

УДК 517.37, 517.38

ББК 22.161.1

Е30

Егоров В. И., Салимова А. Ф. Определенный и кратные интегралы. Элементы теории поля. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с. — ISBN 5-9221-0470-5.

В издании представлена теория и основные приложения определенного и кратных интегралов, а также элементы теории поля. Материал адаптирован к современной программе математического образования в высших технических учебных заведениях, к использованию в компьютерных обучающих системах. Книга предназначается студентам технических вузов. Она также может оказаться полезной преподавателям, инженерам, научным работникам.

---

Учебное издание

*ЕГОРОВ Владимир Иванович  
САЛИМОВА Альфия Фаизовна*

**ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.  
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*  
Оригинал-макет: *М.В. Башевой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 12.11.03. Формат 60×90/16.  
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 16.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерperiодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru <http://www.fml.ru>

ISBN 5-9221-0470-5

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3

Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс: (8172) 72-60-72

E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>



9 785922 104708

---

ISBN 5-9221-0470-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2004



## Предисловие

Мир стремительно меняется. Чему и как учиться и соответственно учить в условиях, когда наша деловая, и не только деловая, жизнь погрузилась во всемирную информационную паутину, и какова при этом значимость фундаментальных наук? Эти вопросы побуждают к поиску и активизации новых возможностей учебного процесса. Государственная образовательная система по сути своей консервативна, в чем объективно проявляется информационная преемственность поколений. Это обстоятельство заставляет рассуждать следующим образом. Планомерное развитие магистральных исследований в области технических разработок, и в первую очередь в области так называемых высоких технологий, базируется на фундаментальных научных исследованиях, т.е. его основу составляют фундаментальные науки, следовательно, изъять их из образовательных программ нельзя, но работать над методикой их преподавания можно и необходимо.

Заняться новой книгой на классическую тему нас побудила всегда актуальная проблема совершенствования высшего образования в России. Мы поставили следующую задачу: преобразовать информацию так, чтобы она без потерь, в виде логически цельного раздела курса высшей математики естественно помещалась в современном и перспективном учебном процессе, и, соответственно, пересмотреть и уточнить фонд основных понятий и фактов, составляющих интегральное исчисление и его приложения в объеме программ современной высшей технической школы.

Математика в инженерном деле и рабочий инструмент, и язык. На этом языке формулируются все законы физики. Математическая модель инженерной системы, в частности на стадии ее проектирования, дает возможность имитировать состояния системы и тем самым исследовать ее без так называемых натурных испытаний, чем обычно и пользуются, когда испытания по экономическим или иным причинам

нечелесообразны или неосуществимы. Естественно, математический аппарат широко используется в учебных инженерных дисциплинах.

Если Вы молодой человек, недавно окончивший среднюю школу, то эта книга для Вас. Читая ее с самого начала, т. е. с введения, Вы увидите, что между Вашими школьными знаниями и содержанием книги нет разрыва. Изучайте весь приведенный материал вместе с примерами. Не пропускайте доказательства. Доказательство в математике является главным средством утверждения истины. В нем проявляется существование творческой математической мысли. К тому же в доказательствах нередко применяются приемы, имеющие самостоятельную ценность, например в качестве вычислительных алгоритмов. Успехи в применении прикладной математики нереальны без хорошей математической базы. Систематический труд по изучению курса математики сторицей окупается не только полноценной эрудицией, но и интеллектуальным развитием, т. е. обостренной способностью самостоятельно и ответственно мыслить, что обязательно плодотворно скажется на Вашей профессиональной деятельности.

Если Вы студент высшего технического учебного заведения, то эта книга для Вас, так как ее содержание соответствует программе математического образования в Вашем учебном заведении. В тексте дозирована математическая символика, много иллюстраций, выкладки снабжены комментариями. В некоторых случаях вместо формальных ссылок использованы повторения, назначение которых — облегчить процесс чтения и способствовать закреплению в Вашей памяти основных положений курса. Той же цели служит содержащийся во всех главах разнообразный материал для упражнений. Изучив интегральное исчисление по этой книге, Вы при желании сможете легко перейти к соответствующей литературе самого высокого уровня, например:

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 1999.

2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. — 3-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 2002.

Мы признательны всем, кто проявил внимание к нашей работе, особенно доктору физико-математических наук, профессору механико-математического факультета МГУ Евгению

Прокофьевичу Долженко, доктору физико-математических наук, профессору, заведующему кафедрой высшей математики Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н.Е. Жуковского Ивану Кузьмичу Лифанову, лауреату Ломоносовской премии, кандидату физико-математических наук, доценту механико-математического факультета МГУ Евгению Витальевичу Майкову.

Мы выражаем нашу особую благодарность члену-корреспонденту РАН, академику Европейской Академии Наук, лауреату Государственной премии СССР, профессору Льву Дмитриевичу Кудрявцеву за щедрую и действенную помощь в подготовке настоящего издания.

*Авторы*

## Введение

В учебной литературе по интегральному исчислению основными являются понятия неопределенного и определенного интегралов. Оба эти понятия связаны с операцией, обратной дифференцированию, а также с суммированием бесконечно малых величин особого рода, число которых неограниченно растет. С помощью интегрального исчисления можно, например, ответить на следующие простые и одновременно важные вопросы. Можно ли, зная закон изменения скорости материальной точки, получить закон движения, а следовательно, и траекторию этой точки? Что представляет собой работа переменной силы? Как определить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми линиями? Как вычислить длину дуги, заданной параметрическими уравнениями, в частности дуги графика функции? Как вычислить объем и площадь поверхности тела? И т. п. При внимательном отношении к этим вопросам естественно возникает новый вопрос: хорошо ли мы представляем себе, что такое длина дуги, площадь плоской фигуры, объем тела и т. д.? Здесь затронуты далеко не простые понятия.

Вспомним, как в элементарной геометрии определяется площадь прямоугольника. Сначала прямоугольник покрывается, как паркетом, единичными квадратами, т. е. квадратами со стороной, равной единице длины, и определяется число таких квадратов. Если паркет не покрывает всего прямоугольника, как на рис. 1, то свободная часть прямоугольника застилается более мелким паркетом, точнее квадратами со стороной, равной 0,1 единицы длины. Площадь каждого такого квадрата, очевидно, равна 0,01 площади единичного квадрата. Подсчитывается число таких мелких квадратов, и их суммарная площадь прибавляется к площади части прямоугольника, покрытой единичными квадратами и т. д. В этом «и т. д.» может скрываться предельный переход в том случае, если длина хотя бы одной из сторон прямоугольника выражается бесконечной десятичной дробью. Таким образом, даже и в этом простом случае определение площади отнюдь не просто. Нас обычно выручает теорема, которой мы

постоянно пользуемся: площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон. Аналогично определяется и объем прямоугольного параллелепипеда. Более универсальные формулы получаются с помощью интегрального исчисления.

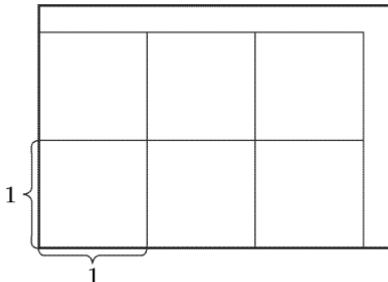


Рис. 1

Мы советуем внимательно отнестись к содержанию следующих пунктов, где определяются окрестность точки, граница фигуры, предел функции, длина дуги и т. п. При изучении математики нельзя полностью полагаться на интуитивные, и тем более бытовые, представления. Мы надеемся, что Вам знакомы самые начала математического анализа, векторной алгебры и аналитической геометрии.

*О внутренних и граничных точках фигур.* Напомним понятие окрестности точки. В математическом анализе оно вводится с помощью расстояния между точками. Пусть задано некоторое число  $\varepsilon > 0$ . Множество всех точек  $M$ , таких что  $|AM| < \varepsilon$ , называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A$ . На прямой  $Ox$  это интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , здесь  $a$  — координата точки  $A$  (см. рис. 2).



Рис. 2

На плоскости  $Oxy$   $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A(a, b)$  служит внутренность круга с центром в точке  $A$  и радиусом  $\varepsilon$ . Она определяется неравенством

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \varepsilon.$$

Окружность  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = \varepsilon^2$  окрестности не принадлежит (см. рис. 3).

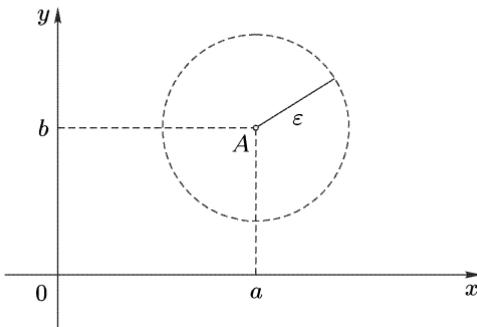


Рис. 3

В пространстве  $Oxyz$   $\varepsilon$ -окрестностью служит внутренность шара, т. е. множество точек  $M(x, y, z)$ , определяемое неравенством

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \varepsilon.$$

Сфера  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \varepsilon^2$  исключена. Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — координаты точки  $A$  (см. рис. 4).

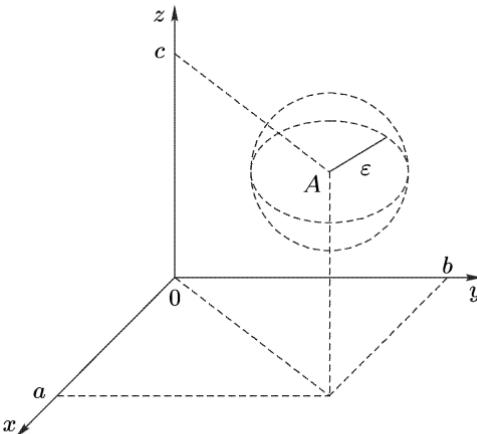


Рис. 4

Пусть  $\Phi$  — непустое точечное множество. Назовем его *фигурой*. Понятия *внутренней* или *граничной* точки фигуры  $\Phi$  определяются в зависимости от числа измерений пространства, в котором рассматривается эта фигура.

В трехмерном пространстве  $Oxyz$  точка  $M$  называется *внутренней* точкой фигуры  $\Phi$ , если имеется окрестность этой точки,

разумеется сферическая, целиком включенная в фигуру. Точка  $M$  по определению *граничной* точка фигуры  $\Phi$ , если в любой ее окрестности имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие фигуре.

Сказанное можно повторить как для плоских фигур, так и для фигур, расположенных на прямой с естественной оговоркой: на плоскости мы пользуемся круговыми окрестностями, а на прямой — интервальными.

На прямой  $Ox$  множество называется *ограниченным*, если имеется отрезок, включающий в себя это множество. Доказано, что каждое ограниченное множество на прямой имеет крайние граничные точки. Правая называется *верхней гранью*, *нижней гранью* определяется как крайняя левая граничная точка этого множества. Иными словами, гранями ограниченного множества называются концы наименьшего отрезка, содержащего это множество. На рис. 5 показано множество, составленное из двух промежутков:  $\Phi = [1; 2) \cup (3; 5)$ . Мы видим, что  $[1; 5]$  — наименьший отрезок, содержащий множество  $\Phi$ , следовательно, числа 1 и 5 — грани множества  $\Phi$ , причем нижняя грань принадлежит этому множеству, а верхняя — не принадлежит.



Рис. 5

*Границей* фигуры  $\Phi$  называют совокупность всех граничных точек этой фигуры. Фигура называется *замкнутой*, если она включает в себя свою границу, и *открытой*, если она не содержит граничных точек. Например, система

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

на плоскости  $Oxy$  определяет замкнутую прямоугольную область, а неравенство

$$z > x^2 + y^2$$

в пространстве  $Oxyz$  определяет открытую область. Ее составляют все точки пространства  $Oxyz$ , расположенные над параболоидом  $z = x^2 + y^2$ . Границей служит этот параболоид, который области не принадлежит (см. рис. 6).

Точка называется *точкой прикосновения* множества, если все ее окрестности содержат точки этого множества. Таким образом, все точки фигуры, а также все граничные точки, являются точками прикосновения фигуры.

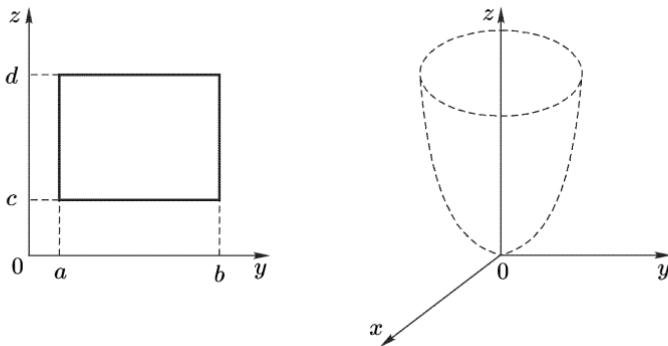


Рис. 6

*Предел функции.* Вначале о сужениях функций. Если по каким-то причинам функция рассматривается на подмножестве области ее определения, т. е. область значений аргумента функции сужается, то говорят о соответствующем сужении функции. Например, функция  $f(x) = x^2$ , когда она выражает площадь квадрата со стороной  $x > 0$ , является сужением функции  $f(x) = x^2$  с области ее определения  $(-\infty, +\infty)$  на интервал  $(0, +\infty)$ . Значения  $x$ , определяемые сужением функции, будем называть допустимыми значениями аргумента этой функции.

Понятие предела определим для сужения функции.

Пусть  $D$  — множество допустимых значений аргумента функции  $f(x)$  и  $a$  — точка прикосновения этого множества. Число  $b$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если при произвольно фиксированном  $\varepsilon > 0$  существует окрестность точки  $a$ , в которой при всех допустимых  $x$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . Напомним обозначения:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ или } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b.$$

Понятие предела — одно из самых употребительных понятий в современной математике. С его помощью определяются производная, интеграл, сумма числового ряда и т. д., описываются вычислительные процедуры, локальные свойства функций и т. п.

Пример.  $f(x) = 2^{1/x}$ . Определена при всех  $x \neq 0$ . График см. на рис. 7, где наглядно представлены следующие свойства функции: сначала при  $x < 0$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{1/x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x} = 0$  (см. левую ветвь графика). Теперь при  $x > 0$   $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{1/x} = 1$  (см. правую ветвь). Запись  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  означает, что функция  $f(x)$  в точке  $a$  предела не имеет, но ее модуль при  $x \rightarrow a$  неограниченно растет. Функцию в подобных случаях называют бесконечно большой. Функцию  $f(x)$  при условии  $x \rightarrow a$  называют бесконечно малой, если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . В описании функции задействованы также пределы на бесконечности.

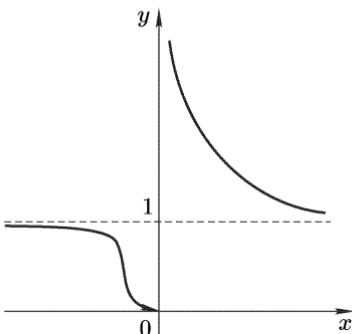


Рис. 7

По определению число  $b$  — предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ , если при произвольно фиксированном  $\varepsilon > 0$  можно указать число  $\lambda$ , такое что при всех допустимых  $x < \lambda$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . Предполагается, что множество допустимых значений аргумента не ограничено слева, т. е. при произвольном  $x_0$  существуют допустимые значения  $x < x_0$ .

Если множество допустимых  $x$  не ограничено справа, т. е. при произвольно фиксированном  $x_0$  существуют допустимые значения  $x > x_0$ , можно говорить о пределе функции на  $+\infty$ . По определению  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  означает, что при любом  $\varepsilon > 0$  найдется  $\lambda$ , такое что при всех допустимых  $x > \lambda$  имеем:  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Предел последовательности определяется как предел при  $n \rightarrow \infty$  функции, определяющей эту последовательность. Напомним, что последовательностью называется функция, определенная на множестве всех натуральных чисел. Члены последовательности пронумерованы соответствующими значениями аргумента. Если последовательность определяет функция  $a_n = a(n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , то последовательность обозначается  $\{a_n\}$ . Говорят, что последовательность  $\{a_n\}$  сходится к  $a$ , если  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$ , при этом пишут  $\{a_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

Теория пределов в современном ее виде содержит теоремы, которые обслуживают практически все разделы математического анализа, в частности интегральное исчисление. Без доказательства приводим некоторые из них, используемые в этой книге.

Неубывающая или невозрастающая ограниченная последовательность сходится.

Если две последовательности имеют общий предел, то любая другая зажатая между ними последовательность имеет тот же предел.

Если две сходящиеся последовательности связаны знаком неравенства  $\leqslant$  или  $\geqslant$ , то этим же знаком неравенства связаны и пределы этих последовательностей.

*Непрерывность функции.* Непрерывность функции в точке определяется с помощью предела. Функция называется непрерывной в точке ее задания, если она в этой точке имеет предел, т. е.  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \in D \subseteq D_f$ , если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Обратите внимание на то, что  $x \rightarrow x_0$  отнюдь не исключает  $x = x_0$ . Легко доказать, что указанный предел равен значению функции в точке предельного перехода, т. е. что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Функция называется непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Свойства функции, непрерывной на отрезке, выражают следующие утверждения.

Область значений функции, непрерывной на отрезке, представляет собой отрезок.

Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то при произвольно фиксированном  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое что на всем отрезке  $[a, b]$  из

неравенства  $|\tilde{x} - \hat{x}| < \delta$  следует неравенство  $|f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| < \varepsilon$ . Последнее свойство называется равномерной непрерывностью функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ . На рис. 8 изображен график функции в виде непрерывной дуги. На оси  $Oy$  отрезок  $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$  — область значений  $f(x)$ . Его концы, т. е. крайние значения функции:  $\underline{\mu} = f(c_1)$  — нижнее (наименьшее) значение, а  $\bar{\mu} = f(c_2)$  — верхнее (наибольшее) значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

Для наглядной иллюстрации равномерной непрерывности функции на рис. 9 изображена горизонтальная полоса шириной  $\varepsilon$  и проекция на  $Ox$  покрытой части графика. Предполагается, что полоса открыта, т. е. граничные прямые исключены. Проекция представляет собой промежуток, а в более сложных случаях — несколько промежутков, и тогда из них выбирается наименьший. Утверждается, что при некотором положении полосы его длина достигает минимума  $\delta > 0$ . Это наблюдается (см. рис. 9), когда полоса накрывает наиболее крутую часть графика.

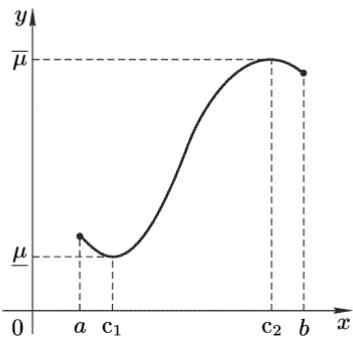


Рис. 8

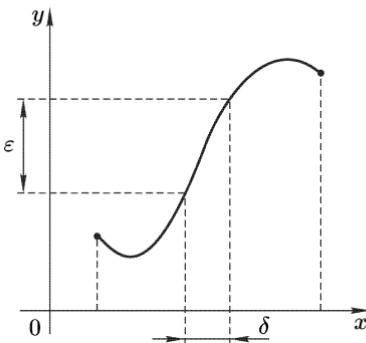


Рис. 9

Заметим, что даже самые начала языка математического анализа, как правило, осваиваются не без труда, тем более при первичном знакомстве с соответствующей информацией, однако это обстоятельство не должно служить основанием для огорчений, так как обычно смысл понятий в полной мере раскрывается лишь при систематическом изучении соответствующих материалов.

*Дуга и ее длина.* В математическом анализе и дифференциальной геометрии принято линии называть кривыми. Мы будем следовать этой традиции.

Дуга кривой обычно задается какой-нибудь ее параметризацией, т. е. системой параметрических уравнений вида  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , где  $t$  — параметр. Параметризацию можно также представить в следующем виде:  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ . Когда параметр  $t$  меняется от  $\alpha$  до  $\beta$ , точка  $M$  с координатами  $(x(t), y(t), z(t))$  прочерчивает в пространстве  $Oxyz$  заданную кривую от  $A$  до  $B$ . Координаты концов соответственно таковы:  $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$  — координаты точки  $A$ ,  $(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$  — координаты точки  $B$  (см. рис. 10).

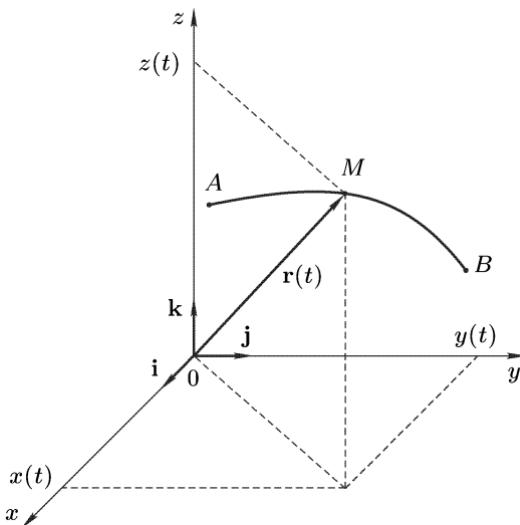


Рис. 10

*Длина дуги* определяется как верхняя грань длин всевозможных ломанных, вписанных в эту дугу (см. рис. 11).

Дуга, имеющая длину, называется *спрямляемой*.

**Теорема.** *Если функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , составляющие параметризацию дуги  $[L]$ , имеют на отрезке  $[\alpha, \beta]$  непрерывные производные, то дуга  $[L]$  спрямляема.*

Сперва докажем следующие вспомогательные утверждения.

**Лемма.** *Длина хорды, соединяющей концы дуги, не превосходит произведения длины отрезка  $[\alpha, \beta]$  на максимум  $|\mathbf{r}'(t)|$  на этом отрезке, т. е.*

$$|AB| \leq C|\beta - \alpha|,$$

где  $C = \max |\mathbf{r}'(t)|$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ .

**Доказательство.** Для определенности будем полагать, что  $\alpha < \beta$ . Рассмотрим вектор хорды

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{AB}.$$

Пусть  $\mathbf{l}^0$  — сонаправленный с ним единичный вектор. Скалярное произведение вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  на этот орт представляет собой обычную функцию аргумента  $t$ , удовлетворяющую на отрезке  $[\alpha, \beta]$  условию теоремы Лагранжа. Обозначим ее

$$\varphi(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{l}^0).$$

По теореме Лагранжа

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\xi)(\beta - \alpha), \quad \xi \in [\alpha, \beta].$$

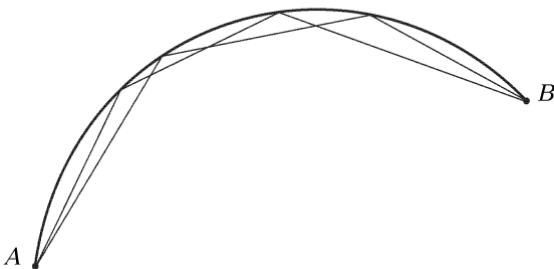


Рис. 11

Расшифруем это равенство:

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = (\mathbf{r}(\beta), \mathbf{l}^0) - (\mathbf{r}(\alpha), \mathbf{l}^0) = (\mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha), \mathbf{l}^0) = |\Delta \mathbf{r}|.$$

Напоминаем, что скалярное произведение по определению равно:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|,$$

а при сонаправленности сомножителей  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ .

Оценим правую часть:

$$\varphi'(\xi)(\beta - \alpha) = (\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{l}^0)'(\beta - \alpha) \leq |\mathbf{r}'(\xi)|(\beta - \alpha) \leq C(\beta - \alpha),$$

где  $C = \max |\mathbf{r}'(t)|$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Таким образом, установлено, что  $|\Delta\mathbf{r}| \leq C(\beta - \alpha)$ . Лемма доказана.

А теперь доказательство теоремы. Разобьем отрезок  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частей точками  $t_0 = \alpha, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$ . Соответствующие этим значениям параметра точки на кривой обозначим  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$  ( $M_0$  совпадает с точкой  $A$ ,  $M_n$  совпадает с точкой  $B$ ). Длина ломаной с указанными вершинами такова:

$$\begin{aligned} |M_0M_1| + |M_1M_2| + \dots + |M_{n-1}M_n| &\leq \\ &\leq C_1(t_1 - t_0) + C_2(t_2 - t_1) + \dots + C_n(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Здесь  $C_i = \max |\mathbf{r}'(t)|$  на отрезке  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Мы  $n$  раз воспользовались леммой. Так как  $C_i \leq C = \max |\mathbf{r}'(t)|$  на всем отрезке  $[\alpha, \beta]$ , видим, что длина любой ломаной, вписанной в дугу, не превосходит числа  $C(\beta - \alpha)$ . Таким образом, множество длин всех вписанных в дугу ломаных ограничено сверху указанным числом, следовательно, это множество имеет верхнюю грань. Обозначим ее  $L$  и напомним, что — согласно определению — это длина дуги  $[L]$ . Добавим, что  $L \leq C(\beta - \alpha)$ . Данным фактом мы воспользуемся в следующем пункте.

*Натуральный параметр кривой.* Пусть  $[L]$  — кривая без точек самопересечения, имеет параметризацию с непрерывно дифференцируемыми компонентами  $x(t), y(t), z(t)$ , что гарантирует спрямляемость любой дуги этой кривой. Зафиксируем на кривой  $[L]$  какую-нибудь точку  $M_0$  и одно из двух возможных направлений движения из этой точки по кривой  $[L]$ , которое назовем положительным (противоположное направление, естественно, будем считать отрицательным).

Натуральный, или, как еще говорят, естественный, параметр  $s$  введем следующим образом. Значению  $s = 0$  поставим в соответствие точку  $M_0$ . При  $s > 0$  на кривой откладываем в положительном направлении дугу длины  $s$  и ее конец ставим в соответствие числу  $s$ . Когда же  $s < 0$ , из точки  $M_0$  сдвигаемся в отрицательном направлении на величину  $|s|$  и конец пройденной дуги ставим в соответствие указанному значению натурального параметра. Таким образом, получается особая, назовем ее

естественной, параметризация кривой  $[L]$  (см. рис.12):

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

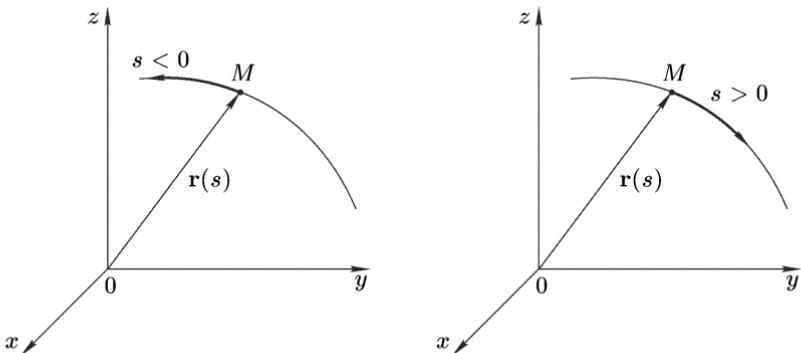


Рис. 12

**Теорема.** Модуль производной вектор-функции по натуральному параметру  $s$  равен единице.

**Доказательство.** Дадим параметру  $s$  приращение  $\Delta s$ . Пусть для определенности  $\Delta s > 0$ . Рассмотрим соответствующую дугу  $MM_1$  (см. рис. 13). Ее длина равна  $\Delta s$ , а длина соответствующей хорды равна

$$|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)|.$$

Рассмотрим двойное неравенство:

$$|\Delta \mathbf{r}| \leq \Delta s \leq C\Delta s.$$

Правое звено написано на основании последнего утверждения предыдущего пункта. Здесь  $C = |\mathbf{r}'(\tilde{s})| = \max |\mathbf{r}'(s)|$  на отрезке  $[s, s + \Delta s]$ , включающем в себя  $\tilde{s}$ . Разделим все на  $\Delta s > 0$  и проанализируем результат:

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| \leq 1 \leq |\mathbf{r}'(\tilde{s})|.$$

Крайние звенья при  $\Delta s > 0$  имеют общий предел  $|\mathbf{r}'(s)|$ . Зажатая между ними единица, естественно, имеет тот же предел, который равен единице, т. е.  $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ , или, что тоже самое,  $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$ .

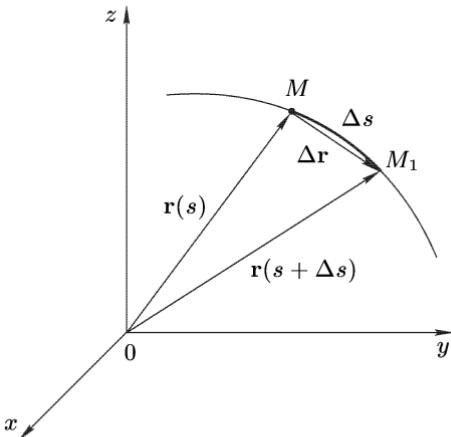


Рис. 13

Теорема доказана.

$$\text{Следствие. } \left| \frac{dr}{ds} \right| = 1 \Rightarrow ds = |dr|.$$

Если известна какая-нибудь параметризация кривой  $\{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$  и параметр  $t$  согласован с  $s$  в том смысле, что при возрастании  $t$  растет и  $s$ , то

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

Этим результатом мы воспользуемся при выводе формулы длины дуги кривой. Добавим в качестве справки, что вектор  $\frac{dr}{dt}$  является направляющим вектором касательной соответствующей кривой, к тому же он показывает направление движения точки по кривой при возрастании параметра. В этом смысле вектор  $\frac{dr}{ds}$ , обозначим его  $\tau^0(s)$ , не является исключением, его специфика лишь в том, что  $|\tau^0(s)| \equiv 1$ .

