate and cut time sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2010. V. 16. № 4. P. 1018–1039.
13. *Sachkov Yu.L.* Cut locus and optimal synthesis in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. 2011. V. 17. № 2. P. 293–321.
14. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. 1989. № 7. С. 71–82.
15. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
16. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982–2004 гг. // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–53.
17. *Lukes D.L.* Optimal regulation of nonlinear dynamical systems // SIAM J. Contr. 1969. V. 7. № 1. P. 75–100.
18. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в нелинейной задаче управления // Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1984. С. 40–49.

Научно-исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва,
Институт программных систем
им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский

Поступила в редакцию
02.05.2013 г.