*Понятие площади плоской фигуры.* Пусть на плоскости имеется ограниченная фигура  $[S]$ . Фигура называется *ограниченной*, если она помещается в некотором круге конечного радиуса.

Представим себе всевозможные многоугольники, целиком содержащиеся в фигуре  $[S]$ , которые условимся называть вложенными многоугольниками. Задействуем также всевозможные многоугольники, содержащие в себе фигуру  $[S]$ . Их назовем

покрывающими (см. рис. 14). Сразу отметим, что площадь всякого вложенного многоугольника не превосходит площади любого покрывающего. Из этого факта следует, что множество площадей всевозможных вложенных многоугольников имеет верхнюю грань. Обозначим ее  $S_*$ . Множество площадей покрывающих многоугольников имеет нижнюю грань, которую обозначим  $S^*$ . Эти грани удовлетворяют неравенству  $S_* \leq S^*$ .

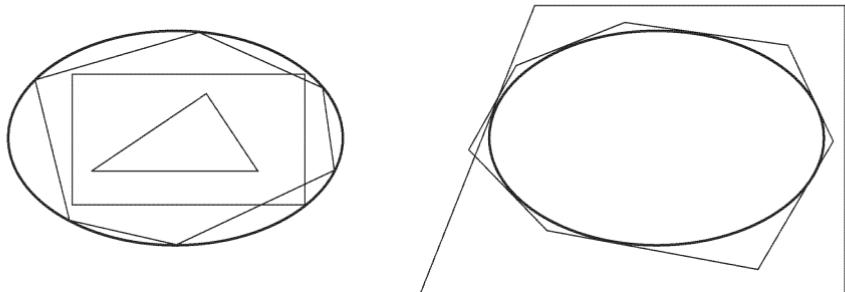


Рис. 14

Если  $S_* = S^*$ , то фигура  $[S]$  называется *квадрируемой*, а число  $S = S_* = S^*$  называется ее *площадью*.

Если фигура  $[S]$  не содержит в себе ни одного многоугольника и нижняя грань площадей покрывающих многоугольников равна нулю, то по определению  $S = 0$ .

Сформулируем *основные свойства* площади.

I. Квадрируемость и площадь фигуры  $[S]$  можно определить, пользуясь не только многоугольниками (вложенными и покрывающими), но и любыми другими квадрируемыми фигурами. Например, с использованием кругов можно доказать следующий факт.

Площадь лежащей в плоскости спрямляемой дуги равна нулю.

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ , а затем точками разобьем дугу  $[L]$  на части так, чтобы длина каждой оказалась меньше  $\varepsilon$ .

Пусть  $n$  — число таких частей,  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$  — разбивающие точки ( $M_0, M_n$  — концы дуги  $[L]$ ),  $[L_k]$  — частичные дуги, а  $L_k$  — их длины,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

А теперь покроем дугу  $[L]$  кругами, построенными следующим образом: первый круг построим с центром в точке  $M_1$

и радиусом  $L_1$ , второй — с центром в точке  $M_2$  и радиусом  $L_2$ , ..., последний, т. е.  $n$ -й — с центром в точке  $M_n$  и радиусом  $L_n$  (см. рис. 15).

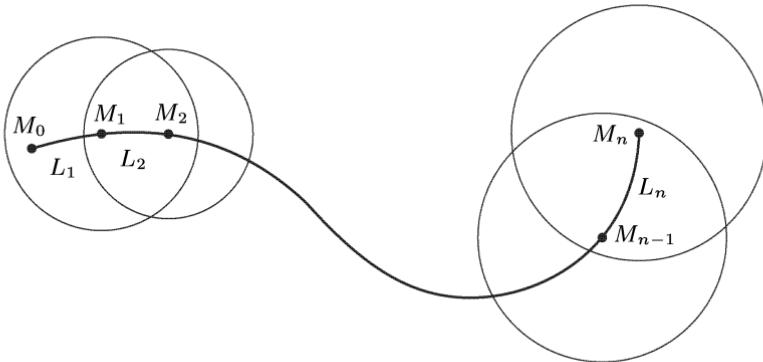


Рис. 15

Площадь указанного покрытия, очевидно, не превосходит числа

$$\sum_{k=1}^n \pi L_k^2 = \sum_{k=1}^n \pi L_k L_k < \sum_{k=1}^n \pi \varepsilon L_k = \pi \varepsilon \sum_{k=1}^n L_k = \pi \varepsilon L,$$

здесь  $L$  — длина данной дуги  $[L]$ .

Символ  $\sum$  используется для краткой записи суммы, например:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Можно сказать, что здесь слагаемые имеют общее обозначение  $a_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Полученная оценка площади покрытия показывает, что существуют покрытия дуги  $[L]$ , площади которых меньше любого наперед заданного положительного числа. Кстати, добавим, что вопрос о площадях фигур, заполненных некоторыми кривыми, в более общей постановке отнюдь не тривиален. Так, например, если дугой считать объект, полученный взаимно однозначным и взаимно непрерывным преобразованием отрезка, то утверждать, что площадь такой дуги равна нулю, уже нельзя. В фундаментальных учебниках по математическому анализу приводятся примеры так называемых жордановых дуг, заполняющих на

плоскостях фигуры с ненулевой площадью. А теперь перейдем к следующему свойству площади.

II. Если имеются вложенные в  $[S]$  квадрируемые фигуры, площади которых образуют неубывающую последовательность  $\{\underline{S}_n\}$ , а также фигуры, покрывающие  $[S]$ , с площадями, составляющими невозрастающую последовательность  $\{\bar{S}_n\}$ , и к тому же эти последовательности имеют общий предел, т. е.

$$\underline{S}_n \rightarrow S \text{ и } \bar{S}_n \rightarrow S,$$

то фигура  $[S]$  квадрируема и указанный предел  $S$  является ее площадью.

III. При сдвиге и повороте площадь фигуры не изменяется.

IV. Если фигура  $[S]$  разбита какими-то линиями на конечное число квадрируемых частей, то она сама квадрируема, и ее площадь равна сумме частичных площадей.

В порядке упражнения докажите эти утверждения.

*Площадь криволинейной трапеции.* Будем полагать, что на отрезке  $[a, b]$  определена непрерывная функция  $f(x) \geq 0$ . Фигура, ограниченная отрезком  $[a, b]$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиком функции  $f(x)$ , называется *криволинейной трапецией*.

Теорема. Криволинейная трапеция квадрируема.

Доказательство опирается на свойства функции, непрерывной на отрезке. На рис. 16 $a$  криволинейная трапеция и два прямоугольника с общим основанием, меньший вложен в трапецию, которая, в свою очередь, содержится в большем прямоугольнике. Высотами прямоугольников служат крайние значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . На рис. 16 $b$ , 16 $c$  и 16 $d$  отрезок  $[a, b]$  разбит на две и четыре равные части. В каждом частичном отрезке определены крайние значения функции, построены соответствующие прямоугольники. Меньшие прямоугольники образуют вложенные фигуры. А фигуры, составленные из больших прямоугольников, покрывают криволинейную трапецию. Теперь представим себе, что отрезок  $[a, b]$  разбит на  $m = 2^{n-1}$  равных частей и части эти пронумерованы числами  $1, 2, \dots, m$ . Обозначим  $\underline{\mu}_k \leq \bar{\mu}_k$  крайние значения  $f(x)$  на частичном отрезке с номером  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Соответственно формируются две

ступенчатые фигуры. Площадь вложенной фигуры

$$\underline{S}_n = \underline{\mu}_1 \frac{b-a}{m} + \underline{\mu}_2 \frac{b-a}{m} + \dots + \underline{\mu}_m \frac{b-a}{m} = (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2 + \dots + \underline{\mu}_m) \frac{b-a}{m}.$$

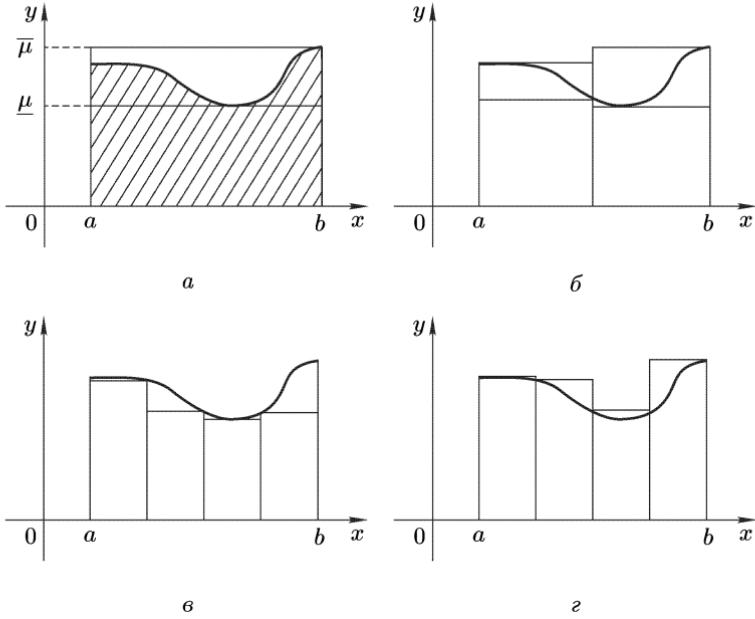


Рис. 16

Площадь ступенчатой фигуры, покрывающей криволинейную трапецию, выражается аналогично:

$$\overline{S}_n = (\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2 + \dots + \overline{\mu}_m) \frac{b-a}{m}.$$

Эти выражения, как видим, определены при  $n = 1, 2, 3, \dots$  (фигуры с площадями  $\underline{S}_1, \overline{S}_1, \underline{S}_2, \overline{S}_2, \underline{S}_3, \overline{S}_3$  изображены на рис. 16а, 16б, 16в, 16г). Мы фактически определили последовательности  $\{\underline{S}_n\}$  и  $\{\overline{S}_n\}$ . Обе последовательности ограничены, к тому же при возрастании  $n$  величина  $\underline{S}_n$  не убывает, а  $\overline{S}_n$  — не возрастает. Следовательно, обе последовательности сходятся. Их пределы обозначим

$$\underline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n \text{ и } \overline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n.$$

Нетрудно доказать, что  $\underline{S}_n \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}_n$ . Покажем, что при произвольном фиксированном  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство

$|\bar{S} - \underline{S}| < \varepsilon$ , что фактически означает равенство  $\underline{S} = \bar{S}$ . Для этого рассмотрим разность

$$\bar{S}_n - \underline{S}_n = (\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \dots + \bar{\mu}_m) \frac{b-a}{m} - (\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2 + \dots + \underline{\mu}_m) \frac{b-a}{m}.$$

После преобразования получим

$$\bar{S}_n - \underline{S}_n = ((\bar{\mu}_1 - \underline{\mu}_1) + (\bar{\mu}_2 - \underline{\mu}_2) + \dots + (\bar{\mu}_m - \underline{\mu}_m)) \frac{b-a}{m}.$$

Функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Поэтому для числа  $\frac{\varepsilon}{b-a}$  можно указать число  $\delta > 0$ , такое что на отрезке  $[a, b]$  из неравенства  $|\tilde{x} - \hat{x}| < \delta$  следует неравенство

$$|f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Теперь вспомним, что  $m = 2^{n-1}$ . Здесь важно понять, что при всех  $m$ , удовлетворяющих неравенству  $\frac{b-a}{2^{n-1}} < \delta$ , выполняется  $\bar{\mu}_k - \underline{\mu}_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$  при всех  $k = 1, 2, \dots, m = 2^{n-1}$ . При всех таких  $n$  имеем

$$\bar{S}_n - \underline{S}_n < \frac{\varepsilon}{b-a} m \frac{b-a}{m} = \varepsilon.$$

В свою очередь, из неравенства  $\bar{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon$  следует, что  $\bar{S} - \underline{S} < \varepsilon$ . Из неотрицательных чисел лишь нуль меньше любого  $\varepsilon > 0$ . Поэтому  $\bar{S} - \underline{S} = 0$ .

Таким образом,  $\underline{S} = \bar{S} = S$ . Отсюда на основании свойства II площади можно утверждать, что криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь равна  $S$ . Теорема доказана.

*Первообразная.* Функция  $F(x)$  на промежутке называется первообразной функции  $f(x)$ , если на этом промежутке

$$F'(x) \equiv f(x).$$

Если к первообразной прибавить какую-либо константу, то получится новая первообразная той же функции.

В доказательстве следующей теоремы используется квадрируемость криволинейной трапеции.

*Теорема* (существования первообразной непрерывной функции). *Непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную.*

**Доказательство.** Сначала докажем это утверждение для неотрицательной функции. Пусть  $f(x) \geq 0$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . На рис. 17 изображена криволинейная трапеция, ограниченная сверху графиком функции. Внутри отрезка произвольно зафиксирована точка  $x$ , через которую проведена вертикаль, рассекающая трапецию на две части. Левая часть заштрихована, ее площадь обозначена  $S(x)$ .

Покажем, что эта переменная площадь является первообразной данной функции  $f(x)$ . Для этого дадим аргументу приращение  $\Delta x > 0$  и рассмотрим соответствующее приращение площади (см. рис. 18). Площадь заштрихованной фигуры равна  $\Delta S$ . Изображены также две прямоугольные области с общим основанием  $\Delta x$  и высотами  $\underline{\mu}$  и  $\bar{\mu}$ , где  $\bar{\mu} \geq \underline{\mu}$  — крайние значения  $f(x)$  на отрезке  $[x, x + \Delta x]$ . Большая прямоугольная область содержит заштрихованную фигуру, которая, в свою очередь, содержит меньший прямоугольник. Отсюда соотношение площадей:

$$\underline{\mu}\Delta x \leq \Delta S \leq \bar{\mu}\Delta x.$$

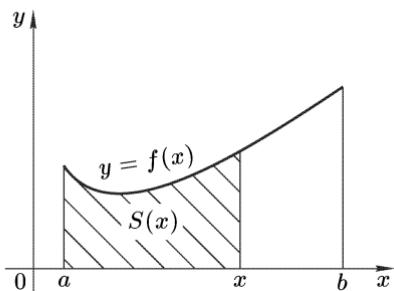


Рис. 17

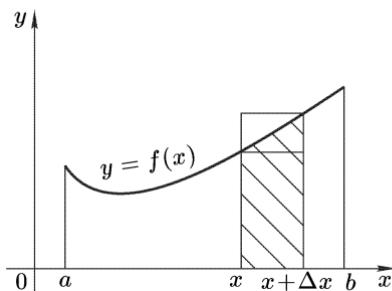


Рис. 18

Делением на  $\Delta x > 0$  получаем

$$\underline{\mu} \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq \bar{\mu}.$$

Как видим, отношение  $\frac{\Delta S}{\Delta x}$  заключено между крайними значениями функции. Следовательно, найдется по меньшей мере одна точка  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ , такая что  $f(\xi) = \frac{\Delta S}{\Delta x}$ . Теперь рассмотрим

предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

Аналогичное рассуждение при  $\Delta x < 0$  приводит к тому же результату.

Таким образом, функция  $S(x)$  на отрезке  $[a, b]$  дифференцируема, и ее производная равна данной функции  $f(x)$ , т. е.

$$S'(x) \equiv f(x).$$

Вторая часть доказательства относится к непрерывной функции  $f(x)$ , которая хотя бы на части отрезка  $[a, b]$  принимает отрицательные значения. Обозначим  $\underline{y}$  нижнее ее значение на отрезке  $[a, b]$ . Рассмотрим вспомогательную функцию  $u(x) = f(x) + \lambda$ , где  $\lambda \geq |y|$ . На рис. 19 верхняя дуга графика функции  $u(x)$  получается вертикальным сдвигом нижней на величину  $\lambda > 0$ . Функция  $u(x) \geq 0$ , поэтому соответствующая переменная площадь служит ее первообразной, т. е.  $S'(x) \equiv u(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Докажем, что функция  $F(x) = S(x) - \lambda x$  является первообразной данной функции  $f(x)$ . Дифференцированием получаем

$$F'(x) = S'(x) - \lambda = u(x) - \lambda = f(x) + \lambda - \lambda = f(x).$$

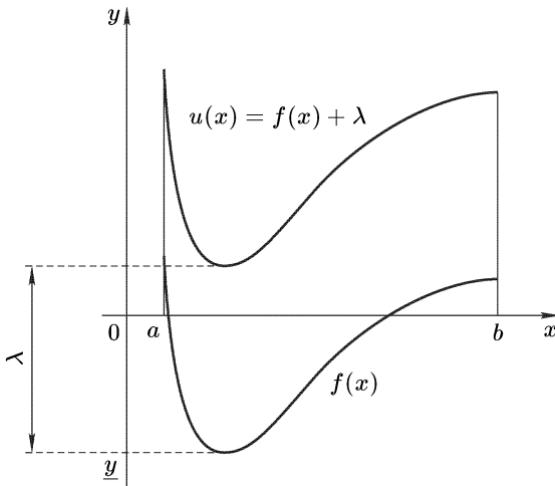


Рис. 19

Теорема доказана.

*Свойство первообразных.* На промежутке первообразные одной и той же функции отличаются на константу, т.е. если на промежутке  $F'(x) \equiv f(x)$  и  $F'_1(x) \equiv f(x)$ , то имеется некая константа  $C$ , такая что  $F_1(x) = F(x) + C$ .

Доказательство опирается на следующее утверждение: если на промежутке производная тождественна нулю, то сама функция на этом промежутке тождественна константе.

Рассмотрим производную разности первообразных:

$$(F_1(x) - F(x))' = F'_1(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0.$$

Отсюда

$$F_1(x) - F(x) \equiv C.$$

Утверждение доказано.

*Формула неопределенного интеграла.* Если  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ , то

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Здесь  $C$  — произвольная константа.

В заключение подчеркнем, что успех в освоении интегрального исчисления существенно зависит от того, насколько хорошо Вы знаете дифференциальное исчисление. Следовательно, если Вы забыли правила дифференцирования и производные элементарных функций, обязательно повторите соответствующий материал.

# Г л а в а 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1.1. Интегрируемая функция и ее определенный интеграл

**1.1.1. Интегральная сумма.** Понятие интегральной суммы функции одной переменной на отрезке является одним из основных понятий интегрального исчисления. Определяется оно следующим образом.

Отрезок конечным множеством точек разбивается на части. В каждом частичном отрезке определяется точка, и в ней значение функции. Это значение умножается на длину частичного отрезка, и все такие произведения складываются. Итоговая сумма называется *интегральной суммой* данной функции.

Введем некоторые обозначения и повторим определение. Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[L] = [a, b]$ , где  $a < b$ . Нам удобно в некоторых случаях отрезок обозначать одной буквой в квадратных скобках и той же буквой, но без скобок — его длину.

Итак, *определение интегральной суммы* состоит из трех частей.

1. Отрезок  $[L]$  конечным множеством точек разбивается на  $m$  частичных отрезков  $[L_k]$ .

2. В этих отрезках фиксируются точки, назовем их *опорными*, по одной в каждом,  $x_k \in [L_k]$ ; определяются значения функции  $f(x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

3. Значения функции умножаются на длины соответствующих частичных отрезков, после чего составляется сумма:

$$f(x_1)L_1 + f(x_2)L_2 + \dots + f(x_m)L_m,$$

что коротко записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^m f(x_k)L_k.$$

Совокупность частичных отрезков  $[L_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , будем называть *разбиением отрезка*  $[L]$ . Напоминаем, что последняя

сумма называется интегральной суммой функции  $f(x)$  при указанном разбиении отрезка  $[L]$ . При произвольном выборе опорных точек  $x_k \in [L_k]$  сумму

$$\sum_{k=1}^m f(x_k) L_k$$

будем называть *произвольной интегральной суммой*.

*Нижняя и верхняя суммы.* Для ограниченной на  $[L]$  функции  $f(x)$  определим еще две суммы:

$$\sum_{k=1}^m \underline{\mu}_k L_k, \sum_{k=1}^m \overline{\mu}_k L_k.$$

Здесь  $\underline{\mu}_k$  — нижняя грань множества значений  $f(x)$  на отрезке  $[L_k]$ , а  $\overline{\mu}_k$  — верхняя грань этого множества,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Первую из этих сумм будем называть нижней, вторую — верхней суммой.

Напоминаем, что гранями ограниченного числового множества называются концы наименьшего отрезка, содержащего это множество. Напомним также, что область значений непрерывной на отрезке функции представляет собой отрезок. Отсюда следует, в частности, что нижняя и верхняя суммы непрерывной функции являются интегральными, так как на отрезке  $[L_k]$  существуют точки, в которых непрерывная  $f(x)$  принимает свои крайние значения  $\underline{\mu}_k$  и  $\overline{\mu}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Произвольные интегральные, а также нижняя и верхняя суммы функции обладают следующими свойствами.

1. При любом разбиении отрезка любая интегральная сумма функции заключена между нижней и верхней суммами этой функции.

2. При дополнительном разбиении имеющихся частичных отрезков нижняя сумма может лишь возрасти, а верхняя — уменьшиться.

3. Всегда нижняя сумма не превосходит верхней как при общих, так и при различных разбиениях отрезка.

4. Множества нижних и верхних сумм имеют грани, причем верхняя грань нижних не превосходит нижней грани верхних сумм.

Предлагаем Вам самостоятельно доказать эти утверждения.

**1.1.2.** Нормальная последовательность разбиений отрезка и последовательность интегральных сумм определенной на этом отрезке функции. По-прежнему будем полагать, что на отрезке  $[L]$  определена функция  $f(x)$ . Вообразим, что отрезок  $[L]$  разбит на части различными способами, что множество разбиений бесконечно и пронумеровано. Будем также полагать, что в каждом разбиении выявлен наибольший частичный отрезок, и его длина обозначена  $\Delta_n$ , где  $n \in N$  — номер разбиения.

Последовательность разбиений будем называть *нормальной*, если при неограниченном росте номера разбиения длина наибольшего частичного отрезка стремится к нулю:

$$\Delta_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0.$$

Мы будем пользоваться только такими последовательностями разбиений.

Если на каждом разбиении отрезка  $[L]$  каким-либо образом определить интегральную сумму функции  $f(x)$ , то тем самым сформируется числовая последовательность интегральных сумм этой функции с общим членом вида

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k) L_k,$$

где  $m_n$  — число частичных отрезков, составляющих разбиение с номером  $n$ .

### 1.1.3. Определение интегрируемости и определенного интеграла функции.

**Определение.** Функцию будем называть *интегрируемой* на отрезке, если при любой нормальной последовательности разбиений этого отрезка все последовательности интегральных сумм функции сходятся.

Заметим, что все такие последовательности имеют общий предел. Постарайтесь самостоятельно доказать это утверждение. Рекомендуем, например, предположить, что две какие-либо последовательности интегральных сумм имеют разные пределы, и привести это допущение к противоречию с условием.

**Определение.** *Определенным интегралом* интегрируемой на отрезке функции будем называть предел любой последовательности интегральных сумм этой функции при произвольной нормальной последовательности разбиений отрезка.

Интеграл интегрируемой на отрезке  $[L] = [a, b]$  ( $a < b$ ) функции  $f(x)$  обозначается

$$\int_L f(x) dx$$

или, что более распространено,

$$\int_a^b f(x) dx.$$

При этом отрезок  $[L] = [a, b]$  называется отрезком интегрирования, его концы  $a$  и  $b$  — пределами интегрирования, функция  $f(x)$  — подынтегральной функцией, а ее аргумент  $x$  — переменной интегрирования.

Итак, если  $f(x)$  интегрируема на  $[L] = [a, b]$ , то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k) L_k.$$

Также по определению

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Напоминаем, что мы используем только нормальные последовательности разбиений и поэтому везде, где интеграл представляется пределом интегральной суммы, условие  $\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  неукоснительно соблюдается.

Определенный интеграл представляет собой число. Он не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, поэтому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

Это один и тот же интеграл.

В качестве упражнения докажите, что любые изменения подынтегральной функции на конечном множестве точек отрезка интегрирования не приводят к изменению интеграла. Доказательство неочевидно, поэтому сначала обдумайте более конкретное утверждение: интеграл не зависит от значений подынтегральной функции на концах отрезка интегрирования.

**1.1.4. Формулы пути и работы силы на прямолинейной траектории.** Ставится задача определить путь, который проходит точка  $M$  со скоростью  $\mathbf{V}(t)$  по прямой за время от  $t_0$  до  $T$ . При этом не предполагается, что точка в течение указанного времени движется только в одном направлении, допускается и обратное движение. Длины таких участков при определении пути суммируются. Задача решается следующим образом.

Во-первых, данный временной отрезок подвергается равномерному дроблению, т. е. определяется какая-нибудь нормальная последовательность его разбиений, например на равные части. Во-вторых, на каждом частичном промежутке времени каким-либо образом фиксируется момент времени, и в этот момент определяется модуль скорости. Модуль скорости множится на длину промежутка, и все такие произведения суммируются, в итоге получается интегральная сумма. И, наконец, в-третьих, истинное значение пути получается в результате предельного перехода при условии, что длина наибольшего частичного промежутка стремится к нулю, т. е. путь выражается интегралом

$$s = \int_{t_0}^T |\mathbf{V}(t)| dt.$$

*Работа силы на прямолинейном участке траектории.* Будем считать, что отрезок  $[a, b]$ , на котором вычисляется работа

силы  $\mathbf{F}$  по перемещению точки  $M$  из точки  $A$  в точку  $B$ , расположается на оси  $Ox$  некоторой декартовой координатной системы и единичный вектор этой оси обозначен  $\mathbf{i}$ . Для определенности будем считать, что отрезок  $[a, b] = [L]$  разбит на  $n$  равных частей  $[L_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . В каждом частичном отрезке произвольно фиксируется точка  $x_k \in [L_k]$  и определяется приложенный в ней вектор  $\mathbf{F}(x_k)$ . Этот вектор проецируется на траекторию. Проекция выражается с помощью скалярного произведения следующим образом:

$$\text{Пр}_{\mathbf{i}} \mathbf{F}(x_k) = (\mathbf{F}(x_k), \mathbf{i}) = |\mathbf{F}(x_k)| \cos \varphi(x_k),$$

где  $\varphi(x_k)$  — угол между вектором  $\mathbf{F}(x_k)$  и положительным направлением оси  $Ox$ . Проекция умножается на длину  $k$ -го частичного отрезка, т. е. на  $L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . При сложении всех таких произведений получается сумма в виде

$$\sum_{k=1}^n \text{Пр}_{\mathbf{i}} \mathbf{F}(x_k) L_k = \sum_{k=1}^n (\mathbf{F}(x_k), \mathbf{i}) L_k = \sum_{k=1}^n |\mathbf{F}(x_k)| \cos \varphi(x_k) L_k.$$

Как видим, это записанная в трех вариантах одна и та же интегральная сумма функции  $\text{Пр}_{\mathbf{i}} \mathbf{F}(x) = (\mathbf{F}(x), \mathbf{i}) = |\mathbf{F}(x)| \cos \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Работа определяется как предел этой суммы при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.

$$A = \int_a^b \text{Пр}_{\mathbf{i}} \mathbf{F}(x) dx = \int_a^b (\mathbf{F}(x), \mathbf{i}) dx = \int_a^b |\mathbf{F}(x)| \cos \varphi(x) dx.$$

**1.1.5. Интегрирование неравенств. Интеграл единицы. Линейные свойства определенного интеграла.** Будем полагать, что задействованные ниже функции интегрируемы на отрезке  $[a, b] = [L]$ .

**Теорема 1.** *Если на отрезке  $[a, b] = [L]$  выполняется неравенство  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , то*

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx,$$

*т.е. неравенство подынтегральных функций на отрезке интегрирования переходит на соответствующие интегралы.*

Для доказательства представим интегралы пределами соответствующих интегральных сумм:

$$\int_a^b f_1(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k) L_k, \quad \int_a^b f_2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k) L_k.$$

Заметьте, что обе интегральные суммы сформированы на общем разбиении отрезка интегрирования и общем выборе опорных точек. А теперь рассмотрите логическую цепочку. По условию на отрезке  $[a, b] = [L]$   $f_1(x) \leq f_2(x)$ . Следовательно, во всех опорных точках  $f_1(x_k) \leq f_2(x_k)$ . Отсюда следует неравенство:

$$\sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k) L_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k) L_k.$$

Это неравенство переходит на пределы соответствующих последовательностей, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k) L_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k) L_k,$$

отсюда

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Определенный интеграл единицы равен длине отрезка интегрирования, т. е.*

$$\int_a^b 1 \cdot dx = b - a.$$

Действительно, при любом разбиении отрезка  $[L] = [a, b]$  на части  $[L_k]$  и любом выборе опорных точек  $x_k \in [L_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ , при  $f(x) \equiv 1$  на отрезке  $[L]$  получается

$$\sum_{k=1}^{m_n} 1 \cdot L_k = L = b - a,$$

так как предел постоянной величины равен самой величине. Теперь можно сказать, что

$$\int_a^b dx = b - a.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е.

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Здесь величина  $\lambda$  не зависит от переменной интегрирования  $x$ . По определению

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \lambda f(x_k) L_k.$$

Постоянный множитель  $\lambda$  сначала выносится за знак суммы, а затем и за знак предела. В результате получаем

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k) L_k = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Определенный интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых.

Доказательство проведем для двух интегрируемых функций. На произвольной нормальной последовательности разбиений отрезка интегрирования  $[L] = [a, b]$  при произвольном выборе опорных точек сформируем последовательность интегральных сумм функции  $f_1(x) + f_2(x)$ . Ее общий член

$$\sum_{k=1}^{m_n} (f_1(x_k) + f_2(x_k)) L_k = \sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k) L_k + \sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k) L_k.$$

Пределы двух последних интегральных сумм при  $n \rightarrow \infty$  существуют и равны соответствующим интегралам, откуда следует,

что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} (f_1(x_k) + f_2(x_k)) L_k.$$

Следовательно,  $f_1(x) + f_2(x)$  интегрируема на отрезке  $[L] = [a, b]$ . Ее интеграл:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

Теорема доказана. Приведенное доказательство, очевидно, применимо и при большем числе слагаемых.

Две последние теоремы выражают так называемые линейные свойства определенного интеграла. Их обобщением служит следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)) dx &= \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \lambda_m \int_a^b f_m(x) dx. \end{aligned}$$

### 1.1.6. Интегрируемость непрерывной функции.

*Теорема. Непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

Напомним свойства непрерывной на отрезке функции, которыми мы будем пользоваться при доказательстве этой теоремы.

Область значений непрерывной на отрезке функции представляет собой отрезок. Непрерывная на отрезке  $[L]$  функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на этом отрезке. Это означает, что при произвольном фиксированном  $\varepsilon > 0$  существует соответствующее  $\delta > 0$ , такое что на отрезке  $[L]$  при любых  $\tilde{x}$  и  $\hat{x}$ , удовлетворяющих неравенству  $|\tilde{x} - \hat{x}| < \delta$ , гарантируется  $|f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| < \varepsilon$ .

Итак, доказательство. Пусть  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[L] = [a, b]$ , где  $a < b$ . На произвольно взятой нормальной последовательности разбиений этого отрезка сформируем три

последовательности интегральных сумм:  $\{\underline{I}_n\}$ ,  $\{\overline{I}_n\}$ ,  $\{I_n\}$ . Соответственно их общие члены имеют вид

$$\underline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} \underline{\mu}_k L_k \text{ — нижняя сумма,}$$

$$\overline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} \overline{\mu}_k L_k \text{ — верхняя сумма,}$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k) L_k \text{ — произвольная интегральная сумма функции } f(x).$$

Напомним, что  $\underline{I}_n \leq I_n \leq \overline{I}_n$ , а также  $\underline{I}_n \leq I_* \leq I^* \leq \overline{I}_n$ . Здесь  $I_*$  — верхняя грань множества нижних интегральных сумм функции  $f(x)$ ,  $I^*$  — нижняя грань множества верхних сумм этой функции (см. п. 1.1.1).

Сначала докажем, что

$$\overline{I}_n - \underline{I}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а затем что

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I = I_* = I^*.$$

Итак, рассмотрим разность

$$\overline{I}_n - \underline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} \overline{\mu}_k L_k - \sum_{k=1}^{m_n} \underline{\mu}_k L_k.$$

От разности сумм переходим к сумме разностей:

$$\overline{I}_n - \underline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} (\overline{\mu}_k - \underline{\mu}_k) L_k.$$

Теперь задействуем равномерную непрерывность функции  $f(x)$  на  $[L]$  следующим образом. Зафиксируем произвольно  $\varepsilon > 0$  и по числу  $\frac{\varepsilon}{L}$  определим  $\delta > 0$  так, чтобы при всех  $\tilde{x}$  и  $\hat{x}$  из отрезка  $[L]$  выполнялось

$$|\tilde{x} - \hat{x}| < \delta \Rightarrow |f(\tilde{x}) - f(\hat{x})| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

После этого в указанной последовательности разбиений отрезка  $[L]$  определяем номер разбиения, начиная с которого выполняется неравенство  $\Delta_n \leq \delta$ . При таких  $n$  длины всех частичных отрезков меньше числа  $\delta$ , и, следовательно, при всех  $k = 1, 2, \dots, m_n$

$2, \dots, m_n$  гарантируется, что

$$\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k} < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Объясняется это тем, что в каждом  $[L_k]$  имеются точки, в которых непрерывная функция  $f(x)$  принимает значения  $\underline{\mu_k}$  и  $\overline{\mu_k}$ . Расстояние между этими точками не превосходит  $L_k < \delta$ . Отсюда оценка:

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} < \sum_{k=1}^{m_n} \frac{\varepsilon}{L} L_k = \frac{\varepsilon}{L} \sum_{k=1}^{m_n} L_k = \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon,$$

т.е при всех достаточно больших  $n$

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} < \varepsilon.$$

Это означает, что путем увеличения  $n$  разность между верхними и нижними суммами функции можно сделать сколь угодно малой, из чего следует, в частности, что заключенные между этими суммами постоянные числа  $I_* \leq I^*$  на самом деле представляют собой одно число  $I_* = I^* = I$  и что к этому числу сходятся обе последовательности:

$$\frac{I_n}{n \rightarrow \infty} \rightarrow I \text{ и } \frac{\overline{I_n}}{n \rightarrow \infty} \rightarrow I.$$

Напомним, что произвольная интегральная сумма  $I_n$  принадлежит отрезку  $[\underline{I_n}, \overline{I_n}]$ , поэтому и она имеет тот же предел, т. е.

$$\frac{I_n}{n \rightarrow \infty} \rightarrow I = \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема доказана.

**1.1.7. Геометрический смысл определенного интеграла.** Рассмотрим интеграл непрерывной функции в следующих трех случаях: подынтегральная функция неотрицательна, неположительна, меняет знак на отрезке интегрирования.

**Теорема 1.** *Если на отрезке  $[L] = [a, b]$  выполняется неравенство  $f(x) \geq 0$ , то*

$$\int_a^b f(x) dx = S,$$

где  $S$  — площадь фигуры  $[S]$ , ограниченной снизу отрезком  $[a, b]$ , с боков — отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$ , сверху — графиком функции  $f(x)$  (см. рис. 20). Фигура называется криволинейной трапецией.

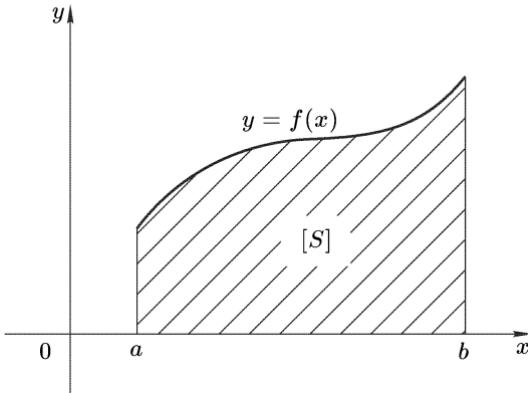


Рис. 20

**Доказательство.** Будем полагать для наглядности, что отрезок  $[L]$  разбит на  $2^n$  равных частей  $[L_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n = 2^n$ . При  $n = 1$  он разбит на две равные части, при  $n = 2$  — на четыре и т. д. Таким образом, определена конкретная нормальная последовательность разбиений данного отрезка. На ней определим последовательности  $\{\underline{I}_n\}$  и  $\{\overline{I}_n\}$  нижних и верхних сумм данной функции. Соответственно, их общие члены равны

$$\underline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} \underline{\mu}_k L_k, \quad \overline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} \overline{\mu}_k L_k.$$

Обе последовательности сходятся к интегралу (см. рис. 21)

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$



Рис. 21

Заметим также, что  $\underline{I}_n$  и  $\overline{I}_n$  — площади соответствующих ступенчатых фигур. Первая фигура вложена в криволинейную

трапецию, а вторая эту трапецию покрывает (см. рис. 22). Следовательно,  $\underline{I}_n \leq S \leq \overline{I}_n$ , где  $S$  — площадь криволинейной трапеции, отсюда следует, что те же последовательности сходятся к  $S$ . Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = S.$$

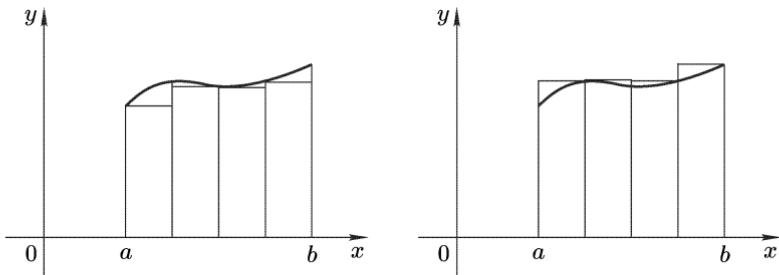


Рис. 22

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если на отрезке  $[L] = [a, b]$  выполняется неравенство  $f(x) \leq 0$ , то*

$$\int_a^b f(x) dx = -S.$$

В этом случае фигура  $[S]$  ограничена прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , сверху — отрезком  $[a, b]$ , снизу — графиком подынтегральной функции.

На рис. 23 изображены криволинейные трапеции, расположенные симметрично относительно оси  $Ox$ . Их площади равны. Трапеция, расположенная в верхней полуплоскости, сверху ограничена графиком функции  $(-f(x))$ . По доказанному

$$\int_a^b (-f(x)) dx = S \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = -S.$$

Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда на отрезке интегрирования подынтегральная функция меняет знак (см. рис. 24). Фигура по-прежнему ограничена отрезком  $[a, b]$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиком  $f(x)$ . Обратите внимание на ее части, расположенные по разные стороны от оси  $Ox$ .

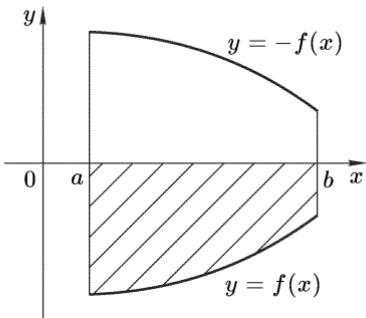


Рис. 23

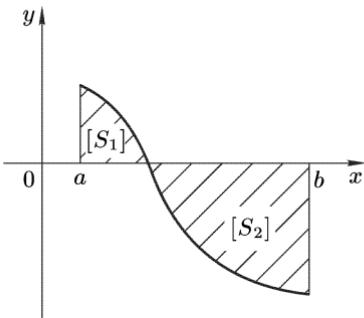


Рис. 24

**Теорема 3.** *Если функция  $f(x)$  меняет знак на отрезке  $[a, b]$ , то*

$$\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2.$$

Здесь  $S_1$  и  $S_2$  — площади частей фигуры, расположенных соответственно выше и ниже оси  $Ox$ .

Для доказательства определим две вспомогательные функции:

$$u_1(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, \quad u_2(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2}.$$

Их свойства:  $u_1(x) + u_2(x) = f(x)$ . Во всех точках  $x \in [a, b]$ , в которых  $f(x) \geq 0$ , функция  $u_1(x) = f(x)$ . В остальных точках отрезка она равна нулю. Функция  $u_2(x) = f(x)$  везде, где  $f(x) \leq 0$ , на остальной части отрезка  $u_2(x) = 0$  (см. рис. 25).

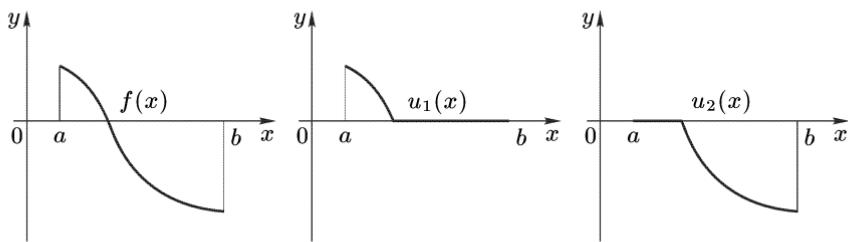


Рис. 25

Теперь обратимся к интегралу:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (u_1(x) + u_2(x)) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx = S_1 - S_2.$$

Теорема доказана.

### 1.1.8. Теорема о разбиении отрезка интегрирования. Теорема о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[L] = [a, b]$  и точка  $c \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Доказательство.** Когда  $c$  совпадает с каким-либо из концов отрезка интегрирования, утверждение очевидно, поэтому будем полагать, что  $c \in (a, b)$ . Выберем нормальную последовательность разбиений  $[a, b]$ , чтобы точка  $c$  участвовала в каждом разбиении, тем самым определим разбиения отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , на которых определим интегральные суммы функции  $f(x)$ . Обозначим их соответственно  $\tilde{I}_n$  и  $\hat{I}_n$ ,  $n$  — номер разбиения. Сумма  $\tilde{I}_n + \hat{I}_n = I_n$  является интегральной суммой данной функции на всем отрезке  $[a, b]$ . Перейдем к пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{I}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Теорема доказана (см. рис. 26).

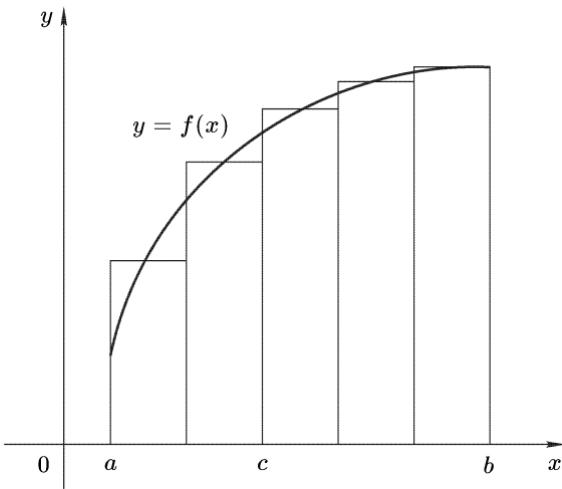


Рис. 26

*Среднее интегральное значение функции.* Средним интегральным значений интегрируемой на отрезке функции называют отношение интеграла этой функции по данному отрезку к длине этого отрезка. Среднее интегральное может как принадлежать, так и не принадлежать множеству значений функции.

**Теорема 2 (о среднем).** Среднее интегральное непрерывной на отрезке функции принадлежит области значений этой функции, т. е. на отрезке интегрирования  $[a, b]$  непрерывной на этом отрезке функции  $f(x)$  найдется по меньшей мере одна точка  $\xi$ , такая что

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(\xi).$$

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[L] = [a, b]$ , и пусть отрезок  $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$  — множество всех значений  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Тогда при любом  $x \in [a, b]$  выполняется

$$\underline{\mu} \leq f(x) \leq \bar{\mu}.$$

Перейдем к интегралам (см. п. 1.5.1).

$$\int_a^b \underline{\mu} dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \bar{\mu} dx,$$

т. е.

$$\underline{\mu}(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{\mu}(b-a).$$

Делением на  $b-a > 0$  получаем

$$\underline{\mu} \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq \bar{\mu},$$

или

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}].$$

Это означает, что существует по меньшей мере одна точка  $\xi \in [a, b]$ , такая что

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Теорема доказана.

*Интеграл с переменным верхним пределом.* Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Возьмем на отрезке какую-нибудь точку  $x$  и рассмотрим интеграл

$$\int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Напоминаем, что определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования. При любом  $x \in [a, b]$  указан-

ный интеграл имеет определенное значение. Следовательно, он представляет собой функцию переменной  $x$ .

**Теорема 3.** *Определенный интеграл с переменным верхним пределом является первообразной подынтегральной функции, т. е.*

$$\left( \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \right)'_x = f(x).$$

**Доказательство.** Введем обозначение:

$$\int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} = I(x).$$

Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ . Соответствующее приращение функции  $\Delta I$  равно

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

При  $\Delta x > 0$  по теореме о разбиении отрезка интегрирования

$$\int_a^{x+\Delta x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_x^{x+\Delta x} f(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

поэтому

$$\Delta I = \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_x^{x+\Delta x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_x^{x+\Delta x} f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

По теореме о среднем

$$\Delta I = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi) \Delta x,$$

где  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ .

Это приращение разделим на  $\Delta x$  и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

Напоминаем, что переменная  $\xi$  заключена между  $x$  и  $x + \Delta x$ , поэтому

$$\underset{\Delta x \rightarrow 0}{\xi \rightarrow x}.$$

Пусть теперь  $\Delta x < 0$ , тогда  $x + \Delta x < x$ . По теореме о разбиении

$$\begin{aligned} \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} &= \int_a^{x+\Delta x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_{x+\Delta x}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \Rightarrow \\ &\int_a^{x+\Delta x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_{x+\Delta x}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta I = \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_{x+\Delta x}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} = - \int_{x+\Delta x}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

По теореме о среднем

$$\Delta I = -f(\xi)(x - (x + \Delta x)) = f(\xi)\Delta x,$$

где  $\xi \in [x + \Delta x, x]$ . Таким образом, и при  $\Delta x < 0$  имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = f(x).$$

Вывод:  $I'(x) = f(x)$ . Теорема доказана.

## § 1.2. Вычисление определенных интегралов

**1.2.1. Формула Ньютона–Лейбница.** Формулой Ньютона–Лейбница называется выражение определенного интеграла приращением подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

**Теорема.** Если  $F(x)$  — первообразная непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Доказательство.** Пусть  $F(x)$  — какая-либо из первообразных данной функции  $f(x)$ . Функция

$$I(x) = \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

тоже является первообразной функции  $f(x)$  и поэтому отличается от  $F(x)$  на константу, т. е.

$$F(x) = I(x) + C.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= I(b) + C - (I(a) + C) = \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Приращение первообразной на отрезке интегрирования обозначается с помощью так называемого знака двойной подстановки:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

соответственно

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Формула Ньютона–Лейбница традиционно служит главным средством вычисления определенного интеграла, разумеется, когда удается найти первообразную подынтегральной функции.

Пример 1.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2.

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

**1.2.2. Некоторое расширение понятия определенного интеграла.** В математическом анализе и его приложениях фактически используются два определенных интеграла с общим отрезком интегрирования и общей подынтегральной функцией. Свойства одного из них, основного, приведены в предыдущем параграфе. Напомним определение. При  $a < b$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k) L_k,$$

где  $[a, b] = [L]$  — отрезок интегрирования.

Второй интеграл, у которого верхний предел меньше нижнего, определим следующим образом:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, когда пределы интегрирования меняются местами, интеграл меняет знак.

Докажите самостоятельно, что и второй интеграл обладает линейными свойствами и что к нему применима формула Ньютона–Лейбница. Мы же ограничимся примером.

Пример.

$$\int_9^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_9^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{9} = 4 - 6 = -2.$$

А теперь вычислим интеграл по определению:

$$\int_9^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = - \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{x} \Big|_4^9 = -2\sqrt{9} - (-2\sqrt{4}) = -2.$$

**1.2.3. Формула интегрирования по частям.**

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Формула получается почленным интегрированием в пределах от  $a$  до  $b$  равенства

$$d(uv) = v \, du + u \, dv.$$

Рассмотрите выкладку

$$\int_a^b u \, dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v \, du.$$

Так как

$$\int_a^b d(uv) = uv \Big|_a^b,$$

получаем формулу

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{array} \right] = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = \\ &= x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e \ln e - 1 \ln 1 - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

**1.2.4. Преобразование определенного интеграла к новой переменной интегрирования.** Переход в определенном интеграле к новой переменной интегрирования производится с помощью соответствующей подстановки по формуле

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

Предполагается, что подстановка  $x = \varphi(t)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$  обладает непрерывной производной  $\varphi'(t)$ , к тому же  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ .

Докажем это утверждение.

Пусть  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ , тогда композиция  $F(\varphi(t))$  будет первообразной произведения  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ . Действительно, по формуле производной сложной функции

$$(F(\varphi(t))'_t = (F(x))'_x x'_t = f(x)x'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

По формуле Ньютона–Лейбница

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Равенство исходного и преобразованного интегралов доказано.

На практике преобразование определенного интеграла к новой переменной интегрирования, т. е. интегрирование подстановкой, имеет целью вычислить интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Это обстоятельство определяет необходимость поиска эффективной подстановки, в результате которой, например, появляется возможность определить первообразную преобразованной подынтегральной функции. Заметим также, что пересчет пределов интегрирования для новой переменной освобождает от необходимости возвращения к прежней переменной интегрирования.

Пример.

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ \alpha = \sqrt{0} = 0 \\ \beta = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right] = \int_0^2 \frac{2t dt}{1 + t}.$$

Преобразуем подынтегральную функцию вместе с интегралом:

$$I = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int_0^2 dt - 2 \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2t \Big|_0^2 - 2 \ln |1+t| \Big|_0^2.$$

В результате двойной подстановки получаем

$$I = 2(2 - 0) - 2(\ln 3 - \ln 1) = 4 - 2 \ln 3.$$

**1.2.5. Квадратурные формулы приближенного интегрирования.** Когда известна первообразная  $F(x)$  подынтегральной функции  $f(x)$ , для вычисления интеграла применяют формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Здесь, как говорят практики, проблема лишь в том, чтобы выражение  $F(b) - F(a)$  довести до числа. При отсутствии первообразной используются методы приближенного вычисления интегралов. Приведенные ниже формулы называются квадратурными, видимо потому, что при их геометрическом толковании используются площади различных фигур, составленных из прямоугольников, а также трапеций, в том числе и криволинейных. Квадратура — синоним площади.

*Формулы прямоугольников.* Ставится задача вычислить, хотя бы приближенно, интеграл

$$\int_a^b y(x) dx.$$

По определению

$$\sum_{k=1}^{m_n} y(x_k) L_k \rightarrow \int_a^b y(x) dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это означает, в частности, что истинная погрешность приближенного равенства  $\int_a^b y(x) dx \approx \sum_{k=1}^{m_n} y(x_k) L_k$  при неограниченном росте  $n$  бесконечно мала, поэтому интегральную сумму можно использовать в качестве приближенного значения интеграла.

Расчетные выражения в формулах прямоугольников представляют собой специальные интегральные суммы, которые формируются следующим образом. Отрезок  $[a, b]$  разбивается на  $n$  равных частей точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ . При этом длина частичных отрезков  $h = \frac{b-a}{n}$  называется шагом

разбиения. Введем обозначения:  $y(x_k) = y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Теперь можем написать

$$\int_a^b y(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h \quad \text{см. рис. 27),}$$

$$\int_a^b y(x) dx \approx y_1 h + y_2 h + \dots + y_n h \quad \text{см. рис. 28).}$$

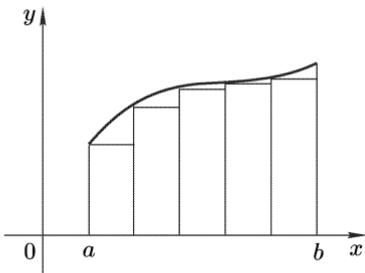


Рис. 27

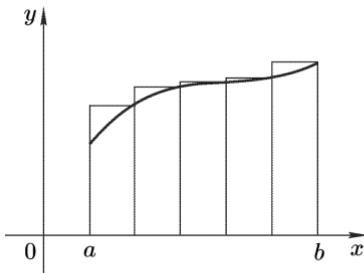


Рис. 28

В первом случае в качестве опорных точек взяты левые концы частичных отрезков, во второй формуле подынтегральная функция задействована на правых концах этих отрезков. Эти формулы записываются также в следующем виде:

$$\int_a^b y(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

$$\int_a^b y(x) dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

*Формула трапеций.* Формула трапеций получается сложением двух предыдущих равенств. Результат делится на два. В итоге получается следующее выражение интеграла:

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right).$$

Это равенство называют формулой трапеций. Преобразуем правую часть и перепишем формулу в следующем виде:

$$\int_a^b y(x) dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right).$$

Дроби представляют собой средние линии трапеций, а их произведения на  $h$  — площади этих трапеций (см. рис. 29). Таким образом, при  $y(x) > 0$  правая часть формулы трапеций равна сумме указанных площадей.

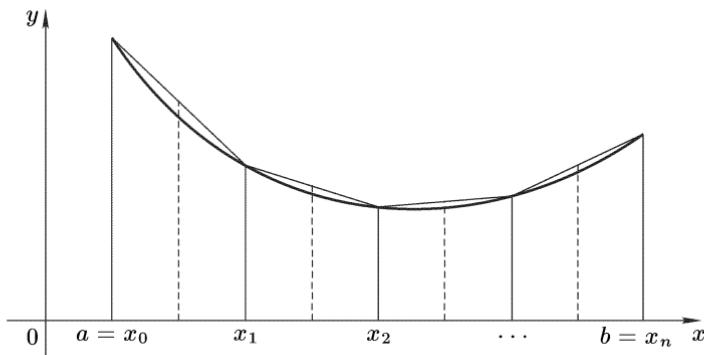


Рис. 29

*Формула парабол (метод Симпсона).* Задача остается прежней, т. е. нужно вычислить, пусть приближенно, определенный интеграл

$$\int_a^b y(x) dx.$$

Существо метода Симпсона приближенного вычисления интеграла состоит в следующем.

1. Отрезок  $[a, b]$  разбивается на четное число  $m = 2n$  равных частей точками  $x_k$ ; величина  $h = (b - a)/2n = x_k - x_{k-1}$  — шаг разбиения,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ . Значения  $y(x)$  в этих точках:  $y_k = y(x_k)$ . Соответствующие точки графика обозначены  $M_k$ , их координаты  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ .

2. Точки  $M_{2k-2}$ ,  $M_{2k-1}$ ,  $M_{2k}$  соединяются дугой графика  $y = ax^2 + bx + c$ . Этот график представляет собой или параболу,

или, если точки лежат на одной прямой, прямую  $y = bx + c$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, получается состыкованная из соответствующих дуг кривая, имитирующая график  $y(x)$  (см. рис. 30).

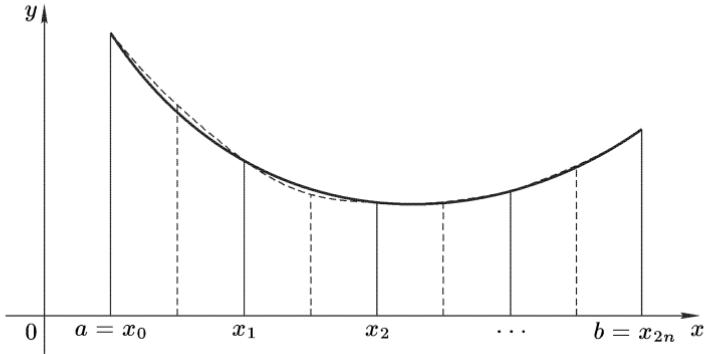


Рис. 30

3. Интегрируется вспомогательная функция  $u(x)$ , графиком которой служит указанная кривая. Результат принимается в качестве приближенного значения исходного интеграла, т. е.

$$\int_a^b y(x) dx \approx \int_a^b u(x) dx.$$

Вывод формулы парабол представляет собой вычисление последнего интеграла, который равен сумме соответствующих интегралов по частичным отрезкам  $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Чтобы вычислить интеграл

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} u(x) dx,$$

сдвинем координатную систему вдоль оси абсцисс на величину  $x_{2k-1}$ , т. е. выполним подстановку  $\tilde{x} = x - x_{2k-1}$ . Ординаты точек  $M_{2k-2}$ ,  $M_{2k-1}$ ,  $M_{2k}$  не меняются, абсциссы преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{2k-2} &= x_{2k-2} - x_{2k-1} = -h, \\ \tilde{x}_{2k-1} &= x_{2k-1} - x_{2k-1} = 0, \\ \tilde{x}_{2k} &= x_{2k} - x_{2k-1} = h.\end{aligned}$$

Будем полагать, что числовые пары  $(-h, y_{2k-2}), (0, y_{2k-1}), (h, y_{2k})$  удовлетворяют уравнению  $y = ax^2 + bx + c$ , т. е. что коэффициенты  $a, b, c$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a \cdot h^2 - b \cdot h + c = y_{2k-2}, \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = y_{2k-1}, \\ a \cdot h^2 + b \cdot h + c = y_{2k}. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$2ah^2 + 6c = y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}.$$

Теперь вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} u(x) dx &= \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \\ &= \left( \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} u(x) dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Отсюда следует формула парабол:

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

В развернутом виде

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) dx &\approx \frac{h}{3}((y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots \\ &\quad \dots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})). \end{aligned}$$

Иногда эта формула используется в виде

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1})).$$

Принято считать, что при одном и том же объеме вычислительных работ формула трапеций точнее формулы прямоугольников, а формула Симпсона точнее формулы трапеций. Мы же полагаем, что при выборе вычислительных средств и организации расчетов суждения такого рода недостаточны, хотя бы потому что нельзя считать корректными вычисления, которые не обеспечивают заданной точности, поэтому вместе с вычислительными методами разрабатываются и способы оценки их точности.

*Оценки погрешностей квадратурных формул.* Если интеграл

$$I = \int_a^b y(x) dx \approx I_{\text{пр}}$$

вычислен по формуле прямоугольников с шагом разбиения  $h = \frac{b-a}{n}$ , то приближенное равенство  $I \approx I_{\text{пр}}$  имеет погрешность, оцениваемую следующим образом:

$$|I - I_{\text{пр}}| \leq \frac{b-a}{2} \max_{x \in [a,b]} |y'(x)| h.$$

Пусть теперь интеграл вычисляется по формуле трапеций  $I \approx I_{\text{тр}}$  с тем же шагом  $h$ . Тогда

$$|I - I_{\text{тр}}| \leq \frac{b-a}{12} \max_{x \in [a,b]} |y''(x)| h^2.$$

При вычислении интеграла методом Симпсона погрешность соответствующего равенства  $I \approx I_{\text{пар}}$  можно оценить так:

$$|I - I_{\text{пар}}| \leq \frac{b-a}{90} \max_{x \in [a,b]} |y^{(4)}(x)| h^4.$$

Напоминаем, что в этом случае отрезок делится на четное число  $m = 2n$  равных частей, поэтому  $h = \frac{b-a}{2n}$ .

### § 1.3. Некоторые геометрические приложения определенного интеграла

**1.3.1. Площадь плоской фигуры.** Здесь речь пойдет о фигуре, обозначим ее  $[S]$ , которая в некоторой координатной системе  $Oxy$  определяется следующим образом. Проекция  $[S]$  на ось  $Ox$  представляет собой отрезок  $[a, b]$ . Всякая прямая, параллельная  $Oy$  и пересекающая  $[a, b]$ , имеет с фигурой общий отрезок.

И, наконец, фигура  $[S]$  снизу и сверху ограничена графиками непрерывных на  $[a, b]$  функций  $y_1(x) \leqslant y_2(x)$  (см. рис. 31). Такие фигуры будем называть *стандартными областями*.

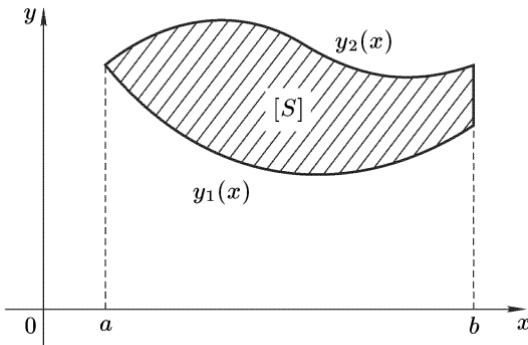


Рис. 31

Покажем, что площадь  $S$  стандартной области  $[S]$  можно определить по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Когда вся фигура расположена над осью  $Ox$ , как на рис. 31,

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx = S_2 - S_1 = S.$$

Здесь  $S_2$  и  $S_1$  — площади криволинейных трапеций. Большая из них сверху ограничена графиком  $y_2(x)$ , меньшая — графиком  $y_1(x)$ . Когда же область  $[S]$  хотя бы частично находится под осью  $Ox$ , поступим следующим образом. Сдвинем область вверх как жесткую фигуру, так чтобы новая область  $\tilde{[S]}$  оказалась над осью  $Ox$ . Величина сдвига  $\lambda$  определяется неравенством  $\lambda \geqslant |\underline{y}|$ , где  $\underline{y}$  — нижнее значение функции  $y_1(x)$ .

Область  $\tilde{[S]}$  имеет ту же площадь, что и область  $[S]$ , снизу она ограничена графиком функции  $y_1(x) + \lambda$ , сверху — графиком

функции  $y_2(x) + \lambda$ . Таким образом,

$$S = \tilde{S} = \int_a^b (y_2(x) + \lambda - (y_1(x) + \lambda)) dx = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Пример 1. Площадь фигуры  $[S]$ , ограниченной линиями

$$y = x^2 - 3x; \quad x = 2; \quad x = -1; \quad y = x - 5.$$

Фигура  $[S]$  представляет собой стандартную область (см. рис. 32). Ее проекцией на ось  $Ox$  является отрезок  $[-1; 2]$ . Важно определить, какой именно график ограничивает область сверху, а какой — снизу. В нашем случае  $y_2(x) = x^2 - 3x$ ;  $y_1(x) = x - 5$  соответственно. Теперь можно записать:

$$\begin{aligned} S = \int_{-1}^2 (x^2 - 3x - (x - 5)) dx &= \int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 5) dx = \\ &= \left( \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-1}^2 = 12. \end{aligned}$$

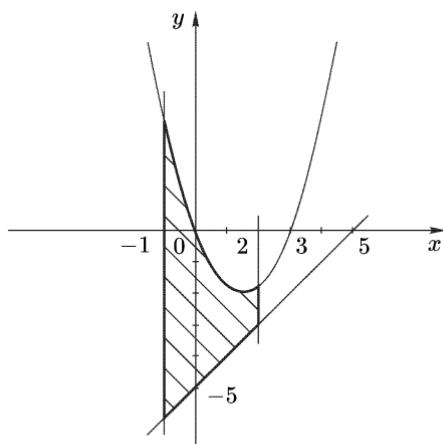


Рис. 32

*Обобщенная формула площади области, ограниченной замкнутым контуром.* Пусть область  $[S]$  ограничена простым замкнутым контуром, т. е. контуром без самопересечений, и пусть

этот контур задается параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Когда  $t$  меняется от  $\alpha$  до  $\beta$ , точка  $M(x, y)$  описывает контур так, что в процессе ее движения область находится слева (см. рис. 33).

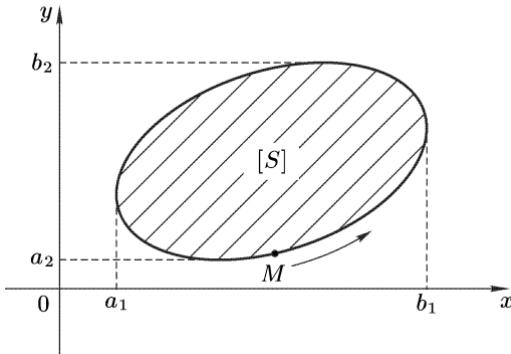


Рис. 33

Предполагается также, что функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$  имеют непрерывные производные. Формула площади фигуры  $[S]$  такова:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx') dt.$$

Ее обоснование опирается на геометрический смысл определенного интеграла (см. п. 1.1.7). Мы его не приводим, а выскажем лишь некоторые соображения, естественные в нашем упрощенном случае, представленном на рис. 33.

Когда параметр  $t$  меняется от  $\alpha$  до  $\beta$ , переменная  $x$  дважды проходит отрезок  $[a_1, b_1]$ : один раз слева направо, а другой — в противоположном направлении. Движению от  $a_1$  к  $b_1$  соответствует интеграл, равный площади нижней, т. е. малой криволинейной трапеции. Когда же  $x$  возвращается от  $b_1$  к  $a_1$ , соответствующий интеграл равен площади большей криволинейной трапеции с коэффициентом  $-1$ . Результат сложения этих двух интегралов можно представить так:

$$\int_{\alpha}^{\beta} yx' dt = -S.$$

Аналогично и точка  $y$  дважды проходит отрезок  $[a_2, b_2]$ : один раз в положительном, а другой раз — в отрицательном направлении. И в этом случае получаются два интеграла. Суммированием получаем следующий результат:

$$\int_{\alpha}^{\beta} xy' dt = S.$$

Ясно, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} xy' dt - \int_{\alpha}^{\beta} yx' dt = 2S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx') dt.$$

Когда же фигура  $[S]$  хотя бы частично располагается в других координатных четвертях, вместо нее рассматривается любая ее копия в I четверти, которая получается соответствующим параллельным переносом (при этом к правым частям параметрических уравнений первоначального граничного контура прибавляются соответствующие константы, обозначим их  $\lambda$  и  $\mu$ ). Применим формулу к смещенной фигуре:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} ((x + \lambda)(y + \mu)' - (y + \mu)(x + \lambda)') dt &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx') dt + \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda y' - \mu x') dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю. Таким образом, формулу можно использовать при любом расположении фигуры.

**Пример 2.** По этой формуле вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом, для чего координатные оси совместим с осями симметрии фигуры. Используем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

соответствующие параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Когда  $t$  меняется от 0 до  $2\pi$ , точка  $M$  с координатами  $(x, y)$  startует из точки  $(a, 0)$ , движется по эллипсу против хода часовой стрелки и финиширует в той же точке  $(a, 0)$ . По формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx') dt$$

в нашем случае получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t (b \sin t)' - b \sin t (a \cos t)') dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = ab\pi. \end{aligned}$$

Отсюда формула площади фигуры с эллиптической границей:  $S = \pi ab$ .

Приведенные выше идеи можно применить и к областям более сложных конфигураций, даже таким, у которых граничный контур составлен из дуг, каждая из которых имеет свою параметризацию. Так, например, можно получить формулу площади сектора в полярных координатах, ограниченного лучами  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\varphi = \varphi_2$  и кривой  $r = r(\varphi)$  (см. рис. 34):

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi.$$

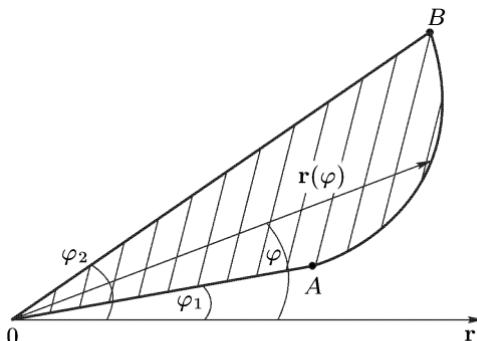


Рис. 34

Пример 3. Вычислим площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) = 0.$$

Запишем уравнение лемнискаты в полярных координатах, подставив вместо  $x$  и  $y$  выражения  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Получим уравнение

$$r^2 = 8 \cos 2\varphi.$$

Будем рассматривать площадь половины фигуры, нижний предел интегрирования  $\varphi_1 = -\pi/4$ , верхний предел  $\varphi_2 = \pi/4$ :

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 8 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{8}{2} \cdot \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 8.$$

**1.3.2. Длина дуги кривой.** Здесь мы приводим три формулы, по которым можно вычислить длины соответствующих дуг. Каждая из них приспособлена к определенным способам задания самой дуги. При выводе этих формул мы будем пользоваться сведениями из дифференциальной геометрии, которые приведены во введении.

Вначале будем считать, что на кривой  $[L]$  введен естественный параметр  $s$  — дуговая координата текущей точки  $M \in [L]$ . Сама кривая  $[L]$  при этом задается естественной параметризацией в виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ .

Нам понадобится равенство  $ds = |\mathbf{dr}|$ , которое мы будем использовать в трех вариантах:

а) кривая  $[L]$  задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

В этом случае  $ds = |\mathbf{dr}| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$ . При этом предполагается, что при возрастании  $s$  и  $t$  точка  $M$  по  $[L]$  движется в одну сторону;

б) кривая  $[L]$  лежит на плоскости  $Oxy$  и является графиком функции  $y = y(x)$ . Система параметрических уравнений в этом

случае, очевидно, такова:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x). \end{cases}$$

Отсюда

$$|dr| = \sqrt{x'^2 + y'^2} dx,$$

т. е.

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

в) кривая  $[L]$  на плоскости определяется полярным уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$ . Введем на этой плоскости еще и декартову координатную систему, причем так, чтобы положительный луч оси  $Ox$  совпадал с полярной осью. Тогда, взяв в качестве параметра полярный угол  $\varphi$  текущей точки линии  $[L]$ , получаем параметрические уравнения этой линии:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Отсюда

$$x'_\varphi = \rho'_\varphi \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad y'_\varphi = \rho'_\varphi \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi.$$

Выпишем и преобразуем сумму квадратов этих производных:

$$\begin{aligned} (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 &= (\rho'_\varphi)^2 \cos^2 \varphi - 2\rho'_\varphi \rho(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + \\ &+ \rho^2(\varphi) \sin^2 \varphi + (\rho'_\varphi)^2 \sin^2 \varphi + 2\rho'_\varphi \rho(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2(\varphi) \cos^2 \varphi = \\ &= \rho^2(\varphi) (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + (\rho'_\varphi)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2(\varphi) + (\rho'_\varphi)^2. \end{aligned}$$

В результате дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Теперь мы можем перейти к выводу расчетных формул длины дуги. Во всех случаях длина дуги  $[L]$  с концами  $A_1, A_2$  выражается следующим образом:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} ds,$$

где  $s_1 < s_2$  — дуговые координаты концов  $A_1, A_2$  данной дуги.

*Формула длины дуги, заданной параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

получается путем перехода в последнем интеграле от переменной интегрирования  $s$  к переменной  $t$ :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — значения параметра  $t$ , соответствующие концам  $A_1$  и  $A_2$  дуги  $[L]$ . Здесь мы воспользовались данными пункта а).

В случае б) таким же способом получается *формула длины дуги графика  $y = y(x)$* :

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где  $x_1 < x_2$  — абсциссы концов дуги.

*Формула длины дуги в полярных координатах:*

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi,$$

здесь  $\rho = \rho(\varphi)$  — полярное уравнение дуги,  $\varphi_1 < \varphi_2$  — полярные углы ее концов.

Пример 1. Вычислим длину дуги одной арки циклоиды (см. рис. 35). Ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Пределы интегрирования:  $t_1 = 0$  и  $t_2 = 2\pi$ , так как параметр  $t$  пробегает отрезок  $[0; 2\pi]$ , когда абсцисса изменяется от 0

до  $2\pi a$ . Итак,

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\
 &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\
 &= -2a 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислим длину дуги параболы  $y = \frac{x^2}{2}$  от точки с абсциссой  $x_1 = 0$  до точки с абсциссой  $x_2 = 1$  (см. рис. 36):

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left( x \sqrt{1 + x^2} + \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right).
 \end{aligned}$$

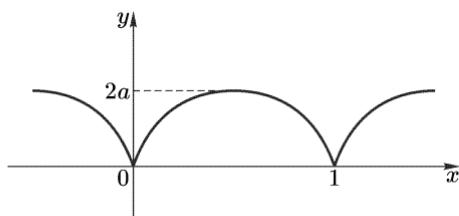


Рис. 35

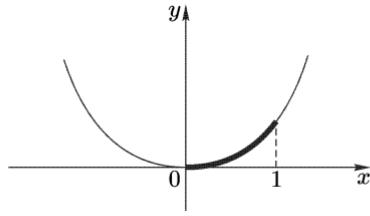


Рис. 36

**Пример 3.** Найти длину одного витка спирали Архимеда. Полярное уравнение спирали:  $\rho = a\varphi$ ,  $\varphi$  изменяется в пределах

от 0 до  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \\ &= a \left( \frac{1}{2}\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right| \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= a \left( \pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln \left| 2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right| \right). \end{aligned}$$

## § 1.4. Несобственные интегралы

### 1.4.1. Несобственные интегралы непрерывных функций.

*Основные несобственные интегралы.* В их определении задействована непрерывная на промежутке функция, ее интеграл с переменным верхним или нижним пределами, а также предел этого интеграла (здесь и далее используется понятие конечного предела функции).

Будем полагать функцию  $f(x)$  непрерывной на промежутке  $[a, b)$  при  $a < b$ . Допускается, в частности,  $b = +\infty$ , т. е. промежуток  $[a, +\infty)$  не исключается.

*Несобственный интеграл функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b)$*  определим и обозначим следующим образом:

$$\int_a^{b-0} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Пусть теперь  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $(a, b]$ . Промежуток  $(-\infty, b]$  не исключается. По определению

$$\int_{a+0}^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a+0} \int_x^b f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Здесь существование предела означает существование соответствующего несобственного интеграла. При этом интеграл по определению равен этому пределу (см. соответствующее равенство). Когда предел не существует, то по определению не существует и несобственный интеграл (в этом случае равенство арифметического смысла не имеет). Несобственный интеграл, если он

существует, иногда называют «сходящимся к соответствующему пределу». Несуществующие несобственные интегралы называют «расходящимися».

**Пример 1.** Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2}.$$

Преобразуем интеграл с переменным верхним пределом:

$$\int_1^x \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2} = \left( -\frac{1}{\tilde{x}} \right) \Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = 1,$$

т. е. данный интеграл существует и равен единице.

С помощью другой символики из теории пределов последнюю выкладку значительно короче можно представить следующим образом:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} + 1 = 1,$$

что, разумеется, надлежит понимать как результат вышеприведенного предельного перехода (см. рис. 37).

**Пример 2.** Та же функция  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  рассматривается на полуинтервале  $(0; 1]$ . На левом конце она не определена, к тому же при  $x \rightarrow +0$   $f(x) \rightarrow +\infty$  (см. рис. 37):

$$\int_{+0}^1 \frac{dx}{x^2} = \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{+0}^1 = -1 + \frac{1}{0} = \infty.$$

Этот несобственный интеграл не существует (расходится).

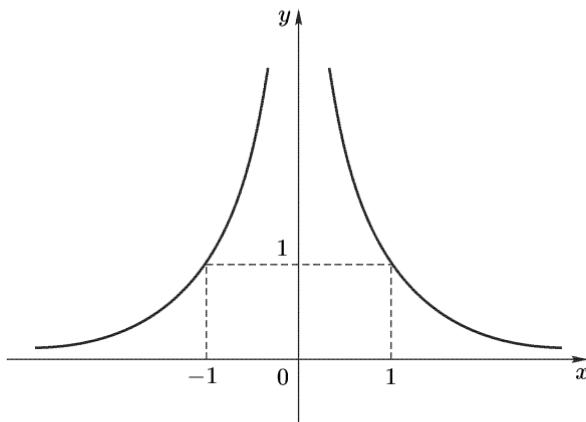


Рис. 37

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то ее несобственные интегралы на полуинтервалах  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  существуют и равны соответствующему определенному интегралу, т. е.

$$\int_a^{b-0} f(x) dx = \int_{a+0}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Доказательство.** При  $x \in [a, b]$  по теореме о разбиении отрезка интегрирования (см. п. 1.1.8) имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_x^b f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Непрерывная функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  ограничена, т. е. существует число  $\mu$ , такое что на  $[a, b]$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq \mu$ . Отсюда

$$\left| \int_x^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} \right| \leq \int_x^b |f(\tilde{x})| d\tilde{x} \leq \int_x^b \mu d\tilde{x} = \mu \int_x^b dx = \mu(b - x).$$

При  $x \rightarrow b - 0$  имеем  $\mu(b - x) \rightarrow 0$ , отсюда

$$\left| \int_x^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} \right| \rightarrow 0.$$

Это, в свою очередь, означает, что функция  $\int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}$  отличается от числа  $\int_a^b f(x) dx$  на бесконечно малую. Следовательно,

$$\int_a^{b-0} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_a^b f(x) dx.$$

Равенство  $\int_{a+0}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  доказывается аналогично.

**Теорема 2.** Если на промежутке  $[a, b]$  две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны и удовлетворяют неравенству  $|f(x)| \leq g(x)$  и  $\int_a^{b-0} g(x) dx$  существует, то существуют и интегралы

$$\int_a^{b-0} f(x) dx, \quad \int_a^{b-0} |f(x)| dx.$$

**Доказательство.** Определим две вспомогательные функции

$$u_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad u_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Функция  $u_1(x)$  совпадает с  $f(x)$  везде, где  $f(x) \geq 0$ , и тождественна нулю, когда  $f(x) < 0$ . А функция  $u_2(x)$  тождественна нулю при  $f(x) > 0$  и равна  $|f(x)|$ , когда  $f(x) \leq 0$ . Эти функции на промежутке  $[a, b]$  неотрицательны, не превосходят  $g(x)$ , к тому же  $f(x) = u_1(x) - u_2(x)$ ,  $|f(x)| = u_1(x) + u_2(x)$ .

Введем обозначения:

$$I(x) = \int_a^x g(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad I = \int_a^{b-0} g(x) dx.$$

Отметим, что на промежутке  $[a, b)$  функция  $I(x)$  не убывает и поэтому при  $x \rightarrow b - 0$  стремится к своему пределу  $I$  снизу, следовательно, при  $x \in [a, b)$  имеем:  $I(x) \leqslant I$ . Точно также и интегралы вспомогательных функций,

$$I_1(x) = \int_a^x u_1(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad I_2(x) = \int_a^x u_2(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

на промежутке  $[a, b)$  не убывают и удовлетворяют неравенствам

$$I_1(x) \leqslant I(x) \leqslant I, \quad I_2(x) \leqslant I(x) \leqslant I.$$

Таким образом, будучи неубывающими и ограниченными сверху, функции  $I_1(x)$  и  $I_2(x)$  при  $x \rightarrow b - 0$  имеют пределы  $I_1$  и  $I_2$  соответственно. Отсюда следует существование интересующих нас интегралов. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} &= \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x (u_1(\tilde{x}) - u_2(\tilde{x})) d\tilde{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow b-0} (I_1(x) - I_2(x)) = I_1 - I_2 = \int_a^{b-0} f(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x |f(\tilde{x})| d\tilde{x} = I_1 + I_2 = \int_a^{b-0} |f(x)| dx.$$

Теорема доказана.

*Обобщение несобственного интеграла функции, непрерывной на промежутке.* Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на конечном или бесконечном промежутке  $(a, b)$ . Промежуток разбивается на две части какой-либо точкой  $c \in (a, b)$ , и рассматриваются два

несобственных интеграла

$$\int_{a+0}^c f(x) dx, \quad \int_c^{b-0} f(x) dx.$$

Если эти интегралы существуют, то по определению существует и несобственный интеграл по всему промежутку, равный их сумме, что будем записывать следующим образом:

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x) dx = \int_{a+0}^c f(x) dx + \int_c^{b-0} f(x) dx.$$

Если хотя бы один из этих интегралов не существует, то по определению не существует и несобственный интеграл функции  $f(x)$  на промежутке  $(a, b)$ . Заметим, что приведенное определение корректно в том смысле, что так определенный несобственный интеграл не зависит от выбора точки  $c \in (a, b)$ . Действительно, при любой другой точке  $c_1 \in (a, b)$  соответствующая сумма основных несобственных интегралов с помощью теоремы о разбиении преобразуется к вышеприведенной сумме.

Пример 3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$

Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  непрерывна на всей числовой оси  $(-\infty, +\infty)$ . Рассмотрим два интеграла:  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$

и  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-\infty}^0 = \arctg 0 - \arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \arctg(+\infty) - \arctg 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Оба интеграла существуют и равны  $\frac{\pi}{2}$ . Таким образом, существует и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

**Пример 4.** В интервале  $(-1; 1)$  рассмотрим две функции:  $f_1(x) = \frac{x}{1-x^2}$  и  $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Их графики почти неразличимы. Уточним лишь, что при  $x \in (0; 1)$  график функции  $f_1(x)$  выше графика  $f_2(x)$ . Несобственные интегралы данных функций представим в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1+0}^{1-0} f_1(x) dx &= \int_{-1+0}^0 f_1(x) dx + \int_0^{1-0} f_1(x) dx, \\ \int_{-1+0}^{1-0} f_2(x) dx &= \int_{-1+0}^0 f_2(x) dx + \int_0^{1-0} f_2(x) dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим вторые слагаемые:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-0} \frac{x dx}{1-x^2} &= -\frac{1}{2} \ln |1-x^2| \Big|_0^{1-0} = \infty, \\ \int_0^{1-0} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^{1-0} = 1. \end{aligned}$$

Интеграл функции  $f_1(x)$  на интервале  $(-1; 1)$  не существует. Для полного исследования второго интеграла рассмотрим интеграл

$$\int_{-1+0}^0 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \Big|_{-1+0}^0 = -1.$$

Таким образом, интеграл второй функции существует:

$$\int_{-1+0}^{1-0} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - 1 = 0.$$

Заметим, что одной непрерывности функции на промежутке недостаточно для существования ее интеграла (см. примеры). При некоторых дополнительных условиях существование соответствующего несобственного интеграла гарантируется.

**Теорема 3.** *Если функция непрерывна на конечном интервале и на его концах имеет пределы, то на этом интервале ее несобственный интеграл существует.*

**Доказательство.** Пусть непрерывная на конечном интервале  $(a, b)$ ,  $a < b$ , функция  $f(x)$  на концах этого интервала имеет односторонние пределы  $f(a+0)$  и  $f(b-0)$ . Доопределим ее в точках  $a$  и  $b$  указанными пределами, т. е. будем считать, что  $f(a) = f(a+0)$  и  $f(b) = f(b-0)$ . Теперь функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

При произвольном фиксированном  $c \in (a, b)$  на основании теоремы 1 получаем

$$\int_{a+0}^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$$

а также

$$\int_c^{b-0} f(x) dx = \int_c^b f(x) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, при указанном условии несобственный и определенный интегралы функции совпадают.

**1.4.2. Обобщенное понятие несобственного интеграла.** Пусть конечный или бесконечный промежуток  $(a, b)$  разбит на части конечным множеством точек  $a < c_1 < c_2 < \dots < c_{m-1} < b$  и функция  $f(x)$  непрерывна внутри каждого из образовавшихся промежутков. В точках  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$ , а также на концах  $a = c_0$  и  $b = c_m$  функция может быть любой: непрерывной, разрывной или неопределенной.

Если существуют все несобственные интегралы

$$\int_{C_{k-1}+0}^{C_k-0} f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

то по определению существует и несобственный интеграл данной функции по всему промежутку, равный сумме этих интегралов, т. е.

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{C_{k-1}+0}^{C_k-0} f(x) dx.$$

Если хотя бы один из этих интегралов не существует, то по определению не существует и интеграл по всему промежутку.

**Пример 1.** Рассмотрим выражение

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Мы не можем считать его определенным интегралом и вычислять по формуле Ньютона–Лейбница, так как функция  $f(x) = 1/x^2$  в нуле имеет бесконечный разрыв. Ее несобственный интеграл на отрезке  $[-1; 1]$  не существует, так как расходятся интегралы

$$\int_{-1}^{-0} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{+0}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на конечном интервале  $(a, b)$  за исключением, быть может, конечного множества точек этого интервала  $a < c_1 < c_2 < \dots < c_{m-1} < b$  и существуют односторонние пределы  $f(c_k \pm 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ , а также  $f(a + 0)$  и  $f(b - 0)$ , то существует несобственный интеграл

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{C_{k-1}}^{C_k} f(x) dx,$$

здесь  $c_0 = a$ ,  $c_m = b$ .

**Замечание.** Функция, удовлетворяющая условию последней теоремы, произвольно доопределенная в точках  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Ее определенный интеграл имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{C_{k-1}}^{C_k} f(x) dx.$$

Обоснование этого утверждения можно построить, следуя плану доказательства интегрируемости функции, непрерывной на отрезке (см. п. 1.1.6), с некоторыми оценочными добавлениями в первой части доказательства. Из теоремы 1 и последнего замечания следует теорема 2.

**Теорема 2.** *Если функция на отрезке имеет конечное число точек разрыва первого рода, в остальных точках отрезка непрерывна, то на этом отрезке существуют и равны определенный и несобственный интегралы этой функции (точку разрыва функции мы называем точкой разрыва первого рода, если функция в этой точке имеет неравные односторонние пределы).*

**Пример 2.** Рассматривается интеграл разрывной функции:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx,$$

где  $f(x) = \begin{cases} 1; & x \in [-1; 0), \\ (x - 2)^2; & x \in (0; 2]. \end{cases}$

В нуле, как видим, функция имеет разрыв первого рода. Ее односторонние пределы равны:  $f(-0) = 1$ ,  $f(+0) = 4$  (см. рис. 38).

Ее несобственный и определенный интегралы равен

$$\int_{-1+0}^{2-0} f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^2 (x - 2)^2 dx = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}.$$

Заметим, что понятие основных несобственных интегралов (см. начало п. 1.4.1) становится более общим при замене в соответствующих определениях непрерывности функции ее интегрируемостью. Тем самым расширяются последующие

обобщения понятия несобственного интеграла и, разумеется, соответствующие теоремы. В качестве примера без доказательства приводим следующее утверждение.

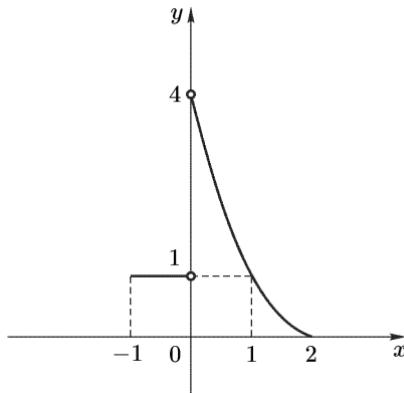


Рис. 38

**Теорема 3.** *Если две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  на конечном или бесконечном промежутке  $(a, b)$  удовлетворяют условиям:  $|f(x)| \leq g(x)$ ,  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на любом отрезке  $[x_1, x_2] \subset (a, b)$  и существует несобственный интеграл*

$$\int_{a+0}^{b-0} g(x) dx,$$

*то существуют и несобственные интегралы*

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x) dx, \quad \int_{a+0}^{b-0} |f(x)| dx.$$

Введем еще одно понятие. Функцию будем называть *абсолютно интегрируемой на промежутке*, если на этом промежутке существует несобственный интеграл ее модуля. На основании теоремы 3 можно сказать, что из абсолютной интегрируемости функции следует интегрируемость в несобственном смысле са-

мой этой функции, т. е. из существования несобственного интеграла

$$\int_{a+0}^{b-0} |f(x)| \, dx$$

следует существование несобственного интеграла

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x) \, dx.$$

Обратное утверждение неверно.

### § 1.5. Задания для упражнений

Сначала предлагаются упражнения, позволяющие определить качество усвоения Вами теоретического материала этой главы.

Приступая к следующим заданиям, Вы можете проверить надежность практических навыков, усвоенных Вами в результате проработки материала в целом.

1. Сформулируйте определение разбиения отрезка и интегральной суммы на отрезке.
2. Дайте определение интегрируемости и определенного интеграла функции на отрезке.
3. Докажите теорему об интегрируемости непрерывной функции.
4. Опишите и докажите свойства определенного интеграла.
5. Обоснованно ответьте на вопрос о том, как интегрируются неравенства функции на отрезке.
6. Опишите с доказательством геометрический смысл определенного интеграла в случае неотрицательной, неположительной и меняющей знак функции.
7. Сформулируйте и докажите теорему о среднем применительно к определенному интегралу.
8. Сформулируйте и докажите теорему о разбиении отрезка интегрирования.
9. Докажите, что интеграл с переменным верхним пределом является первообразной подынтегральной функции.

10. Выведите формулу Ньютона–Лейбница вычисления определенного интеграла.

11. Опишите и обоснуйте правило преобразования определенного интеграла к новой переменной интегрирования.

12. Выпишите формулу интегрирования по частям применительно к определенному интегралу и дайте ее вывод.

13. Выведите формулу площади стандартной области.

14. Выведите формулу длины дуги, заданной:

параметрическими уравнениями;

уравнениями в полярных координатах;

функцией  $y = y(x)$ .

15. Определите основные несобственные интегралы, сформулируйте обобщенное понятие несобственного интеграла непрерывной функции, определите понятие несобственного интеграла разрывной функции.

*Вычислите определенные интегралы.*

$$16. \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} - \varphi_0\right) dt. \quad 17. \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt[y]{y+1}} dy. \quad 18. \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$$

$$19. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx. \quad 20. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx. \quad 21. \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$22. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx. \quad 23. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx. \quad 24. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$25. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx. \quad 26. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx. \quad 27. \int_0^1 \sqrt{2x + x^2} dx.$$

$$28. \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad 29. \int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}}.$$

$$30. \int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}. \quad 31. \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega x + \varphi_0) dx.$$

$$32. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx. \quad 33. \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx.$$

$$34. \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx. \quad 35. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$36. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx. \quad 37. \int_1^e \ln^3 x dx.$$

*Вычислите площади плоских фигур.*

38. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = \ln x$  и  $y = \ln^2 x$ .

39. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 2x + 1$  и  $x - y - 1 = 0$ .

40. Окружность  $x^2 + y^2 = 8$  разделена параболой  $y = x^2/2$  на две части. Найдите площади обеих частей.

41. Вычислите площадь фигуры, заключенной между линией  $y = \frac{1}{1+x^2}$  и параболой  $y = \frac{x^2}{2}$ .

42. Вычислите площадь фигуры, ограниченной астроидой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

43. Найдите площадь фигуры, ограниченной эллипсом  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 6 \sin t$  и полуплоскостью  $y \geq 3$ .

44. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  и осью абсцисс.

45. Найдите площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией  $y^2 = x^2 - x^4$ .

46. Найдите площади криволинейных фигур, образованных пересечением эллипса  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  и гиперболы  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ .

*Вычислите длины дуг.*

47. Область ограничена линиями  $2y = x^2$  и  $y = 2$ . Определите длину ее границы.

48. Найдите длину дуги линии  $y = \ln(1 - x^2)$  (от  $x_1 = 0$  до  $x_2 = \frac{1}{2}$ ).

49. Определите длину дуги кривой  $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ , отсеченной прямой  $y = 2x$ .

50. Определите длину дуги архimedовой спирали  $r = a\varphi$ , когда  $\varphi$  меняется от  $\frac{\pi}{4}$  до  $\frac{3\pi}{4}$ .

51. Вычислите длину дуги кривой  $r = 6 \cos \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .

52. Найдите длину дуги эвольвенты окружности:  $x = R(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = R(\sin t - t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

53. Определите длину астроиды  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

54. Определите длину одного витка винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = \frac{t}{2\pi}$ .

55. Стандартная область  $[S]$  определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 8, \\ y \geq x^2 - 2. \end{cases}$$

Определите длину граничного контура этой области.

*Вычислите несобственные интегралы (или покажите, что они не существуют).*

$$56. \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 + 1}. \quad 57. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}}.$$

$$58. \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad \text{где} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}, & x \in [-1; 0), \\ 1/\sqrt{x}, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

$$59. \int_0^1 x \ln x dx. \quad 60. \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx.$$

61.  $\int_0^3 f(x) dx$ , где  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1), \\ 3 - x, & x \in (1; 3]. \end{cases}$

62.  $\int_{-1+0}^{1-0} \frac{dx}{x^2 - 1}.$     63.  $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx.$

64.  $\int_{+0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$     65.  $\int_{-2+0}^{2-0} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

## Г л а в а 2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Теория двойного интеграла в своей основе повторяет теорию определенного интеграла. Ваше восприятие предлагаемого здесь материала будет более легким и полным, если Вы освежите в памяти содержание первых двух параграфов предыдущей главы. Посмотрите, как там определяются интегральные суммы функции одной переменной, нормальные последовательности разбиений отрезка, интегрируемость и определенный интеграл функции одной переменной.

### § 2.1. Интегрируемость и двойной интеграл функции двух переменных

**2.1.1. Интегральные суммы функции двух переменных на прямоугольной области.** Будем полагать, что на области определения функции двух переменных  $f(x, y)$  задана область, ограниченная прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям. Обозначим ее  $[S^*]$  и назовем *стандартной прямоугольной областью* (см. рис. 39).

*Определение интегральной суммы функции двух переменных* состоит из следующих трех частей.

1. Область  $[S^*]$  разбивается на части — ячейки  $[S_1], [S_2], \dots, [S_m]$  (см. рис. 40).
2. В ячейках определяются опорные точки  $M_k(x_k, y_k) \in [S_k]$ , по одной в каждой ячейке, а также значения функции в этих точках:  $f(M_k) = f(x_k, y_k), k = 1, 2, \dots, m$  (см. рис. 41).
3. Определяющая формула интегральной суммы:

$$\sum_{k=1}^m f(M_k)S_k = \sum_{k=1}^m f(x_k, y_k)S_k.$$

Здесь  $S_k$  — площадь ячейки  $[S_k], k = 1, 2, \dots, m$ .

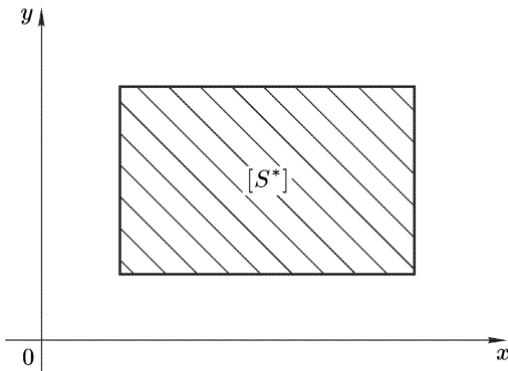


Рис. 39

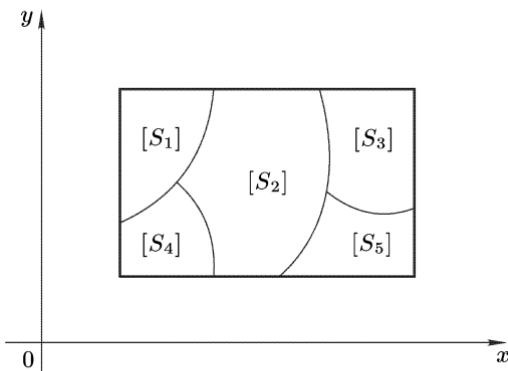


Рис. 40

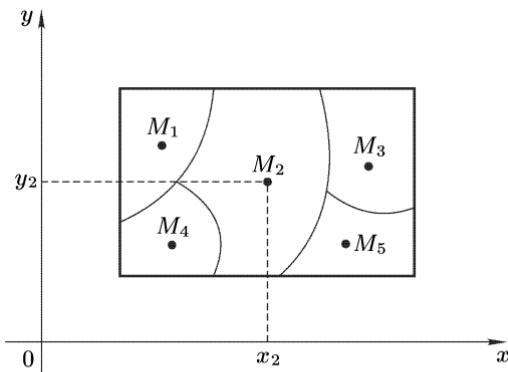


Рис. 41

При произвольном выборе опорных точек интегральную сумму данной функции будем называть *произвольной*. Если же точки определяются каким-либо специальным образом, то и сумму соответственно будем называть *специальной*.

Нам понадобятся также суммы, которые определим для ограниченной функции:

$$\sum_{k=1}^m \underline{\mu}_k S_k, \quad \sum_{k=1}^m \overline{\mu}_k S_k,$$

где  $\underline{\mu}_k$  — нижняя грань множества значений  $f(x, y)$  на  $[S_k]$ ,  $\overline{\mu}_k$  — верхняя грань этого множества,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Первую из этих сумм будем называть нижней, а вторую — верхней суммой функции. Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на  $[S^*]$ , то эти суммы являются *интегральными суммами*, так как в каждой ячейке  $[S_k]$  найдутся точки, в которых функция принимает указанные значения.

Заметим, что, во-первых, при любом разбиении области произвольная интегральная сумма функции заключена между нижней и верхней суммами этой функции. Во-вторых, при дополнительных разбиениях имеющихся ячеек нижняя сумма может лишь возрасти, а верхняя — уменьшиться. В-третьих, даже при различных разбиениях нижняя сумма не превосходит верхней. И, наконец, в-четвертых, множества нижних и верхних сумм имеют грани, причем верхняя грань нижних сумм не превосходит нижней грани верхних сумм.

В заключение приводим условия, которым должны удовлетворять разбиения области.

1. Число  $m$  ячеек  $[S_k]$ , составляющих разбиение области  $[S^*]$ , конечно.
2. Площади ячеек определены (мы их обозначили  $S_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ).
3. Ячейки замкнуты, т. е. содержат свои границы.
4. Пересечения ячеек или пусты, или состоят лишь из общих граничных точек.
5. Границы ячеек не имеют толщины, точнее — их площадь равна нулю.

Таким образом, «паркет», покрывающий область, может иметь любую конфигурацию.

**2.1.2. Нормальная последовательность разбиений стандартной прямоугольной области и последовательность интегральных сумм определенной на этой области функции.** Будем полагать, что стандартная прямоугольная область  $[S^*]$  разбита на ячейки разными способами, число разбиений бесконечно, разбиения пронумерованы. Кроме того, в каждом из них выявлена ячейка с наибольшим диаметром  $\Delta_n$ , где  $n$  — номер разбиения. Диаметром ячейки называется расстояние между наиболее удаленными друг от друга точками этой ячейки.

Будем говорить, что разбиения составляют *нормальную последовательность*, если при неограниченном росте номера максимальный диаметр ячейки стремится к нулю, т. е.

$$\Delta_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0.$$

Мы будем использовать только такие последовательности разбиений.

Теперь на каждом разбиении произвольно сформируем интегральную сумму данной функции  $f(x, y)$  и тем самым определим числовую последовательность произвольных интегральных сумм этой функции. Ее общий член имеет вид

$$I_n = \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) S_k,$$

где  $m_n$  — число ячеек, составляющих  $n$ -е разбиение.

**2.1.3. Определение интегрируемости и двойного интеграла функции на прямоугольной области.** Функцию будем называть *интегрируемой* на стандартной прямоугольной области, если при любой нормальной последовательности разбиений этой области все последовательности интегральных сумм данной функции сходятся.

Заметим, что все такие последовательности имеют общий предел, что можно доказать методом от противного.

*Двойным интегралом* интегрируемой на прямоугольной области функции двух переменных будем называть предел любой последовательности интегральных сумм этой функции при произвольной нормальной последовательности разбиений области.

Интеграл интегрируемой на стандартной прямоугольной области  $[S^*]$  функции  $f(x, y)$  обозначается

$$\iint_{[S^*]} f(x, y) dx dy,$$

при этом  $[S^*]$  называется областью интегрирования, а  $f(x, y)$  — подынтегральной функцией.

Теперь мы можем повторить *определение двойного интеграла*:

$$\iint_{[S^*]} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) S_k.$$

В условии предельного перехода мы сознательно не написали  $\Delta_n \rightarrow 0$ , поскольку соблюдение этого условия оговорено.

**2.1.4. Поток жидкости через прямоугольную площадку.** Вообразим, что некоторая часть пространства заполнена жидкостью. Ее динамическое состояние моделирует поле скоростей. Оно считается заданным, если в каждой точке  $M$  заполненного пространства определен вектор  $\mathbf{V}(M)$  скорости движения жидкости в этой точке.

Мысленно опустим в жидкость прямоугольник с натянутой на него плоской поверхностью, тоже воображаемой, так как она не должна мешать движению жидкости. Указанную фигуру назовем прямоугольной площадкой и обозначим  $[S^*]$ . Попытаемся определить количество жидкости, протекающей через  $[S^*]$  в заданном направлении в единицу времени. Направление определим единичным вектором  $\mathbf{N}_0$ , перпендикулярным к площадке. Для определенности будем полагать, что во всех точках  $M \in [S^*]$  угол между векторами  $\mathbf{V}(M)$  и  $\mathbf{N}_0$  острый. Разобьем площадку  $[S^*]$  на ячейки  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , например, прямыми, параллельными сторонам граничного прямоугольника. Для определенности будем полагать, что каждая сторона прямоугольника разбита точками на  $n$  равных частей и что именно через эти точки проведены прямые. При этом способе разбиения  $m = n^2$ . Теперь в произвольно взятой точке  $M_k \in [S_k]$  определим вектор  $\mathbf{V}(M_k)$ , который спроектируем на вектор  $\mathbf{N}_0$ . Проекция равна скалярному произведению этих векторов и представляет собой высоту  $H_k$  прямоугольного параллелепипеда с основанием  $S_k$ .

Объем жидкости, протекающей через ячейку  $[S_k]$  в единицу времени, приближенно приравнивается объему этого параллелепипеда, т. е. произведению

$$H_k S_k = \text{Пр}_{\mathbf{N}_0} \mathbf{V}(M_k) S_k = (\mathbf{V}(M_k), \mathbf{N}_0) S_k,$$

где  $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $m = n^2$  (см. рис. 42).

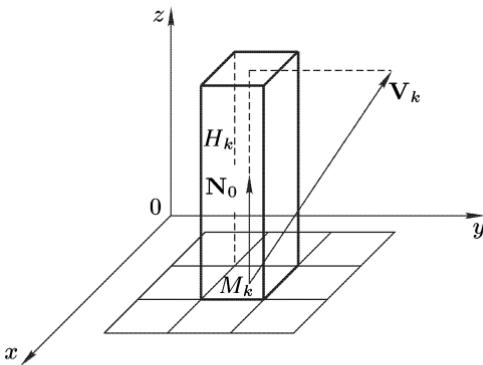


Рис. 42

Объем жидкости, протекающей в единицу времени через всю площадку  $[S^*]$ , в гидродинамике называется потоком жидкости через эту площадку. Определяется он следующим образом:

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} (\mathbf{V}(M_k), \mathbf{N}_0) S_k,$$

где  $m_n = n^2$ . На рис. 42 система координат расположена так, что  $[S^*]$  является в плоскости  $Oxy$  стандартной прямоугольной областью, а скалярное произведение  $(\mathbf{V}(M_k), \mathbf{N}_0)$  представляет собой функцию двух аргументов, определенную на этой области. При интегрируемости этой функции можно сказать, что поток выражается двойным интегралом:

$$Q = \iint_{[S^*]} (\mathbf{V}(M), \mathbf{N}_0) dxdy,$$

поскольку сумма, находящаяся под знаком предела, является соответствующей интегральной суммой.

### 2.1.5. Интегрирование неравенств. Двойной интеграл единицы. Линейные свойства двойного интеграла.

Теорема 1. Пусть функции  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  интегрируемы на стандартной прямоугольной области  $[S^*]$ , тогда на этой области из неравенства функций следует неравенство соответствующих интегралов, т. е.

$$f_1(x, y) \leq f_2(x, y) \Rightarrow \iint_{[S^*]} f_1(x, y) dx dy \leq \iint_{[S^*]} f_2(x, y) dx dy.$$

Для доказательства возьмем какую-нибудь нормальную последовательность разбиений области  $[S^*]$ . В каждом разбиении определим опорные точки и сформируем интегральные суммы данной функции. Очевидно, что при общем выборе опорных точек из неравенства функций вытекает неравенство интегральных сумм, следовательно и соответствующих пределов, т. е. двойных интегралов. Повторим эту логическую цепочку. По условию на области  $[S^*]$  выполняется

$$\begin{aligned} f_1(x, y) \leq f_2(x, y) &\Rightarrow \sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k, y_k) S_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k, y_k) S_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k, y_k) S_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k, y_k) S_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint_{[S^*]} f_1(x, y) dx dy \leq \iint_{[S^*]} f_2(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если функция на стандартной прямоугольной области тождественна единице, то она интегрируема на этой области и соответствующий двойной интеграл равен площади интегрирования, т. е.

$$\iint_{[S^*]} dx dy = S^*.$$

Для доказательства удостоверимся в том, что при любых разбиениях области все интегральные суммы функции

$f(x, y) \equiv 1$  равны площади этой области, для чего рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) S_k = \sum_{k=1}^{m_n} 1 \cdot S_k = S^*.$$

Таким образом, любая последовательность интегральных сумм функции  $f(x, y) \equiv 1$  сходится к  $S^*$ . Отсюда

$$\int\int_{[S^*]} dx dy = S^*.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Сумма интегрируемых функций интегрируема, и ее двойной интеграл равен сумме двойных интегралов слагаемых.*

Лишь для некоторого сокращения выкладки доказательство проведем для двух интегрируемых функций. Возьмем произвольно нормальную последовательность разбиений области  $[S^*]$  и при произвольном выборе опорных точек сформируем интегральные суммы  $\sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k, y_k) S_k$  и  $\sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k, y_k) S_k$ . По условию последовательности этих сумм сходятся, из чего следует, что сходится и последовательность следующих интегральных сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_n} (f_1(x_k, y_k) + f_2(x_k, y_k)) S_k &= \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} f_1(x_k, y_k) S_k + \sum_{k=1}^{m_n} f_2(x_k, y_k) S_k. \end{aligned}$$

Это означает, что функция  $f_1(x, y) + f_2(x, y)$  интегрируема и ее двойной интеграл равен

$$\begin{aligned} \int\int_{[S^*]} (f_1(x, y) + f_2(x, y)) dx dy &= \\ &= \int\int_{[S^*]} f_1(x, y) dx dy + \int\int_{[S^*]} f_2(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Также легко доказывается и следующее утверждение.

**Теорема 4.** Если функция  $f(x, y)$  интегрируема на стандартной прямоугольной области  $[S^*]$ , то при любом постоянном множителе  $\lambda$  произведение  $\lambda f(x, y)$  также интегрируемо на этой области и

$$\int \int_{[S^*]} \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \int \int_{[S^*]} f(x, y) dx dy,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

Линейные свойства двойного интеграла также выражает следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int \int_{[S^*]} (\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) + \dots + \lambda_p f_p(x, y)) dx dy &= \\ &= \lambda_1 \int \int_{[S^*]} f_1(x, y) dx dy + \lambda_2 \int \int_{[S^*]} f_2(x, y) dx dy + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_p \int \int_{[S^*]} f_p(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

где  $p \in N$ . Здесь предполагается, что функции  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ , ...,  $f_p(x, y)$  дифференцируемы на области  $[S^*]$  и что  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  — константы.

**2.1.6. Интегрируемость и двойной интеграл функций на ограниченных областях произвольной конфигурации.** Положим, что функция  $f(x, y)$  определена на некотором ограниченном множестве  $D$ . Будем считать, что это множество находится в некоторой стандартной прямоугольной области  $[S^*]$  (см. рис. 43).

На рис. 43 заштрихованная фигура изображает множество  $D$ . Продлим нашу функцию на всю прямоугольную область  $[S^*]$  тождественным нулем. Точнее, введем функцию  $f^*(x, y)$ , равную  $f(x, y)$  на множестве  $D$  и нулю в остальной части области  $[S^*]$ . Функцию  $f^*(x, y)$  назовем стандартным продолжением данной функции  $f(x, y)$  на область  $[S^*]$ .

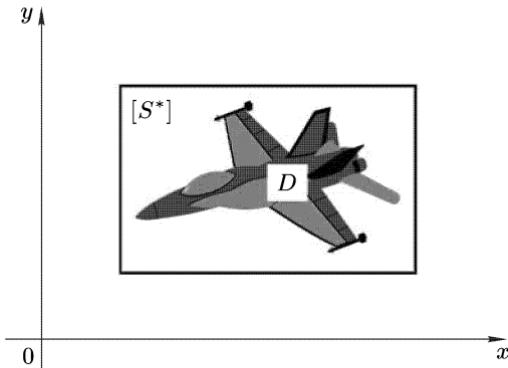


Рис. 43

**Определение.** Функция  $f(x, y)$  называется *интегрируемой на множестве*  $D$ , если ее стандартное продолжение на область  $[S^*] \supseteq D$  интегрируемо на  $[S^*]$ . Определяется и соответствующий интеграл

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int\int_{[S^*]} f^*(x, y) dx dy.$$

**2.1.7. Интегрируемость непрерывной функции.** Доказательство интегрируемости непрерывной на стандартной прямоугольной области функции двух переменных практически получается повторением доказательства соответствующей теоремы для функции одной переменной, непрерывной на отрезке (см. п. 1.1.6). Отличие лишь в том, что разбиения отрезка заменяются разбиениями прямоугольной области, частичные отрезки — ячейками, длины — площадями и т. д. В таком доказательстве, естественно, используются свойства функций, непрерывных на ограниченных замкнутых множествах. Важным для нас частным случаем таких множеств является стандартная область. Напомним ее определение. Фигуру  $[S]$  в плоскости  $Oxy$  мы условились называть стандартной областью, если, во-первых, ее проекция на  $Ox$  представляет собой отрезок, обозначим его  $[a, b]$ , во-вторых, всякая вертикальная прямая, пересекающая  $[a, b]$ , имеет с  $[S]$  общий отрезок, в частности точку, и, наконец, в-третьих, фигура  $[S]$  снизу и сверху ограничена графиками непрерывных на  $[a, b]$  функций  $y_1(x) \leq y_2(x)$ . Граница рассматривается как часть фигуры.

Область значений непрерывной на такой области функции представляет собой отрезок. К тому же непрерывная на стандартной области  $[S]$  функция  $f(x, y) = f(M)$  равномерно непрерывна на этой области, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать соответствующее число  $\delta > 0$ , такое что на  $[S]$  выполняется:

$$|\tilde{M}\hat{M}| < \delta \Rightarrow |f(\tilde{M}) - f(\hat{M})| < \varepsilon.$$

**Теорема.** *Непрерывная на стандартной области функция интегрируема на этой области.*

**Доказательство.** Разделено на три части. Первая часть подготовительная. Если Вы помните первый пункт этого параграфа, где определены произвольная интегральная сумма, нижняя и верхняя суммы необязательно непрерывных функций, а также соотношения между ними, то эта часть для Вас практически очевидна.

Вторая часть основная. В ней оценивается разность между нижней и верхней суммами стандартного продолжения данной непрерывной функции с целью показать, что при любой нормальной последовательности разбиений прямоугольной области эта разность бесконечно мала.

В третьей, заключительной части, доказывается, что все последовательности интегральных сумм сходятся, причем их общий предел одновременно является верхней и нижней гранями множеств нижних и верхних сумм этого продолжения.

Итак, первая часть. По условию функция  $f(x, y)$  непрерывна на стандартной области  $[S] \subseteq [S^*]$ ; здесь, как и ранее,  $[S^*]$  — стандартная прямоугольная область.

Будем считать, что на произвольно взятой нормальной последовательности разбиений области  $[S^*]$  для функции  $f^*(x, y)$  определены три последовательности сумм:  $\{\underline{I}_n\}$ ,  $\{\overline{I}_n\}$ ,  $\{I_n\}$ . Их общие члены:  $\underline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} \underline{\mu}_k S_k$  — нижняя сумма,  $\overline{I}_n = \sum_{k=1}^{m_n} \overline{\mu}_k S_k$  — верхняя сумма,  $I_n = \sum_{k=1}^{m_n} f^*(x_k, y_k) S_k$  — произвольная интегральная сумма функции  $f^*(x, y)$ , здесь  $n$  — номер разбиения, а  $m_n$  — число составляющих его ячеек. Напомним, что  $\underline{\mu}_k \leq \overline{\mu}_k$  — грани множества значений  $f^*(x, y)$  на множестве  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ .

Поскольку  $f^*(x, y)$  может оказаться разрывной на границе области  $[S]$ , нельзя утверждать, что  $\underline{I}_n$  и  $\overline{I}_n$  — интегральные суммы этой функции, однако приведенные ниже соотношения верны:

$$\underline{I}_n \leq I_n \leq \overline{I}_n, \quad \underline{I}_n \leq I_* \leq I^* \leq \overline{I}_n.$$

Здесь  $I_*$  — верхняя грань множества нижних сумм,  $I^*$  — нижняя грань множества верхних сумм функции  $f^*(x, y)$ .

Обращаем Ваше внимание на следующий факт: при  $[S_k] \subset [S]$  функция  $f^*(x, y) = f(x, y)$  непрерывна на  $[S_k]$  и поэтому в соответствующих точках ячеек  $[S_k]$  принимает значения  $\underline{\mu}_k$  и  $\overline{\mu}_k$ .

Часть вторая. Здесь нам понадобятся следующие наблюдения, относящиеся к любому разбиению стандартной прямоугольной области. Пусть  $[S^*]$  — такая область, отрезок  $[a_1, b_1]$  — ее проекция на ось  $Ox$ , а  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , — ячейки, составляющие разбиение этой области. Рассмотрим непрерывную на  $[a_1, b_1]$  функцию  $y(x)$ , график которой содержится в  $[S^*]$ . Ячейки, имеющие с этим графиком хотя бы одну общую точку, составляют некую фигуру.

**Лемма 1.** *Суммарная площадь всех ячеек, имеющих с непрерывной дугой общие точки, не превосходит числа  $3\Delta(b_1 - a_1)$ , где  $\Delta$  — наибольший из диаметров ячеек  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .*

**Доказательство.** Поскольку  $y(x)$  равномерно непрерывна на отрезке  $[a_1, b_1]$ , по числу  $\Delta$  определяем  $\delta > 0$ , такое что на  $[a_1, b_1]$  выполняется

$$|\tilde{x} - \hat{x}| < \delta \Rightarrow |y(\tilde{x}) - y(\hat{x})| < \Delta.$$

Теперь разобьем отрезок  $[a_1, b_1]$  точками на  $n_1$  равных частей так, чтобы их длина оказалась меньше  $\delta$ . Через указанные точки параллельно  $Oy$  проведем прямые, которые разобьют область  $[S^*]$  на прямоугольные полоски. В пределах каждой такой полоски разность между наибольшим и наименьшим значениями  $y(x)$  меньше  $\Delta$ , отсюда следует, что площадь части полоски, покрытой пересекающимися с дугой ячейками, меньше числа  $3\Delta \frac{b_1 - a_1}{n_1}$ . Следовательно, площадь всей фигуры, составленной из ячеек, имеющих общие точки с графиком  $y(x)$ , меньше чем

$$3\Delta \frac{b_1 - a_1}{n_1} \cdot n_1 = 3\Delta(b_1 - a_1).$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Здесь мы возвращаемся к первоначальному разбиению на ячейки  $[S_k]$  стандартной области  $[S^*]$ . Напоминаем, что  $\Delta$  — наибольший из диаметров  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Площадь фигуры, составленной из ячеек, имеющих общие точки с любым вертикальным отрезком, находящимся в стандартной прямоугольной области  $[S^*]$ , меньше  $3\Delta(b_2 - a_2)$ , здесь  $b_2 - a_2$  — длина отрезка  $[a_2, b_2]$ , являющегося проекцией  $[S^*]$  на  $Oy$  (см. рис. 44).

На самом же деле, что видно из рисунка, площадь указанной фигуры ограничивается числом  $2\Delta(b_2 - a_2)$ . Указанное же выше ограничение  $3\Delta(b_2 - a_2)$  в нашем случае несколько удобнее.

**Лемма 3** является простым следствием двух предыдущих.

Будем полагать, что некая стандартная область  $[S]$  содержиться в стандартной прямоугольной области  $[S^*]$ , которая в свою очередь разбита на ячейки  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Площадь фигуры, составленной из ячеек, имеющих общие точки с границей области  $[S]$ , меньше числа  $3\Delta p$ , где  $p$  — длина границы прямоугольной области  $[S^*]$ . Напомним, что  $\Delta$  — наибольший из диаметров ячеек  $[S_k]$  (см. рис. 45).

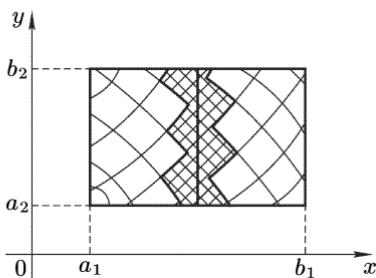


Рис. 44

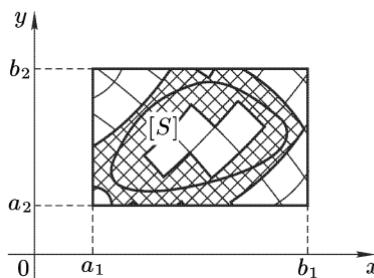


Рис. 45

Теперь приступим к главной части. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна на стандартной области  $[S]$ , включенной в стандартную прямоугольную область  $[S^*]$ . Покажем, что при любой нормальной последовательности разбиений области  $[S^*]$  разность  $\bar{I}_n - I_n$  бесконечно мала. Условимся сразу, что в каждом разбиении ячейки, расположенные внутри области  $[S]$ , пронумерованы числами  $1, 2, \dots, m_n^*$ . Остальным же ячейкам присвоены номера  $m_n^* + 1, m_n^* + 2, \dots, m_n$ . На рис. 45 совокупность ячеек первого

типа ограничена внутренней жирной линией. Забегая вперед, можно сказать, что именно эти ячейки играют определяющую роль в предельном переходе  $n \rightarrow +\infty$ .

Итак, интересующая нас разность  $\overline{I_n} - \underline{I_n}$  равна

$$\begin{aligned}\overline{I_n} - \underline{I_n} &= \sum_{k=1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k = \\ &= \sum_{k=1}^{m_n^*} \overline{\mu_k} S_k + \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \left( \sum_{k=1}^{m_n^*} \underline{\mu_k} S_k + \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k \right).\end{aligned}$$

Введем в действие равномерную непрерывность функции  $f(x, y)$  на области  $[S]$  и третью лемму, для чего перепишем разность следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{I_n} - \underline{I_n} &= \sum_{k=1}^{m_n^*} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=1}^{m_n^*} \underline{\mu_k} S_k + \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k = \\ &= \sum_{k=1}^{m_n^*} (\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k}) S_k + \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k - \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k.\end{aligned}$$

Перейдем к неравенству

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} \leq \left| \sum_{k=1}^{m_n^*} (\overline{\mu_k} - \underline{\mu_k}) S_k \right| + \left| \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k \right| + \left| \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k \right|.$$

Покажем, что при неограниченном росте  $n$  каждое из трех последних слагаемых стремится к нулю. Займемся первым из них. Произвольно зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и по числу  $\frac{\varepsilon}{S^*}$  определим  $\delta > 0$ , такое что в области  $[S]$  выполняется:

$$|\tilde{M}\hat{M}| < \delta \Rightarrow |f(\tilde{M}) - f(\hat{M})| < \frac{\varepsilon}{S^*}.$$

После этого определим номер разбиения, начиная с которого диаметры всех ячеек меньше  $\delta$ . При всех  $n$ , больших указанного

номера, имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n^*} (\bar{\mu}_k - \underline{\mu}_k) S_k \right| \leq \sum_{k=1}^{m_n^*} |\bar{\mu}_k - \underline{\mu}_k| S_k \leq \sum_{k=1}^{m_n^*} \frac{\varepsilon}{S^*} S_k = \varepsilon \frac{\sum_{k=1}^{m_n^*} S_k}{S^*} < \varepsilon.$$

Напоминаем, что в области  $[S]$  функция  $f(x, y)$  непрерывна, и поэтому  $\bar{\mu}_k = f(M'_k)$ ,  $\underline{\mu}_k = f(M''_k)$ , причем точки  $M'_k$  и  $M''_k$  находятся в общей ячейке  $[S_k]$ , диаметр которой меньше  $\delta$ . Именно поэтому

$$|\bar{\mu}_k - \underline{\mu}_k| < \frac{\varepsilon}{S^*}.$$

Итак, установлено, что  $\sum_{k=1}^{m_n^*} (\bar{\mu}_k - \underline{\mu}_k) S_k \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

А теперь обратимся к двум оставшимся слагаемым. Для их оценки воспользуемся третьей леммой. Рекомендуем еще раз рассмотреть рис. 45 с целью понять, что в интересующих нас суммах фактически задействованы лишь ячейки, пересекающиеся с границей области  $[S]$ . Составленная из них фигура обведена жирными линиями.

Пользуясь непрерывностью  $f(x, y)$  на  $[S]$ , из которой следует ограниченность функции  $f^*(x, y)$  на  $[S^*]$ , определим число  $\lambda$ , такое что на всей  $[S^*]$  выполняется неравенство  $|f^*(x, y)| < \lambda$ . Из этого неравенства следуют нужные нам соотношения

$$|\bar{\mu}_k| < \lambda, \quad |\underline{\mu}_k| < \lambda$$

при всех  $k = 1, 2, \dots, m_n$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$

Теперь можно утверждать, что

$$\left| \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \bar{\mu}_k S_k \right| \leq \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} |\bar{\mu}_k| S_k < \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \lambda S_k \leq 3\lambda \Delta_n p.$$

Точно также оценивается и последняя сумма, а именно:

$$\left| \sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu}_k S_k \right| \leq 3\lambda \Delta_n p,$$

здесь  $p$  — длина границы области  $[S^*]$ ,  $\Delta_n$  — наибольший из диаметров ячеек  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ .

Теперь очевидно, что из условия  $\Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  следует

$$\sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \overline{\mu_k} S_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а также

$$\sum_{k=m_n^*+1}^{m_n} \underline{\mu_k} S_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Вторую часть доказательства завершим уже обоснованным утверждением

$$\overline{I_n} - \underline{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Третья часть доказательства. Теперь можно сказать, что находящиеся между переменными  $\overline{I_n}$  и  $\underline{I_n}$  постоянные числа  $I_*$  и  $I^*$  на самом деле представляют собой одно число, равное  $I_* = I^*$ , к которому сходятся обе последовательности  $\{\overline{I_n}\}$  и  $\{\underline{I_n}\}$ . Так как  $\underline{I_n} \leqslant I_n \leqslant \overline{I_n}$ , то к этому же числу сходится и последовательность  $\{I_n\}$  произвольных интегральных сумм функции  $f^*(x, y)$ , а это означает, что  $f^*(x, y)$  интегрируема на  $[S^*]$ , следовательно,  $f(x, y)$  интегрируема на  $[S] \subseteq [S^*]$ , и мы вправе написать, что

$$\int\int_{[S]} f(x, y) dx dy = \int\int_{[S^*]} f^*(x, y) dx dy.$$

При этом  $[S]$  называется областью интегрирования функции  $f(x, y)$ . Теорема доказана.

Из теоремы и фактов, выявленных в процессе ее доказательства, следует

$$\int\int_{[S]} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n^*} f(x_k, y_k) S_k.$$

Здесь под знаком предела не вся интегральная сумма функции  $f(x, y)$ , а лишь ее часть, соответствующая ячейкам, расположенным внутри области интегрирования. Следовательно, интеграл не зависит от значений функции на границе области  $[S]$ , т. е. интеграл не изменится, если подынтегральную функцию изменить на границе области интегрирования, но лишь так, чтобы преобразованная функция оставалась ограниченной. На этом

основании можно сказать, что двойной интеграл непрерывной на стандартной области функции можно представлять пределом последовательности интегральных сумм этой функции на разбиениях самой области  $[S]$  без ее включения в прямоугольную область. При составлении сумм приграничные ячейки можно исключить.

В следующих параграфах приведены способы вычисления двойных интегралов. Основная вычислительная формула относится к интегралу по стандартной области.

Расширим понятие стандартной области следующим естественным добавлением к основному определению. Фигуру  $[S]$  в плоскости  $Oxy$  мы также будем называть стандартной областью, если, во-первых, ее проекция на ось  $Oy$  представляет собой отрезок  $[a, b]$ , во-вторых, каждая пересекающая ее горизонтальная прямая имеет с  $[S]$  общий отрезок или точку и, в-третьих, фигура  $[S]$  слева и справа ограничена графиками непрерывных на  $[a, b]$  функций  $x_1(y) \leqslant x_2(y)$  (см. рис. 46).

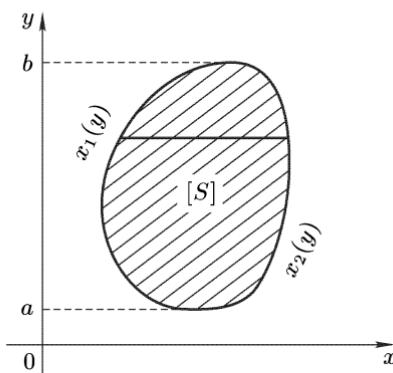


Рис. 46

Очевидно, что непрерывная на такой области  $[S]$  функция  $f(x, y)$  интегрируема.

**Замечание.** Теоремы п. 2.1.5 применимы к двойным интегралам непрерывных функций на любых стандартных областях, т. е. можно интегрировать неравенства, выражать двойной интеграл единицы площадью области интегрирования, постоянный множитель выносить за знак интеграла и т. д. Все это легко

доказывается с помощью равенства

$$\int\limits_{[S]} \int f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) S_k.$$

Интегральные суммы сформированы на разбиениях области интегрирования.

**2.1.8. Теорема о среднем.** Среднее интегральное значение множества значений функции на заданной области определяется как отношение интеграла к площади области интегрирования.

**Теорема.** *Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на стандартной области  $[S]$ , то найдется по меньшей мере одна точка  $\tilde{M} \in [S]$ , такая что*

$$\frac{1}{S} \int\limits_{[S]} \int f(x, y) dx dy = f(\tilde{M}).$$

**Доказательство.** Пусть  $\underline{\mu} \leq \bar{\mu}$  — крайние значения функции  $f(x, y)$  на области  $[S]$ . Тогда на всей области  $[S]$  имеем

$$\underline{\mu} \leq f(x, y) \leq \bar{\mu}.$$

Перейдем к интегралам:

$$\int\limits_{[S]} \int \underline{\mu} dx dy \leq \int\limits_{[S]} \int f(x, y) dx dy \leq \int\limits_{[S]} \int \bar{\mu} dx dy.$$

Отсюда

$$\underline{\mu} S \leq \int\limits_{[S]} \int f(x, y) dx dy \leq \bar{\mu} S$$

(см. последнее замечание п. 2.1.7). Делением на  $S$  получаем

$$\underline{\mu} \leq \frac{1}{S} \int\limits_{[S]} \int f(x, y) dx dy \leq \bar{\mu}.$$

Видим, что среднее интегральное находится между крайними значениями функции. Так как значения  $f(x, y)$  на  $[S]$  сплошь заполняют отрезок  $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ , можно сказать, что среди них найдется значение функции, равное указанному отношению. Это означает,

что найдется по меньшей мере одна точка  $\tilde{M} \in [S]$ , такая что

$$\frac{1}{S} \int \int_{[S]} f(x, y) dx dy = f(\tilde{M}) \Rightarrow \int \int_{[S]} f(x, y) dx dy = f(\tilde{M})S.$$

Теорема доказана.

**2.1.9. Двойной интеграл по обобщенной стандартной области.** Фигуру  $[S]$  будем называть обобщенной стандартной областью, если ее графиками непрерывных функций можно разбить на конечное число стандартных частей (см. рис. 47).

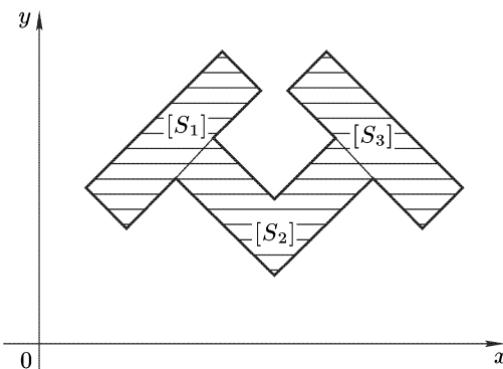


Рис. 47

**Теорема.** *Непрерывная на обобщенной стандартной области функция интегрируема, и ее интеграл по этой области равен сумме интегралов по всем стандартным частям.*

**Доказательство.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна на обобщенной стандартной области  $[S]$ , и пусть эта область разбита на три стандартные части  $[S_1], [S_2], [S_3]$  (см. рис. 47). Будем считать, что  $[S]$  содержится в некоторой стандартной прямоугольной области  $[S^*]$ , и отдельно рассмотрим включенные в эту область стандартные составляющие  $[S_1], [S_2], [S_3]$ .

Согласно предыдущей теореме (см. п. 2.1.7) функция  $f(x, y)$  интегрируема на каждой из этих областей, т. е. соответствующие стандартные продолжения  $f_1^*(x, y), f_2^*(x, y), f_3^*(x, y)$  нашей функции на область  $[S^*]$  интегрируемы на этой области. Напоминаем, что по определению стандартного продолжения во всех точках области  $[S_i]$  имеем  $f_i^*(x, y) = f(x, y)$  и  $f_i^*(x, y) \equiv 0$  на

остальной части области  $[S^*]$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Интегрируемой является и сумма  $f_1^*(x, y) + f_2^*(x, y) + f_3^*(x, y)$  (см. п. 2.1.5). Заметим, что эта сумма на области  $[S]$ , за исключением, быть может, общих границ стандартных частей, совпадает с данной функцией  $f(x, y)$ . На оставшейся части прямоугольной области  $[S^*]$  сумма тождественна нулю. Отсюда выводится, что данная непрерывная на обобщенной стандартной области  $[S]$  функция  $f(x, y)$  интегрируема на этой области и ее двойной интеграл представляется в виде

$$\begin{aligned} \int\int_S f(x, y) dx dy &= \int\int_{[S^*]} f_1^*(x, y) dx dy + \int\int_{[S^*]} f_2^*(x, y) dx dy + \\ &+ \int\int_{[S^*]} f_3^*(x, y) dx dy = \int\int_{[S_1]} f(x, y) dx dy + \\ &+ \int\int_{[S_2]} f(x, y) dx dy + \int\int_{[S_3]} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Заметим, что приведенные рассуждения по своей сути не зависят от способа разбиения исходной области на стандартные части и от числа этих частей, поэтому можно полагать, что теорема доказана.

*Следствие. Если область интегрирования разбита на обобщенные стандартные части, то сумма интегралов по всем таким частям равна исходному интегралу.*

## § 2.2. Вычисление двойных интегралов

### 2.2.1. Формула вычисления двойного интеграла по прямоугольной области.

Будем полагать, что функция  $f(x, y)$  непрерывна на прямоугольной стандартной области  $[S^*]$  и что отрезки  $[a_1, b_1]$  и  $[a_2, b_2]$  служат проекциями области на соответствующие координатные оси. Двойной интеграл по прямоугольной стандартной области можно представить как результат двукратного интегрирования

следующим образом:

$$\int_{[S^*]} \int f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy.$$

Выражение в правой части равенства называют двукратным или, чаще, повторным интегралом. Вычисляется повторный интеграл в два этапа. Сперва при фиксированном  $x \in [a_1, b_1]$  вычисляется интеграл

$$\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy = g(x),$$

затем  $x$  освобождается от фиксации и выполняется повторное интегрирование, уже по переменной  $x$ . Подынтегральной функцией служит  $g(x)$ . В итоге получается число

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy.$$

Заметим, что при фиксированном  $x$  функция  $f(x, y)$  как функция переменной  $y$  непрерывна на отрезке  $[a_2, b_2]$ , чем мы воспользовались при первичном интегрировании. Кроме того, непрерывной является и функция

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy,$$

что мы использовали при повторном интегрировании.

Первое утверждение практически очевидно, второе доказывается на основании равномерной непрерывности  $f(x, y)$  на  $[S^*]$ .

Итак, докажем, что

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy = \int_{[S^*]} \int f(x, y) dx dy.$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы построить нормальную последовательность разбиений области  $[S^*]$  и на каждом разбиении сформировать интегральную сумму функции  $f(x, y)$ ,

точно равную повторному интегралу. Реализуем замысел следующим образом.

Разобьем отрезок  $[a_1, b_1]$  на  $n$  равных частей точками  $x_0 = a_1, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b_1$ . Заметим сразу, что

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b_1 - a_1}{n}$$

при всех  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Представим повторный интеграл в виде определенного, к которому применим теорему о разбиении отрезка интегрирования, а затем к каждому из интегралов по частичным отрезкам применим теорему о среднем:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy &= \int_{a_1}^{b_1} g(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \frac{b_1 - a_1}{n}. \end{aligned}$$

А теперь на  $n$  равных частей разобьем отрезок  $[a_2, b_2]$  точками  $y_0 = a_2, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = b_2$ . Здесь

$$y_j - y_{j-1} = \frac{b_2 - a_2}{n}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Соответственно преобразуем  $g(\xi_i)$ :

$$\begin{aligned} g(\xi_i) &= \int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y) dy = \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy = \\ &= \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \frac{b_2 - a_2}{n}, \end{aligned}$$

где  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ . И здесь мы сначала применили теорему о разбиении, а потом к каждому из  $n$  получившихся интегралов — теорему о среднем.

Таким образом,

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \frac{b_1 - a_1}{n} \cdot \frac{b_2 - a_2}{n}.$$

Можно сказать, что мы у цели. Действительно, при любом  $n \in N$  прямые  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ;  $y = y_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , разбивают  $[S^*]$  на  $n^2$  равных частей  $[S_{ij}]$  с общей площадью

$$S_{ij} = \frac{b_1 - a_1}{n} \cdot \frac{b_2 - a_2}{n}.$$

Помимо разбиения указан принцип определения опорных точек  $(\xi_i, \eta_j)$  (см. рис. 48).

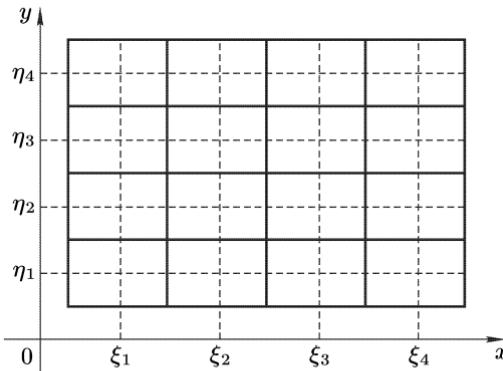


Рис. 48

Двухиндексная система обозначений ячеек и соответствующих опорных точек в нашей конструкции возникла естественно, и, очевидно, нет причины вводить сквозную нумерацию.

Итак, мы указали нормальную последовательность разбиений области  $[S^*]$  и определили на ней последовательность  $\{I_n\}$  специальных интегральных сумм функции  $f(x, y)$ , все члены которой равны повторному интегралу, т. е.

$$I_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) S_{ij} = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Исключительно формы ради выпишем:

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy,$$

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \int_{[S^*]} \int f(x, y) dxdy \Rightarrow \int_{[S^*]} \int f(x, y) dxdy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy.$$

Равенство двойного и повторного интегралов доказано.

Это равенство представляет собой частный случай так называемой формулы Фубини, которая приведена в следующем пункте.

**Пример.** Область  $[S^*]$  ограничена прямыми  $x = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = -1$ ,  $y = 2$  (см. рис. 49). Подынтегральная функция  $f(x, y) = xy^2$ . Преобразуем к повторному и вычислим двойной интеграл:

$$\int_{[S^*]} \int xy^2 dx dy = \int_0^4 dx \int_{-1}^2 xy^2 dy.$$

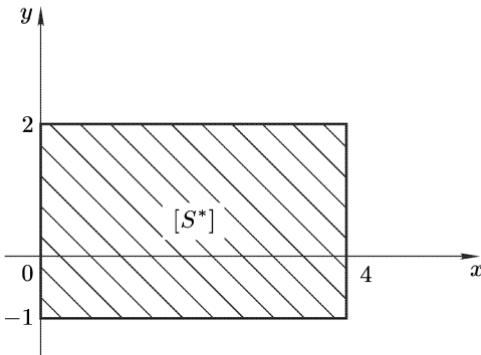


Рис. 49

Напоминаем, что интегрирование по  $y$  выполняется при фиксированном  $x$ , и поэтому в нашем случае  $x$  можно вынести за знак внутреннего интеграла. Таким образом,

$$\int_{[S^*]} \int xy^2 dx dy = \int_0^4 x dx \int_{-1}^2 y^2 dy = \int_0^4 x dx \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-1}^2 = 3 \int_0^4 x dx = 3 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 = 24.$$

**2.2.2. Формула вычисления двойного интеграла по произвольной стандартной области (формула Фубини).** Предполагается, что функция  $f(x, y)$  непрерывна на стандартной области  $[S]$ . Область ограничена отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$  при  $a < b$ , а также графиками непрерывных на  $[a, b]$  функций

$y_1(x) \leqslant y_2(x)$ . Соответствующий двойной интеграл можно вычислить по формуле Фубини:

$$\int_{[S]} \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Выражение в правой части равенства называют повторным интегралом. Его вид указывает на следующий порядок действий. Сначала функция  $f(x, y)$  при фиксированном  $x \in [a, b]$  интегрируется по  $y$  в пределах от  $y_1(x)$  до  $y_2(x)$ . После этого  $x$  освобождается от фиксации и полученное выражение интегрируется по  $[a, b]$  (см. рис. 50). На этом этапе переменной интегрирования, естественно, является  $x$ . В итоге получается число, равное интересующему нас двойному интегралу.

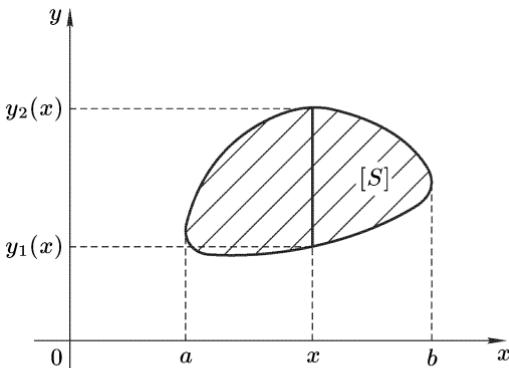


Рис. 50

Все сказанное, разумеется, нуждается в обосновании. Сначала обращаем Ваше внимание на то, что функция

$$g(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Действительно,

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) = \int_{y_1(x + \Delta x)}^{y_2(x + \Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

К первому интегралу применяем теорему о разбиении отрезка интегрирования с целью представить приращение функции  $g(x)$  в следующем виде

$$\begin{aligned}\Delta g(x) &= \int_{y_1(x+\Delta x)}^{y_1(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \\ &\quad + \int_{y_2(x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \\ &= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x + \Delta x, y) - f(x, y)) dy + \int_{y_1(x+\Delta x)}^{y_1(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \\ &\quad + \int_{y_2(x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy.\end{aligned}$$

При бесконечно малом  $\Delta x$  эти интегралы бесконечно малы. Попробуйте доказать это утверждение. Если Вы обстоятельно изучили доказательство интегрируемости функции, непрерывной на стандартной области (см. п. 2.1.7), то эта задача не покажется Вам слишком трудной. При оценке первого интеграла нужно использовать равномерную непрерывность, а двух других — ограниченность функции  $f(x, y)$  на области  $[S]$ .

Будем полагать теперь, что наша область  $[S]$  включена в прямоугольную стандартную область  $[S^*]$ , ограниченную прямыми  $x = a_1$ ,  $x = b_1$ ,  $y = a_2$ ,  $y = b_2$ . При этом будем считать, что  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ , т. е. проекции на ось  $Ox$  областей  $[S]$  и  $[S^*]$  совпадают. Введем также стандартное продолжение  $f^*(x, y)$  данной функции  $f(x, y)$  на указанную область  $[S^*]$ . Напоминаем, что  $f^*(x, y)$  на области  $[S]$  совпадает с  $f(x, y)$ , в остальной же части области  $[S^*]$  она тождественно равна нулю.

Основная идея дальнейшего рассуждения состоит в том, чтобы, как и в предыдущем пункте, построить нормальную последовательность разбиений области  $[S^*]$  и определить на ней последовательность интегральных сумм функции  $f^*(x, y)$ , точно

равных повторному интегралу

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y) dy.$$

Способ построения таких сумм практически повторяет конструкцию, приведенную в пункте 2.2.1. Сначала вводится функция

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y) dy.$$

Отрезок  $[a_1, b_1]$  точками  $x_0 = a_1, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b_1$  разбивается на  $n$  равных частей. Затем к интегралу

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x) dx$$

применяется теорема о разбиении отрезка интегрирования:

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx.$$

К каждому из  $n$  получившихся интегралов применяется теорема о среднем. В итоге имеем

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x) dx = \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \frac{b_1 - a_1}{n}.$$

После этого отрезок  $[a_2, b_2]$  разбивается на  $n$  равных частей точками  $y_0 = a_2, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = b_2$  и выражение

$$g(\xi_i) = \int_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y) dy,$$

опять же с помощью теоремы о разбиении, представляется в следующем виде:

$$g(\xi_i) = \int_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y) dy = \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f^*(\xi_i, y) dy.$$

Сейчас мы остановились перед некоторым осложнением, естественно возникающим при переходе от интеграла по прямоугольной области к интегралу по стандартной области произвольной конфигурации. Дело в том, что мы не можем безоглядно к получившимся интегралам применить теорему о среднем, поскольку в некоторых из них подынтегральная функция может оказаться разрывной. Чтобы снять проблему, через все точки с координатами  $(\xi_i; y_1(\xi_i)), (\xi_i; y_2(\xi_i)), i = 1, 2, \dots, n$ , проведем горизонтальные прямые и рассмотрим точки их пересечения с осью  $Oy$ . Те из них, которые попадают внутрь уже имеющихся частичных отрезков  $[y_{j-1}, y_j]$ , задействуем как дополнительные разбивающие точки. После этого имеющиеся и новые точки заново перенумеруем и в порядке возрастания обозначим  $\hat{y}_0 = a_2, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n^*} = b_2$ . На рис. 51 изображена область  $[S^*]$ , включающая в себя  $[S]$ . Первоначально она разбита на 9 одинаковых частей. Затем через точки пересечения прямых  $x = \xi_1, x = \xi_2, x = \xi_3$  с границей области  $[S]$  проведены дополнительные горизонтали, которые разбивают область  $[S^*]$  на еще более мелкие части. Точки пересечения этих горизонталей с отрезком  $[a_2, b_2]$  вместе с точками  $y_1$  и  $y_2$  определяют новое, более мелкое разбиение этого отрезка. Именно они заново пронумерованы и обозначены символом  $\hat{y}_j$ .

Теперь выражение  $g(\xi_i)$  представим в виде

$$\begin{aligned} g(\xi_i) &= \int_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y) dy = \sum_{j=1}^{n^*} \int_{\hat{y}_{j-1}}^{\hat{y}_j} f^*(\xi_i, y) dy = \\ &= \sum_{j=1}^{n^*} f^*(\xi_i, \eta_j)(\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}). \end{aligned}$$

Как видим, и здесь мы сначала воспользовались теоремой о разбиении, а потом — теоремой о среднем для определенного интеграла.

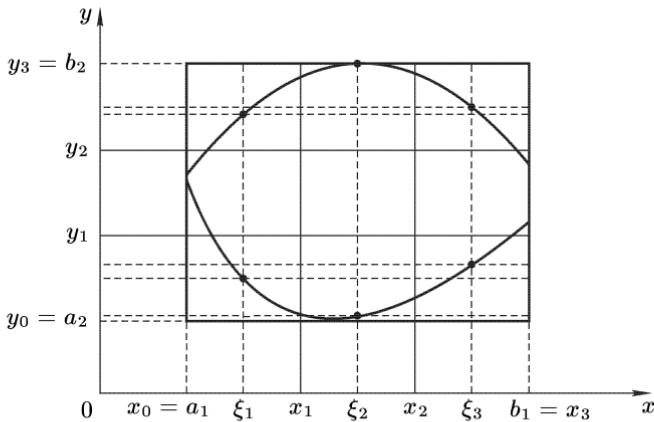


Рис. 51

Таким образом, повторный интеграл функции  $f^*(x, y)$  по прямоугольной области  $[S^*]$  представляется в виде:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y) dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n^*} f^*(\xi_i, \eta_j) \frac{b_1 - a_1}{n} (\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}).$$

Подведем некоторые итоги. Во-первых, прямые  $x = x_i$ ,  $y = \hat{y}_j$  разбивают область  $[S^*]$  на прямоугольные ячейки  $[S_{ij}]$  площади которых равны

$$S_{ij} = \frac{b_1 - a_1}{n} (\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}),$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n^*$ . Число ячеек  $m_n = n \cdot n^*$ . Тем самым мы указали принцип, который при  $n = 1, 2, 3, \dots$  определяет нормальную последовательность разбиений данной области.

Во-вторых, двойная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n^*} f^*(\xi_i, \eta_j) S_{ij}$$

представляет собой  $n$ -й член последовательности  $\{I_n\}$  специальных интегральных сумм функции  $f^*(x, y)$ , определенной на указанной последовательности разбиений.

В-третьих, все члены этой последовательности равны повторному интегралу, т. е.

$$I_n = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y) dy.$$

Ясно, что эта последовательность сходится к указанному повторному интегралу.

Так как  $f^*(x, y)$  интегрируема на  $[S^*]$ , последовательность  $\{I_n\}$  сходится и к двойному интегралу

$$\int_{[S^*]} \int f^*(x, y) dx dy.$$

*Вывод. Двойной интеграл равен повторному, т. е.*

$$\int_{[S^*]} \int f^*(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y) dy.$$

Напоминаем, что двойной интеграл функции  $f(x, y)$  по области  $[S]$  определяется и обозначается следующим образом:

$$\int_{[S]} \int f(x, y) dx dy = \int_{[S^*]} \int f^*(x, y) dx dy.$$

Обращаем Ваше внимание и на то, что при всех  $x \in [a_1, b_1] = [a, b]$  функция  $g(x)$  равна

$$g(x) = \int_{a_2}^{b_2} f^*(\xi_i, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Следовательно,

$$\int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f^*(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Таким образом, установлен следующий факт:

$$\int\limits_{[S]} \int f(x, y) dx dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Это равенство будем называть *формулой Фубини*.

Итак, наконец получена формула, представляющая собой главное средство вычисления двойных интегралов.

**З а м е ч а н и е.** Внутренняя часть повторного интеграла, т. е.

$$g(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

в математическом анализе и его приложениях используется как самостоятельное понятие, при этом переменная  $x$  называется параметром.

Производная интеграла как функции параметра выражается формулой

$$g'(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f'_x(x, y) dy + y'_2(x)f(x, y_2(x)) - y'_1(x)f(x, y_1(x))$$

при непрерывных  $f(x, y)$  и  $f'_x(x, y)$  на стандартной области  $[S]$  и дифференцируемых  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

Приведем краткое обоснование формулы:

$$\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x) = \int\limits_{y_1(x+\Delta x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x+\Delta x, y) dy - \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

По теореме о разбиении отрезка интегрирования первый интеграл представим в виде суммы трех интегралов. И тогда

$$\Delta g = \int_{y_1(x+\Delta x)}^{y_1(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \\ + \int_{y_2(x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy - \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Второй и четвертый интегралы объединим в один. В результате получим

$$\Delta g = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x + \Delta x, y) - f(x, y)) dy + \\ + \int_{y_1(x+\Delta x)}^{y_1(x)} f(x + \Delta x, y) dy + \int_{y_2(x)}^{y_2(x+\Delta x)} f(x + \Delta x, y) dy.$$

В первом интеграле преобразуем подынтегральную функцию, ко второму и третьему применим теорему о среднем. По теореме Лагранжа получаем

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f'_x(\xi, y)\Delta x = (f'_x(x, y) + \alpha)\Delta x,$$

здесь  $\alpha = f'_x(\xi, y) - f'_x(x, y)$ .

Таким образом,

$$\Delta g = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f'_x(x, y) + \alpha)\Delta x dy + \\ + (y_1(x) - y_1(x + \Delta x))f(x + \Delta x, y(\theta_1)) + \\ + (y_2(x + \Delta x) - y_2(x))f(x + \Delta x, y(\theta_2)).$$

Здесь  $\theta_1 \in [x, x + \Delta x]$  и  $\theta_2 \in [x, x + \Delta x]$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Delta g = \Delta x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f'_x(x, y) dy - \Delta y_1 f(x + \Delta x, y(\theta_1)) + \\ + \Delta y_2 f(x + \Delta x, y(\theta_2)) + \Delta x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \alpha dy. \end{aligned}$$

Все это выражение делим на  $\Delta x$  и получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f'_x(x, y) dy + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} f(x + \Delta x, y(\theta_2)) - \\ - \frac{\Delta y_1}{\Delta x} f(x + \Delta x, y(\theta_1)) + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \alpha dy. \end{aligned}$$

В пределе левая часть и первые три слагаемых правой составляют соответствующие элементы формулы. Последнее слагаемое в пределе обращается в нуль, что доказывается на основании равномерной непрерывности на  $[S]$  функции  $f'_x(x, y)$ .

Покажем теперь, как применяется формула Фубини для вычисления двойного интеграла.

**Пример 1.** Функция  $f(x, y) = x + y$  рассматривается на области  $[S]$ , ограниченной параболой  $y = x^2 - 1$  и прямой  $y = x + 1$ . Нужно вычислить интеграл

$$\int_S \int (x + y) dx dy.$$

Задача решается следующим образом. Прежде всего изображается на плоскости  $Oxy$  область  $[S]$  (см. рис. 52). Определяем,

является ли эта область стандартной, что представляет собой ее проекция на  $Ox$ . Указываем функции, графики которых снизу и сверху ограничивают область. Чтобы определить в нашем случае проекцию  $[S]$  на  $Ox$ , решим систему двух уравнений:  $y = x^2 - 1$  и  $y = x + 1$ , следовательно,  $x^2 - 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$  — абсциссы точек пересечения параболы с прямой. Таким образом, отрезок  $[-1; 2]$  служит проекцией области  $[S]$  на ось  $Ox$ . Теперь ясно, что  $y_1 = x^2 - 1$  и  $y_2 = x + 1$  — непрерывные на этом отрезке функции, графики которых составляют границу области  $[S]$ . Теперь по формуле Фубини

$$\int_{[S]} \int (x + y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^{x+1} (x + y) dy = \int_{-1}^2 dx \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2-1}^{x+1}.$$

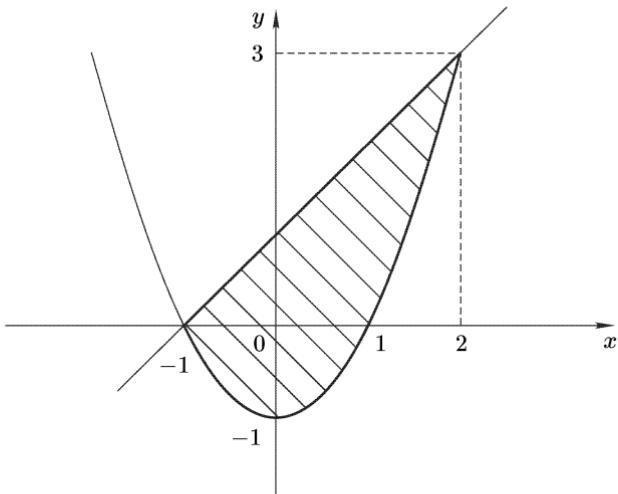


Рис. 52

Напоминаем, что сначала вычисляется внутренний интеграл. В нашем случае это интеграл по  $y$  при фиксированном  $x$ . Результат интегрирования не содержит переменной  $y$  и при освобождении  $x$  от фиксации служит подынтегральной функцией при повторном интегрировании, уже по переменной  $x$ . Таким

образом,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^2 \left( x(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2} - (x(x^2-1) + \frac{(x^2-1)^2}{2}) \right) dx = \\
 &= \int_{-1}^2 \left( x^2 + x + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - x^3 + x - \frac{1}{2}(x^4 - 2x^2 + 1) \right) dx = \\
 &= \int_{-1}^2 \left( \frac{5}{2}x^2 + 3x - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \\
 &= \left. \left( \frac{5}{2} \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{x^5}{5} \right) \right|_{-1}^2 = \frac{99}{20}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что указанная область  $[S]$  обладает свойствами стандартной области и при проектировании ее на ось  $Oy$  (см. рис. 53). Левая и правая части границы области  $[S]$  представляют собой графики непрерывных на  $[-1; 3]$  функций  $x_1(y) \leqslant x_2(y)$ . Естественно, возникают следующие вопросы. Можно ли в этом случае воспользоваться формулой

$$\iint_{[S]} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx?$$

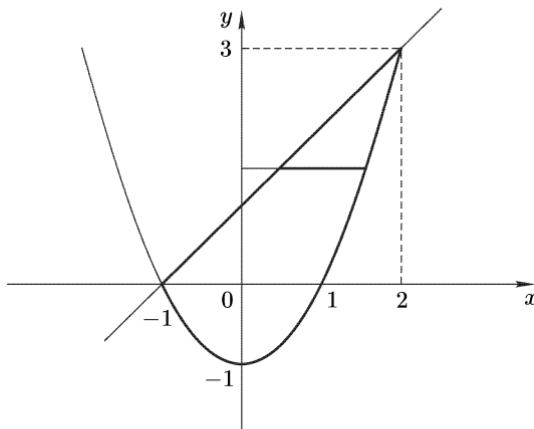


Рис. 53

И второй вопрос: целесообразно ли в нашем случае пользоваться этой формулой? На первый вопрос ответ, естественно, положительный, так как в этом случае достаточно повторить доказательство теоремы Фубини, в котором нужно лишь поменять ролями координатные оси. Если бы мы решили в нашем случае воспользоваться этим вариантом вычислительной формулы, то нам пришлось бы область  $[S]$  разбить на две части прямой  $y = 0$  (см. рис. 54) и представить исходный двойной интеграл в виде суммы двух двойных интегралов по указанным частям. Причина в том, что левая часть границы составлена из двух разнотипных дуг, сстыкованных в точке  $(-1; 0)$ . Нижняя часть — дуга параболы, верхняя — отрезок прямой. И тем не менее такой образ действия возможен, но, как Вы сами видите, в данном случае менее удобен.

**Пример 2.** Область  $[S]$  ограничена параболами  $x = y^2$ ,  $x = 2y^2 - 1$ . Нужно по этой области проинтегрировать функцию  $f(x, y) = xy$  (см. рис. 55).

$$\iint_{[S]} xy \, dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{2y^2-1}^{y^2} xy \, dx = \int_{-1}^1 y \, dx \frac{x^2}{2} \Big|_{2y^2-1}^{y^2}.$$

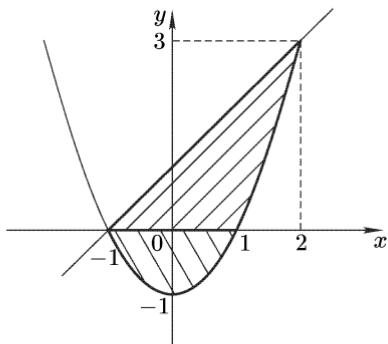


Рис. 54

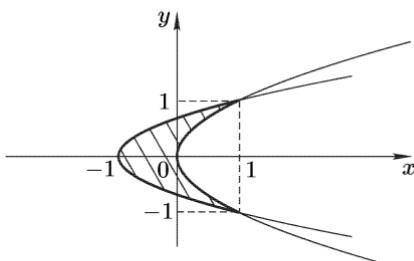


Рис. 55

Первое интегрирование выполняется при постоянном  $y$ , поэтому мы вынесли  $y$  за знак внутреннего интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_S xy \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 y \frac{1}{2} ((y^2)^2 - (2y^2 - 1)^2) \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y (y^4 - 4y^4 + 4y^2 - 1) \, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (-3y^5 + 4y^3 - y) \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}y^6 + y^4 - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Итак, если область интегрирования  $[S]$  стандартна по отношению к обеим координатным осям (см. рис. 5б), то двойной интеграл функции  $f(x, y)$  выражается любым из двух нижеприведенных повторных интегралов:

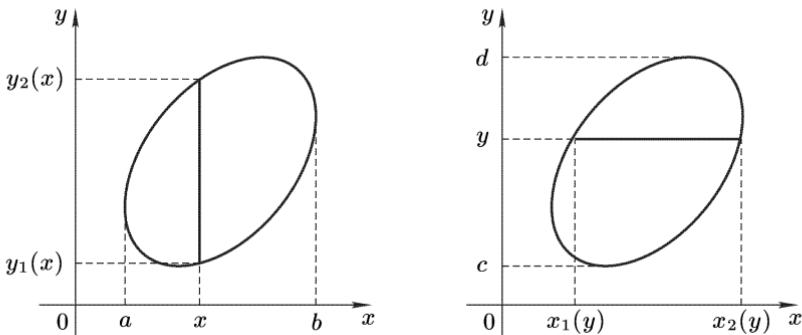


Рис. 56

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx.$$

**2.2.3. Формула преобразования двойного интеграла к новым переменным интегрирования.** Сначала обратимся к определенному интегралу, точнее к формуле его преобразования к новой

переменной интегрирования,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t) dt,$$

при условии, что функция  $x(t)$  на преобразованном отрезке непрерывно дифференцируема, причем  $x'(t)$  на  $[\alpha, \beta]$  или положительна, или отрицательна. При положительной производной пределы в обоих интегралах связаны одним знаком неравенства. При  $x'(t) < 0$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$  имеем

$$a < b \Rightarrow \alpha > \beta.$$

В этом случае

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))(-x'(t)) dt = \int_{\beta}^{\alpha} f(x(t))|x'(t)| dt.$$

Положив  $\beta = \alpha_1$ ,  $\alpha = \beta_1$ , получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x(t))|x'(t)| dt.$$

Здесь гарантировано

$$a < b \Rightarrow \alpha_1 < \beta_1.$$

Именно в таком виде равенство служит прототипом соответствующей формулы для двойного интеграла. Переход в двойном интеграле к новым переменным интегрирования осуществляется по формуле

$$\int_S \int f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{S}} \int f(x(u, v), y(u, v)) \left| \begin{array}{cc} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{array} \right| du dv.$$

Переход к новым переменным, как видно из формулы, осуществляется с помощью двух функций:  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . Предполагается, что система уравнений

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

однозначно разрешается относительно переменных  $u$  и  $v$ , т. е. ее можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Иными словами, данная система определяет взаимно однозначное соответствие между точками первоначальной  $[S]$  и преобразованной  $[\tilde{S}]$  областей интегрирования (см. рис. 57).

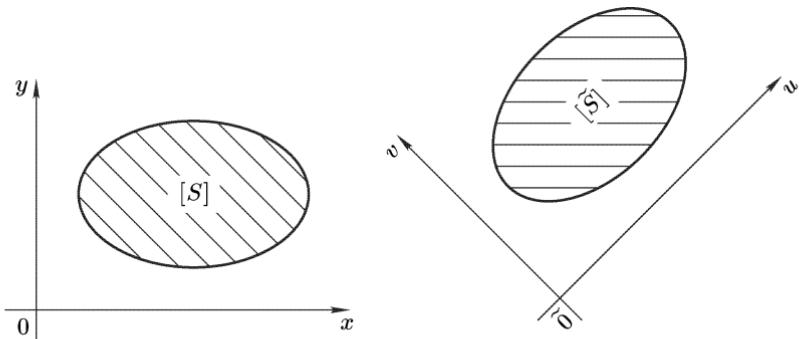


Рис. 57

Таким образом, каждая точка  $M(x, y) \in [S]$  отображается в одну точку  $\tilde{M} \in [\tilde{S}]$ , причем каждая точка области  $[S]$  имеет в области  $[\tilde{S}]$  ровно один прообраз. Процедура вычисления координат соответствующих точек очевидна. Действительно, чтобы при данных  $(x, y)$  получить координаты точки  $\tilde{M}$ , мы эти  $x, y$  подставляем в функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  и производим соответствующие расчеты. При данных  $(u, v)$  соответствующие  $(x, y)$  получаем из системы

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

Будем также полагать, что все частные производные функций  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , т. е.  $x'_u(u, v)$ ,  $y'_u(u, v)$ ,  $x'_v(u, v)$ ,  $y'_v(u, v)$ , непрерывны на области  $[\tilde{S}]$ , а также что составленный из них определитель

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

не обращается на этой области в нуль.

Определитель  $J(u, v)$  называется определителем Якоби или якобианом преобразования

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

Полного обоснования формулы перехода в двойном интеграле к новым переменным интегрирования мы не приводим. Ограничимся лишь следующим примером ее применения.

**Пример.** Область  $[S]$  в I четверти координатной системы  $Oxy$  ограничена прямыми  $y = a_1x$ ,  $y = b_1x$ ,  $0 < a_1 < b_1$ , и гиперболами  $xy = a_2$ ,  $xy = b_2$ ,  $0 < a_2 < b_2$  (см. рис. 58). Данна также функция  $f(x, y) = x^2y^2$ . Нужно вычислить интеграл

$$\iint_S x^2y^2 \, dxdy.$$

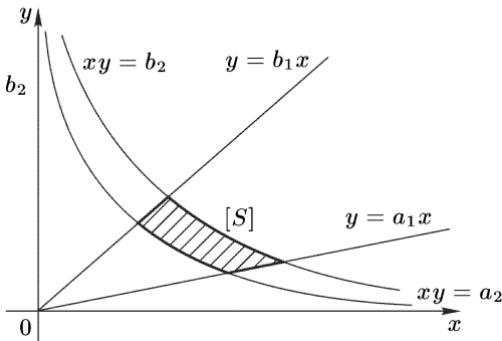


Рис. 58

Область  $[S]$  стандартна, поэтому побуждение представить двойной интеграл в виде повторного вполне естественно. Однако дело осложняется следующими особенностями нашего примера. Во-первых, нижняя и верхняя части границы области составные. Во-вторых, координаты точек, в которых состыковуются разные дуги, имеют буквенные выражения.

Попытаемся подыскать преобразования переменных интегрирования с таким расчетом, чтобы новая область оказалась более удобной для расстановки пределов интегрирования при переходе

к повторному интегралу. Оказывается, что в нашем случае область  $[S]$  можно отобразить на стандартную область прямоугольной формы, если разумно использовать особенности уравнений, определяющих границы области  $[S]$ . Из этих уравнений получим

$$\frac{y}{x} = a_1, \quad \frac{y}{x} = b_1, \quad xy = a_2, \quad xy = b_2.$$

Представляется естественным следующее преобразование:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u, \\ xy = v. \end{cases}$$

Введем новую декартову систему  $\tilde{O}uv$ , чтобы в ней изобразить результат преобразования данных прямых и гипербол. Очевидно, что прямые  $y = a_1x$ ,  $y = b_1x$  переходят в прямые  $u = a_1$ ,  $u = b_1$ . Также и гиперболы  $xy = a_2$ ,  $xy = b_2$  преобразуются в параллельные прямые  $v = a_2$ ,  $v = b_2$ . На рис. 59 изображена новая область интегрирования  $[\tilde{S}]$ .

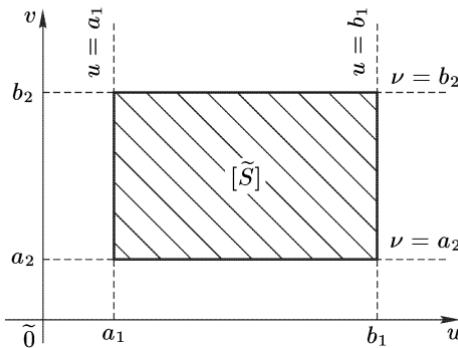


Рис. 59

Теперь сформируем якобиан преобразования  $\{u = y/x, v = xy\}$ . Для этого разрешим систему относительно  $x$  и  $y$ . При делении второго уравнения на первое получаем

$$x^2 = \frac{v}{u} \Rightarrow x = u^{-1/2} \cdot v^{1/2}.$$

Перемножением уравнений получаем

$$y^2 = uv \Rightarrow y = u^{1/2} \cdot v^{1/2}.$$

Полученные выражения  $x$  и  $y$  через  $u$  и  $v$  составляют систему:

$$\begin{cases} x = u^{-1/2} \cdot v^{1/2}, \\ y = u^{1/2} \cdot v^{1/2}. \end{cases}$$

Определим частные производные:

$$x'_u = -\frac{1}{2}u^{-3/2} \cdot v^{1/2}, \quad y'_u = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot v^{1/2},$$

$$x'_v = \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2}, \quad y'_v = \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2}.$$

Выпишем якобиан:

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}u^{-3/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4}u^{-1}v^0 - \frac{1}{4}u^{-1}v^0 = -\frac{1}{2u}. \end{aligned}$$

По формуле

$$\int\int_S f(x, y) dx dy = \int\int_{\tilde{S}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

преобразуем наш интеграл:

$$\begin{aligned} \int\int_S x^2 y^2 dx dy &= \int\int_{\tilde{S}} (u^{-1/2}v^{1/2})^2 (u^{1/2}v^{1/2})^2 \left| -\frac{1}{2u} \right| du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int\int_{\tilde{S}} u^{-1}v^2 du dv = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{du}{u} \int_{a_2}^{b_2} v^2 dv = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{du}{u} \frac{v^3}{3} \Big|_{a_2}^{b_2} = \\ &= \frac{1}{6} (b_2^3 - a_2^3) \ln|u| \Big|_{a_1}^{b_1} = \frac{1}{6} (b_2^3 - a_2^3) \ln \frac{b_1}{a_1}. \end{aligned}$$

Из формулы и примера видно, что при переходе в интеграле к новым переменным меняется не только область интегрирования, но и подынтегральная функция, поэтому при подборе конкретного преобразования следует учитывать оба фактора.

Мы приводим свойство якобиана и основные соображения, которыми обычно руководствуются при выводе формулы перехода в двойном интеграле к новым переменным интегрирования.

Пусть преобразование определяется системой

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$$

Переменным  $u$  и  $v$  дадим приращение  $\Delta u$  и  $\Delta v$  соответственно. В координатной системе  $\tilde{O}uv$  точки  $\tilde{M}(u, v)$ ,  $\tilde{M}_1(u + \Delta u, v)$ ,  $\tilde{M}_2(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ,  $\tilde{M}_3(u, v + \Delta v)$  служат вершинами прямоугольника  $[\tilde{S}]$ , стороны которого параллельны координатным осям (см. рис. 60). Его площадь равна

$$\tilde{S} = |\Delta u \Delta v|.$$

Отрицательные приращения не исключаются, поэтому площадь выражена модулем произведения приращений. Соответствующие точки на плоскости  $Oxy$  обозначим  $M, M_1, M_2, M_3$ . Следуя указанному порядку точек, выпишем их координаты:

$$(x(u, v), y(u, v)), \quad (x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v)),$$

$$(x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v)), \quad (x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v)).$$

Введем обозначения:

$$\Delta_u x = x(u + \Delta u, v) - x(u, v), \quad \Delta_u y = y(u + \Delta u, v) - y(u, v),$$

$$\Delta_v x = x(u, v + \Delta v) - x(u, v), \quad \Delta_v y = y(u, v + \Delta v) - y(u, v).$$

Выпишем векторы  $MM_1$  и  $MM_3$ :

$$MM_1 = \Delta_u x \mathbf{i} + \Delta_u y \mathbf{j}, \quad MM_3 = \Delta_v x \mathbf{i} + \Delta_v y \mathbf{j}.$$

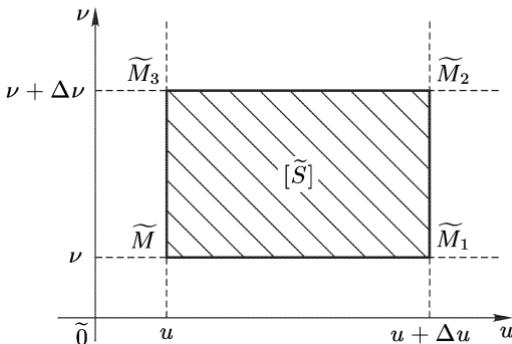


Рис. 60

Параметрические уравнения дуг, составляющих границу области  $[S]$ , формируются на основании следующего замечания. Когда в плоскости  $\tilde{O}uv$  точка движется по прямой  $v = v_0$ , ее первая координата меняется, а вторая зафиксирована. Поэтому кривая в плоскости  $Oxy$ , являющаяся изображением прямой  $v = v_0$ , определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0). \end{cases}$$

Когда же точка движется параллельно оси  $\tilde{O}v$  по прямой  $u = u_0$ , ее образ в плоскости  $Oxy$  вычерчивает кривую с параметризацией

$$\begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v). \end{cases}$$

Здесь параметром служит переменная  $v$  (см. рис. 61).

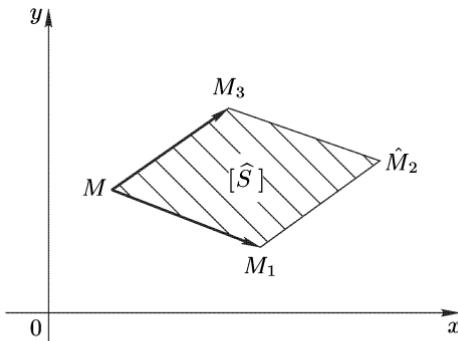


Рис. 61

Вычислим площадь параллелограмма  $MM_1\hat{M}_2M_3$ . Обозначим ее  $\hat{S}$  и представим модулем векторного произведения:

$$\begin{aligned}\hat{S} &= |[MM_1, MM_3]| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta_u x & \Delta_u y & 0 \\ \Delta_v x & \Delta_v y & 0 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{vmatrix} \Delta_u x & \Delta_u y \\ \Delta_v x & \Delta_v y \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} \right| = \left| \begin{vmatrix} \Delta_u x & \Delta_u y \\ \Delta_v x & \Delta_v y \end{vmatrix} \right|.\end{aligned}$$

Отношение площади параллелограмма к площади прямоугольника равно

$$\frac{\hat{S}}{\tilde{S}} = \left| \begin{vmatrix} \Delta_u x & \Delta_u y \\ \Delta_v x & \Delta_v y \end{vmatrix} \Big|_{|\Delta u \cdot \Delta v|} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\Delta_u x}{\Delta u} & \frac{\Delta_u y}{\Delta u} \\ \frac{\Delta_v x}{\Delta v} & \frac{\Delta_v y}{\Delta v} \end{vmatrix} \right|.$$

Предел отношения этих площадей равен

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \left| \begin{vmatrix} \frac{\Delta_u x}{\Delta u} & \frac{\Delta_u y}{\Delta u} \\ \frac{\Delta_v x}{\Delta v} & \frac{\Delta_v y}{\Delta v} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right| = |J(u, v)|.$$

Теперь можно сказать, что якобиан преобразования имеет некий геометрический смысл. Его выражает равенство

$$|J(u, v)| = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\hat{S}}{\tilde{S}}.$$

Напоминаем, что  $\tilde{S}$  — площадь прямоугольной области  $[\tilde{S}]$ , а  $\hat{S}$  — площадь параллелограмма  $MM_1\hat{M}_2M_3$ .

В доказательстве правила преобразования интеграла к новым переменным этот факт используется в виде приближенного равенства

$$|J(u, v)| \approx \frac{\hat{S}}{\tilde{S}} \Rightarrow \hat{S} \approx \tilde{S}|J(u, v)|.$$

Суть этого доказательства можно представить в виде следующего рассуждения. Пусть система

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

с непрерывным ненулевым якобианом реализует взаимно однозначное соответствие областей  $[S]$  и  $[\tilde{S}]$ . Область  $\tilde{S}$  разбита на части прямыми, параллельными координатным осям. Ячейки пронумерованы и обозначены  $[\tilde{S}_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Соответствующие кривые в плоскости  $Oxy$  определяют разбиение области  $[S]$ . Составляющие его ячейки, соответствующие ячейкам  $[\tilde{S}_k]$ , обозначены  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Далее обычным образом формируется интегральная сумма функции  $f(x, y)$ :

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(M_k) S_k = \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) S_k.$$

Она приближенно приравнивается сумме

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) \tilde{S}_k = \sum_{k=1}^{m_n} f(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k)) |J(u_k, v_k)| \tilde{S}_k.$$

Здесь  $(x_k, y_k)$  и  $(u_k, v_k)$  — координаты соответствующих точек  $M_k$  и  $\tilde{M}_k$ . Далее при соблюдении указанного принципа определяются нормальные последовательности соответствующих разбиений и доказывается, что последовательности сумм имеют общий предел (это наиболее трудоемкая часть доказательства). А отсюда следует равенство

$$\int\int_{[S]} f(x, y) dx dy = \int\int_{[\tilde{S}]} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

В следующем пункте приведено независимое обоснование формулы преобразования двойного интеграла к полярным координатам.

Еще заметим, что при составлении сумм мы не включили слагаемые, соответствующие пограничным ячейкам, что создает некоторые удобства при последующих рассуждениях. Напомним, что наша версия теории двойного интеграла строится для стандартных или обобщенных стандартных областей интегрирования, а также для областей со спрямляемыми границами. В этих случаях при нормальной последовательности разбиений суммарная площадь пограничных ячеек при неограниченном росте номера разбиения стремится к нулю (см. п. 2.1.7).

**2.2.4. Преобразование двойного интеграла к полярным координатам.** Как и ранее, полагаем, что в плоскости  $Oxy$  задана стандартная или обобщенная стандартная область  $[S]$ , на которой определена непрерывная функция  $f(x, y)$ . Помимо этого введена и полярная координатная система, причем в качестве полярной оси задействован положительный луч  $Ox$ . Напоминаем, что связь между декартовыми  $(x, y)$  и полярными  $(\varphi, r)$  координатами точки выражают равенства

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

При ограничении  $\varphi$  каким-либо промежутком длиной  $2\pi$  и положительным  $r$  эти равенства определяют взаимно однозначное соответствие между точками плоскости  $Oxy$  (исключается лишь начало координат) и точками части плоскости  $\tilde{O}\varphi r$  (см. рис. 62).

Еще одно наблюдение, которое нам понадобится. На рис. 63 представлены две фигуры  $[S']$  и  $[\tilde{S}']$ , которые отображаются одна на другую. Площади  $S'$  и  $\tilde{S}'$  фигур  $[S']$  и  $[\tilde{S}']$  связаны соотношением

$$S' = r \tilde{S}',$$

где  $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ . В самом деле,

$$S' = \frac{\pi r_2^2 - \pi r_1^2}{2\pi} (\gamma_2 - \gamma_1), \quad S' = \frac{r_2 + r_1}{2} (r_2 - r_1) \cdot (\gamma_2 - \gamma_1).$$

Как видим,

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = r, \quad (r_2 - r_1) (\gamma_2 - \gamma_1) = \tilde{S}'.$$

Таким образом,

$$S' = r \tilde{S}'.$$

Этот результат мы используем в процессе преобразования специальной интегральной суммы функции  $f(x, y)$ .

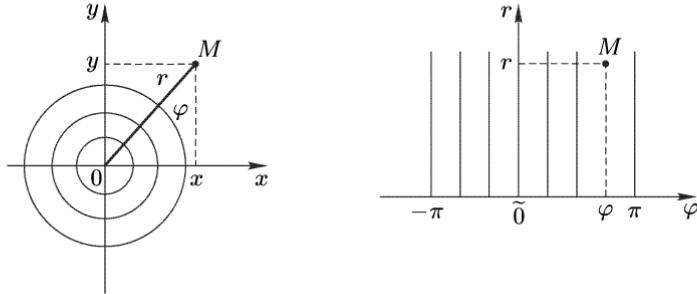


Рис. 62

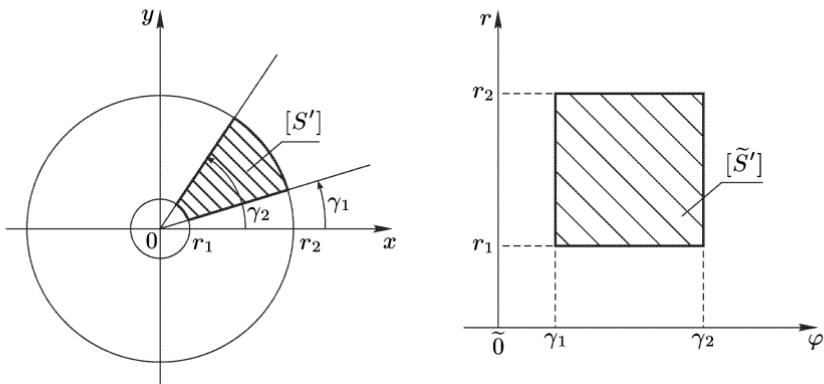


Рис. 63

Обратимся теперь к данной области  $[S]$ , образ которой в плоскости  $\tilde{O}\varphi r$  обозначим  $[\tilde{S}]$ . Покроем  $[S]$  фигурай, ограниченной лучами

$$y = x \operatorname{tg} \underline{\alpha}, \quad y = x \operatorname{tg} \bar{\alpha}$$

и окружностями

$$x^2 + y^2 = \underline{r}^2, \quad x^2 + y^2 = \bar{r}^2,$$

где  $\underline{\alpha} < \bar{\alpha}$  — грани множества значений полярного угла  $\varphi$  точек, заполняющих область  $[S]$ , а  $\underline{r} < \bar{r}$  — грани соответствующего множества полярных радиусов  $r$  (см. рис. 64). При этом область  $[\tilde{S}]$  окажется покрытой прямоугольной областью, ограниченной прямыми  $\varphi = \underline{\alpha}$ ,  $\varphi = \bar{\alpha}$ ,  $r = \underline{r}$ ,  $r = \bar{r}$ , как на рис. 64.

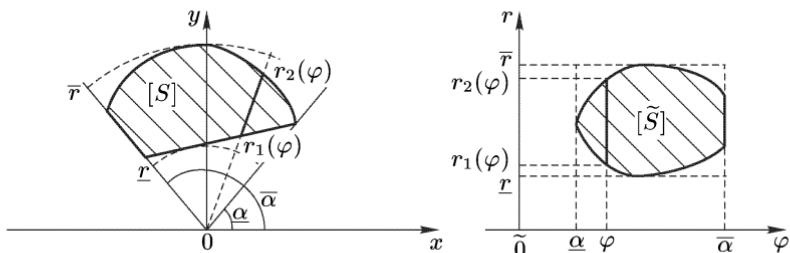


Рис. 64

Покажем, что переход в двойном интеграле к полярным координатам можно выполнить по формуле

$$\iint_{[S]} f(x, y) dx dy = \iint_{[\tilde{S}]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

и, если область  $[\tilde{S}]$  окажется стандартной, то

$$\iint_{[S]} f(x, y) dx dy = \int_{\underline{\alpha}}^{\bar{\alpha}} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Здесь  $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$  — функции, графики которых снизу и сверху ограничивают область  $[\tilde{S}]$ . Эти функции можно получить из полярных уравнений соответствующих частей границы исходной области  $[S]$  (рекомендуем еще раз обратиться к последнему рисунку).

Для доказательства отрезки  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], [\underline{r}, \bar{r}]$  точками разобьем на одинаковое число  $p$  равных частей. Через эти точки проведем прямые, параллельные координатным осям. Соответствующие им лучи, исходящие из  $O(0, 0)$ , и концентрические окружности определяют разбиение части кольца, покрывающее область  $[S]$ , на  $p^2$  ячеек. Задействуем все ячейки, расположенные внутри области  $[S]$ . При достаточно большом  $p$ , т. е. достаточно мелком разбиении, их наличие гарантировано. Разбиение с номером  $n$  определим при каком-нибудь из таких  $p$  путем разбиения отрезков  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  и  $[\underline{r}, \bar{r}]$  на  $p + n$  равных частей,  $n = 1, 2, \dots$ . Включенные в область  $[S]$  ячейки  $n$ -го разбиения, не имеющие с границей области общих точек, пронумеруем и обозначим  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . На рис. 65, помимо соответствующих ячеек  $[S_k]$  и  $[\tilde{S}_k]$ , изображены специально выбранные опорные точки

$M_k$  и  $\tilde{M}_k$ . Точка  $\tilde{M}_k$  — центр симметрии ячейки  $[\tilde{S}_k]$ , а соответствующая ей точка  $M_k$  расположена на пересечении биссектрисы угла, ограничивающего ячейку  $[S_k]$ , с соответствующей срединной окружностью.

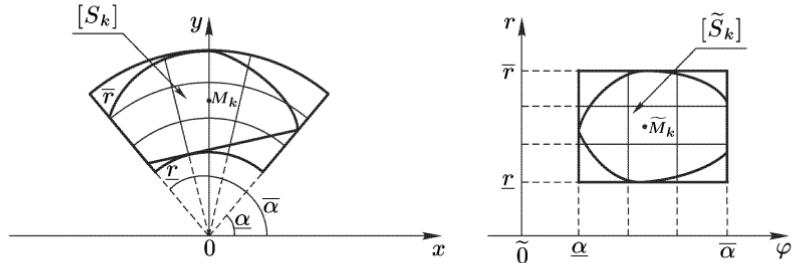


Рис. 65

Теперь составим и преобразуем сумму  $\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) S_k$ . В это выражение подставим

$$x_k = r_k \cos \varphi_k, \quad y_k = r_k \sin \varphi_k,$$

$$S_k = r_k \tilde{S}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m_n.$$

В результате сумма приобретает вид

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k) S_k = \sum_{k=1}^{m_n} f(r_k \cos \varphi_k, r_k \sin \varphi_k) r_k \tilde{S}_k.$$

Последовательность этих сумм сходится, и ее предел записывается, очевидно, следующим образом:

$$\iint_{[S]} f(x, y) dx dy = \iint_{[\tilde{S}]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Наша цель достигнута. Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что

$$|J(\varphi, r)| = r,$$

где  $J(\varphi, r) = \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi \\ x'_r & y'_r \end{vmatrix}$  — якобиан преобразования  $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$

Переход к полярным координатам имеет практический смысл, если облегчается задача расстановки пределов интегрирования в соответствующем повторном интеграле, и при этом не

слишком портится, а лучше, если упрощается, подынтегральная функция.

Пример. Область  $[S]$  определяется условиями

$$\begin{cases} a \leq x^2 + y^2 \leq b, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Надлежит проинтегрировать по этой области функцию  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  (см. рис. 66), т. е. вычислить интеграл

$$\iint_{[S]} \frac{dxdy}{x^2 + y^2}.$$

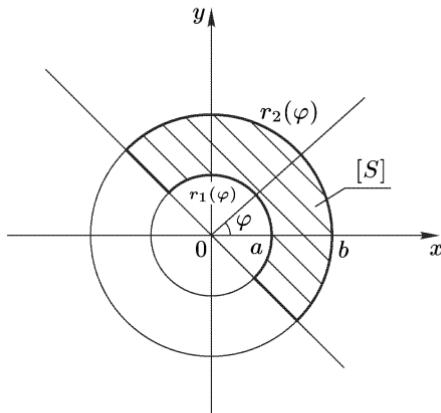


Рис. 66

При непосредственном переходе к повторному интегралу нам пришлось бы разбить область  $[S]$  на несколько частей. Здесь переход к полярным координатам представляется естественным, так как, во-первых, при  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  имеем  $x^2 + y^2 = r^2$ , и поэтому подынтегральная функция преобразуется следующим образом:

$$f(x, y) = \frac{1}{r^2}.$$

Во-вторых, уравнения лучей и окружностей, ограничивающих  $[S]$ , переходят в уравнения

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}, \quad r = a, \quad r = b.$$

И, в-третьих, исходная область  $[S]$  в нашем случае преобразуется в прямоугольную стандартную область  $[\tilde{S}]$  (см. рис. 67).

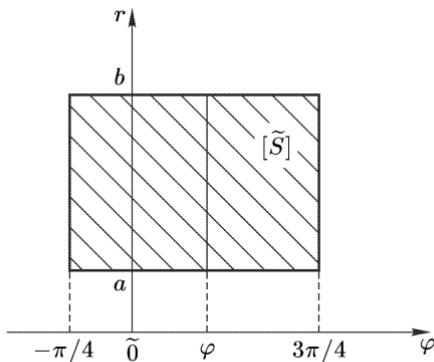


Рис. 67

Таким образом,

$$\int \int_{[S]} \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int \int_{[\tilde{S}]} \frac{1}{r^2} r dr d\varphi = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_a^b \frac{dr}{r} = \varphi \Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4} \ln r \Big|_a^b = \pi \ln \frac{b}{a}.$$

Заметим, что пределы интегрирования в повторном интеграле также естественно определяются по исходной области  $[S]$ . Привольно фиксируется  $\varphi \in [-\pi/4, 3\pi/4]$ , а затем на луче, проведенном из  $O$  под углом  $\varphi$  к оси  $Ox$ , определяется отрезок интегрирования  $[r_1(\varphi), r_2(\varphi)]$  для внутреннего интеграла. В нашем случае пределы интегрирования по  $r$  не зависят от  $\varphi$ :  $r_1(\varphi) = a$ ,  $r_2(\varphi) = b$ .

### § 2.3. Геометрические приложения двойного интеграла

**2.3.1. Площадь плоской фигуры.** Площадь фигуры, представляющей собой в плоскости  $Oxy$  стандартную или обобщенную стандартную область  $[S]$ , можно вычислить по формуле

$$S = \int \int_{[S]} dxdy.$$

Ее обоснование для стандартной области  $[S]$  см. в п.п. 2.1.5, 2.1.7. В случае обобщенной стандартной области площадь можно представить в виде суммы площадей стандартных частей, которые выражаются соответствующими интегралами единичной функции. Затем эти интегралы объединяются в один двойной интеграл по исходной обобщенной стандартной области (см. п. 2.1.9). К тому же в п. 1.3.1 приведена формула:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Там же представлены примеры, иллюстрирующие ее эффективность, однако в некоторых задачах вычисление площадей с помощью двойных интегралов оказывается более удобным.

**Пример 1.** Фигура  $[S]$  ограничена параболами  $ay = x^2$ ,  $by = x^2$  и гиперболами  $xy = \alpha$ ,  $xy = \beta$  при  $0 < a < b$ ,  $0 < \alpha < \beta$ .

Найдем площадь  $S$  этой фигуры. Особенности уравнений

$$\frac{x^2}{y} = a, \quad \frac{x^2}{y} = b, \quad xy = \alpha, \quad xy = \beta$$

наводят на мысль о переходе к новым переменным интегрирования:

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{y}, \\ v = xy. \end{cases}$$

Относительно  $x$  и  $y$  система разрешается следующим образом:

$$\begin{cases} uv = x^3, \\ \frac{v^2}{u} = y^3. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = u^{1/3} \cdot v^{1/3}, \\ y = u^{-1/3} \cdot v^{2/3}. \end{cases}$$

Выпишем якобиан преобразования:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

В нашем случае

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} \\ \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(2u^{-1}v^0 + u^{-1}v^0) = \frac{1}{9} \cdot 3u^{-1}.$$

Таким образом,  $J(u, v) = \frac{1}{3u}$ .

Указанное преобразование отображает область  $[S]$  в область  $[\tilde{S}]$  прямоугольной формы, ограниченную прямыми  $u = a$ ,  $u = b$ ,  $v = \alpha$ ,  $v = \beta$  (см. рис. 68).

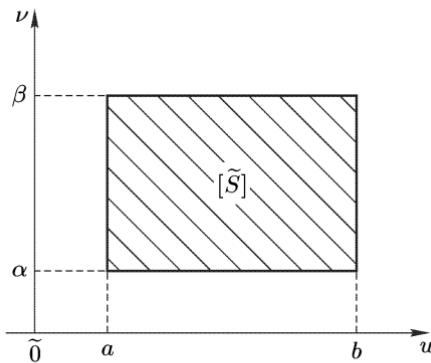


Рис. 68

А теперь по формуле площади получаем

$$\begin{aligned} S &= \iint_{[S]} dxdy = \iint_{[\tilde{S}]} \frac{1}{3u} dudv = \frac{1}{3} \int_a^b \frac{du}{u} \int_\alpha^\beta dv = \\ &= \frac{1}{3} \ln|u| \Big|_a^b \alpha = \frac{1}{3}(\ln b - \ln a)(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Таким образом,  $S = \frac{1}{3}(\beta - \alpha) \ln \frac{b}{a}$ .

Пример 2. Фигура  $[S]$  расположена в I четверти и представляет собой часть области, ограниченной лемнискатой Бернулли  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$  вне окружности  $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ .

Для удобства построения кривых перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Уравнение лемнискаты преобразуется к следующему виду:

$$r^4 = 2a^2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \Rightarrow r^2 = a^2 \sin 2\varphi.$$

Полярное уравнение окружности запишется следующим образом:

$$r^2 = \frac{a^2}{2}$$

Полярные углы точек пересечения определяются из системы

$$\begin{cases} r^2 = a^2 \sin 2\varphi, \\ r^2 = \frac{a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = a^2 \sin 2\varphi \Rightarrow \sin 2\varphi = \frac{1}{2}.$$

В интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  это уравнение имеет два корня:  $\frac{\pi}{12}$  и  $\frac{5\pi}{12}$ . Таким образом, фигура  $[S]$  вписана в угол, образуемый лучами  $\varphi = \frac{\pi}{12}$  и  $\varphi = \frac{5\pi}{12}$ . Полярные уравнения дуг, составляющих границу, будем использовать в виде (см. рис. 69):

$$r_1(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad r_2(\varphi) = a\sqrt{\sin 2\varphi}.$$

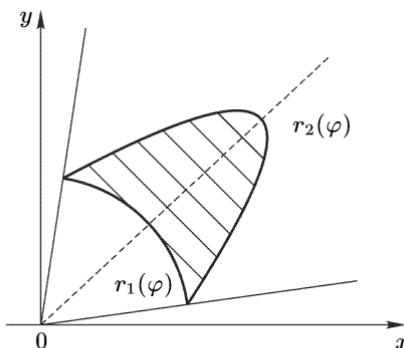


Рис. 69

А теперь вычислим площадь:

$$S = \iint_{[S]} dxdy = \int_{\pi/12}^{5\pi/12} d\varphi \int_{a/\sqrt{2}}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr.$$

Здесь  $r = J(\varphi, r)$  — якобиан преобразования. Вычислим повторный интеграл:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left( a^2 \sin 2\varphi - \frac{a^2}{2} \right) d\varphi = -\frac{a^2}{4} \cos 2\varphi \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} - \frac{a^2}{4} \varphi \Big|_{\pi/12}^{5\pi/12}.$$

В результате получаем:

$$S = -\frac{a^2}{4} \left( \cos \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} \right) - \frac{a^2}{4} \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{a^2}{12} (3\sqrt{3} - \pi).$$

**Пример 3.** Выражение площади области  $[S]$ , ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , можно получить следующим образом:

$$S = \iint_{[S]} dxdy = 4 \iint_{[S_1]} dxdy,$$

где  $[S_1]$  — часть области, находящаяся в I координатной четверти (см. рис. 70).

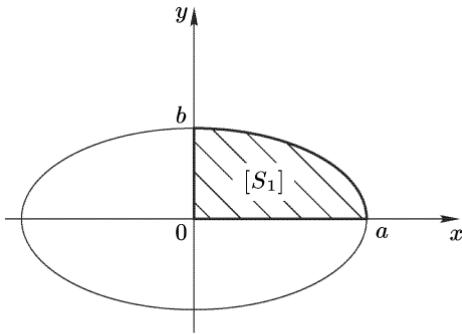


Рис. 70

Переход от декартовых к обобщенным полярным координатам по формулам

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi, \\ y = br \sin \varphi \end{cases}$$

преобразует область  $[S_1]$  в прямоугольную область  $[\tilde{S}]$  (см. рис. 71).

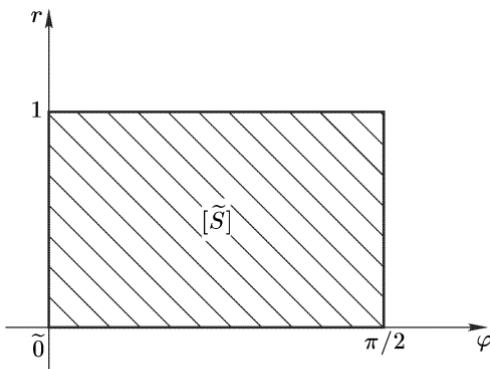


Рис. 71

Якобиан  $J(\varphi, r) = abr$ . Теперь

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 abr dr = 4ab \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi ab.$$

**Замечание.** Формула площади сектора в полярных координатах:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi,$$

приведенная в п. 1.3.1, легко выводится из тех же соображений. Действительно, площадь фигуры  $[S]$ , ограниченной выходящими из полюса лучами и дугой  $r = r(\varphi)$  (см. рис. 72), путем преобразования к полярным координатам выражается следующим

образом:

$$S = \iint_{[S]} dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \frac{r^2}{2} \Big|_0^{r(\varphi)} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

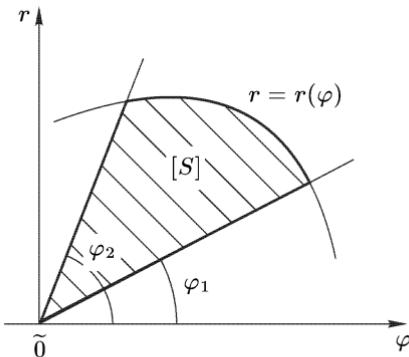


Рис. 72

**2.3.2. Геометрический смысл двойного интеграла.** Рассмотрим двойной интеграл непрерывной функции на обобщенной стандартной области  $[S]$  в следующих трех случаях: подинтегральная функция на области интегрирования неотрицательна, неположительна, меняет знак.

**Теорема 1.** *Если на обобщенной стандартной области  $[S]$  непрерывная функция  $f(x, y) \geq 0$ , то*

$$\iint_{[S]} f(x, y) dxdy = V,$$

где  $V$  — объем цилиндроида  $[V]$ .

Цилиндроидом мы назвали тело в пространстве  $Oxyz$ , ограниченное областью  $[S]$ , цилиндрической поверхностью, проведенной через границу  $[S]$  параллельно  $Oz$ , и графиком функции  $z = f(x, y)$  (см. рис. 73).

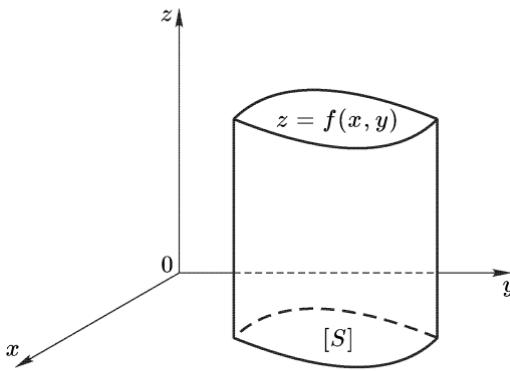


Рис. 73

**Доказательство.** Будем полагать, что область  $[S]$  покрыта некоторой прямоугольной стандартной областью  $[S^*]$ . Всякая нормальная последовательность разбиений этой области естественно определяет соответствующую нормальную последовательность разбиений данной области  $[S]$ .

Ячейки, составляющие  $n$ -е разбиение области  $[S]$ , обозначим  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Будем также полагать, что через границы всех этих ячеек  $[S_k]$  проведены цилиндрические поверхности с образующими, параллельными осям  $Oz$ . Они разбивают цилиндроид  $[V]$  на столбики, объемы которых соответственно обозначим  $V_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{m_n} V_k = V.$$

А теперь в каждой ячейке  $[S_k]$  определим крайние значения функции  $f(x, y)$ , которые обозначим соответственно  $\bar{\mu}_k$ ,  $\underline{\mu}_k$ . Очевидно, что

$$\underline{\mu}_k S_k \leq V_k \leq \bar{\mu}_k S_k.$$

Из этого вытекает

$$\sum_{k=1}^{m_n} \underline{\mu}_k S_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} V_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} \bar{\mu}_k S_k.$$

Крайние суммы при  $n \rightarrow +\infty$  имеют общий предел  $\int \int_{[S]} f(x, y) dx dy$ . Отсюда следует, что

$$\int \int_{[S]} f(x, y) dx dy = V.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если непрерывная функция  $f(x, y) \leq 0$  на  $[S]$ , то*

$$\int \int_{[S]} f(x, y) dx dy = -V,$$

где  $V$  — объем тела  $[V]$  (его можно назвать опрокинутым цилиндроидом), ограниченного сверху плоскостью  $Oxy$ , с боков — цилиндрической поверхностью, проведенной через границу области  $[S]$  параллельно  $Oz$ , и снизу — графиком подынтегральной функции  $z = f(x, y)$ .

В приведенной ниже выкладке мы воспользовались тем, что зеркальное отражение тела  $[V]$  относительно плоскости  $Oxy$  представляет собой цилиндроид, накрытый сверху графиком функции  $-f(x, y)$  с тем же объемом  $V$ . Данный интеграл

$$\int \int_{[S]} f(x, y) dx dy = - \int \int_{[S]} (-f(x, y)) dx dy = -V.$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на области  $[S]$  и на этой области меняет знак, то*

$$\int \int_{[S]} f(x, y) dx dy = V_1 - V_2,$$

где  $V_1$  — объем части тела, расположенной над плоскостью  $Oxy$ , а  $V_2$  — объем части тела, расположенной под этой плоскостью. Тело ограничено областью  $[S]$ , цилиндрической поверхностью, проведенной через ее границу параллельно  $Oz$ , и поверхностью  $z = f(x, y)$ .

Для доказательства введем две вспомогательные функции:

$$u_1(x, y) = \frac{f(x, y) + |f(x, y)|}{2}, \quad u_2(x, y) = \frac{f(x, y) - |f(x, y)|}{2}.$$

Они, очевидно, обладают на области  $[S]$  следующими свойствами:

$$f(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad u_1(x, y) \geq 0, \quad u_2(x, y) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\iint_{[S]} f(x, y) dx dy = \iint_{[S]} u_1(x, y) dx dy + \iint_{[S]} u_2(x, y) dx dy = V_1 - V_2.$$

Теорема доказана.

**2.3.3. Объем стандартной области в пространстве.** Стандартную область в пространстве определим следующим образом. Тело  $[V]$  в пространстве  $Oxyz$  будем называть стандартной областью, если, во-первых, ее проекция  $[S]$  на плоскость  $Oxy$  стандартна, во-вторых, всякая прямая, пересекающая  $[S]$  и параллельная  $Oz$ , имеет с  $[V]$  общий отрезок, в-третьих,  $[V]$  снизу и сверху ограничена графиками непрерывных на  $[S]$  функций  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ .

Объем стандартной области  $[V]$  можно вычислить по формуле

$$V = \iint_{[S]} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy.$$

В самом деле, когда область  $[V]$  целиком располагается над плоскостью  $Oxy$ , утверждение очевидно. Когда же  $[V]$  хотя бы частично расположена под указанной плоскостью, мы сдвигаем ее в положительном направлении оси  $Oz$  так, чтобы в результате получилась область  $[V_1]$ , расположенная над  $Oxy$ . Эта область снизу и сверху ограничена графиками неотрицательных функций

$$z_1(x, y) + \lambda \leq z_2(x, y) + \lambda.$$

Величина сдвига  $\lambda > 0$  фиксируется при соблюдении единственного условия  $\lambda \geq \underline{z}$ , где  $\underline{z}$  — нижнее значение функции  $z_1(x; y)$

на области  $[S]$ . Поэтому

$$\begin{aligned} V = V_1 &= \int \int_{[S]} (z_2(x, y) + \lambda - z_1(x, y) - \lambda) dx dy = \\ &= \int \int_{[S]} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Очевидно, что формула действует и в том случае, когда проекция области  $[V]$  на плоскость  $Oxy$  представляет собой обобщенную стандартную область  $[S]$ , разумеется при соблюдении остальных условий, составляющих определение стандартной области в пространстве.

**Пример.** Найдем объем тела  $[V]$ , ограниченного цилиндрическими поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ , плоскостью  $3x + 4y - 12z - 12 = 0$  и полусферой  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ . При использовании формулы естественно снижаются требования к рисунку. В нашем случае достаточно понять, что тело  $[V]$  представляет собой отрезок вертикально расположенной толстостенной цилиндрической трубы со сферическим верхним торцом и косым срезом внизу. Проекция области  $[V]$  на плоскость  $Oxy$  представляет собой кольцо  $[S]$  (см. рис. 74).

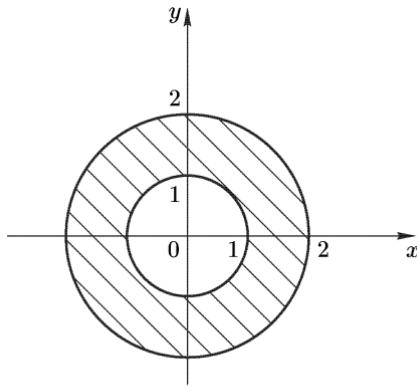


Рис. 74

По формуле

$$V = \int \int_{[S]} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy$$

получаем

$$V = \iint_{[S]} \left( \sqrt{4 - x^2 - y^2} - \left( \frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 \right) \right) dx dy.$$

Здесь естественен переход к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad |J(\varphi, r)| = r,$$

$$V = \iint_{[S]} \left( \sqrt{4 - r^2} - \frac{1}{4}r \cos \varphi - \frac{1}{3}r \sin \varphi + 1 \right) r dr d\varphi.$$

Этот результат выражается четырьмя повторными интегралами:

$$\begin{aligned} V = & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r \sqrt{4 - r^2} dr - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_1^2 r^2 dr - \\ & - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_1^2 r^2 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r dr. \end{aligned}$$

Вычислим каждый из этих интегралов и сформируем ответ:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r \sqrt{4 - r^2} dr = 2\pi \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4 - r^2)^{3/2} \Big|_1^2 \right) = 2\pi\sqrt{3}.$$

Так как  $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$ , то второй и третий интегралы выпадают. Четвертый интеграл равен

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_1^2 = 3\pi.$$

Таким образом,  $V = \pi(3 + 2\sqrt{3})$ .

**2.3.4. Площадь области на кривой поверхности.** Будем полагать, что некая фигура  $[\sigma]$  расположена на графике функции  $z = f(x, y)$ . Пусть  $[S]$  — проекция фигуры  $[\sigma]$  на плоскость  $Oxy$  —

представляет собой обобщенную стандартную область, на которой функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные частные производные. Дадим определение площади  $\sigma$  области  $[\sigma]$  и практически одновременно выведем формулу, с помощью которой эту площадь можно вычислить.

Сперва мы действуем точно так же, как при выводе объема цилиндроида (см. п. 2.3.2), т. е. при произвольно взятой нормальной последовательности разбиений области  $[S]$  для разбиения с номером  $n$  мы через границы всех ячеек  $[S_k]$ , составляющих это разбиение, проводим цилиндрические поверхности, параллельные оси  $Oz$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Они рассекают область  $[\sigma]$  на  $m_n$  частей. Возьмем каким-либо образом в ячейке  $[S_k]$  опорную точку  $M_k(x_k, y_k)$ , через нее проведем вертикаль и точку ее пересечения обозначим  $\hat{M}_k$ . Через эту точку проведем касательную плоскость к поверхности  $[\sigma]$ . Фигуру, которую высекает на этой плоскости цилиндрическая поверхность, проведенная через границу  $[S_k]$ , назовем чешуйкой. Ее площадь обозначим  $\hat{S}_k$ . Площади чешуек суммируются, т. е. составляется сумма  $\sum_{k=1}^{m_n} \hat{S}_k$ . Если последовательность таких сумм сходится, то область  $[\sigma]$  называется квадрируемой, при этом предел последовательности  $\sigma$  называется площадью этой области. Докажем, что область  $[\sigma]$ , расположенная на графике функции, имеющей непрерывные частные производные, квадрируема. Приведенное ниже доказательство представляет собой вывод формулы площади этой области.

Задействуем вышеприведенную конструкцию. Сумма площадей чешуек равна

$$\sum_{k=1}^{m_n} \hat{S}_k.$$

Поскольку проекция  $k$ -й чешуйки на плоскость  $Oxy$  представляет собой ячейку  $[S_k]$ , можно сказать, что

$$S_k = \hat{S}_k \cos \gamma_k,$$

где  $\gamma_k$  — острый угол между плоскостью  $Oxy$  и плоскостью чешуйки. Отсюда

$$\hat{S}_k = \frac{1}{\cos \gamma_k} S_k, \quad \sum_{k=1}^{m_n} \hat{S}_k = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{\cos \gamma_k} S_k.$$

Сумма площадей чешуек, записанная в таком виде представляет собой интегральную сумму функции  $\frac{1}{\cos \gamma}$ , где  $\gamma$  — угол между плоскостью  $Oxy$  и касательной плоскостью к поверхности  $[\sigma]$  в точке  $\hat{M}(x, y, (f(x, y)))$ . Покажем, что

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1},$$

для чего вспомним, что вектор нормали  $\mathbf{N}$  к поверхности, определяемой уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , получается следующим образом:

$$\mathbf{N} = \operatorname{grad} F = F'_x \mathbf{i} + F'_y \mathbf{j} + F'_z \mathbf{k}.$$

Если поверхность задается уравнением  $z = f(x, y)$ , то

$$F(x, y, z) = -f(x, y) + z \Rightarrow F'_x = -f'_x; \quad F'_y = -f'_y; \quad F'_z = 1.$$

Вектор нормали записывается так:

$$\mathbf{N} = -f'_x \mathbf{i} - f'_y \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Тогда сонаправленный с ним единичный вектор имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^0 = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma &= \frac{-f'_x \mathbf{i} - f'_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}.$$

Эта функция непрерывна на области  $[S]$ , и, следовательно, интегрируема на этой области, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \hat{S}_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{\cos \gamma_k} S_k = \\ &= \iint_{[S]} \frac{1}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{[S]} \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy = \sigma. \end{aligned}$$

Итак, утверждение доказано. Получена так называемая *формула компланации*:

$$\sigma = \iint_{[S]} \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy.$$

Чтобы на практике воспользоваться этой формулой, нужно:

1. знать функцию  $z = f(x, y)$ , на графике которой располагается область  $[\sigma]$ ;
2. знать проекцию  $[S]$  области  $[\sigma]$  на плоскость  $Oxy$ ;
3. определить частные производные  $f'_x, f'_y$  и сформировать подынтегральную функцию  $\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}$ ;
4. вычислить интеграл

$$\iint_{[S]} \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy = \sigma.$$

**Пример 1.** С помощью этой формулы вычислим площадь части параболоида  $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ , отсеченной плоскостью  $z = 1$ . В этом случае  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ .

Чтобы получить проекцию на  $Oxy$  указанной части параболоида, исключим переменную  $z$  из системы уравнений

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \\ z = 1. \end{cases}$$

В результате получилось уравнение проектирующего цилиндра:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Таким образом, интересующая нас область интегрирования ограничена окружностью с центром в начале координат и радиусом  $R = \sqrt{2}$  (см. рис. 75).

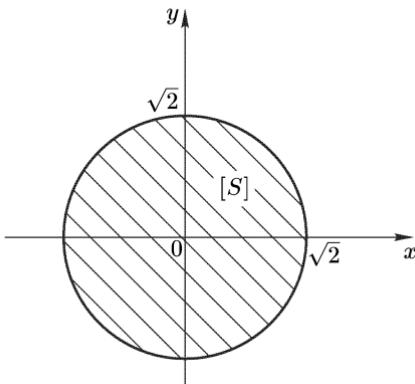


Рис. 75

Напишем частные производные функции  $z = f(x, y)$

$$f'_x = \frac{2x}{2} = x; \quad f'_y = \frac{2y}{2} = y.$$

Отсюда

$$\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Приступим к вычислению площади части параболоида. Обращаем Ваше внимание на то, что вычисление интеграла значительно упрощается при переходе к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{[S]} \int \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{r^2 + 1} \, dr = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (r^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

Пример 2. Найдем площадь части конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанной цилиндром  $z^2 = 2y$ .

Фигура, площадь которой требуется найти, имеет форму лепестка, расположенного на конусе. Функция  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Исключая переменную  $z$  из системы уравнений

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2y, \end{cases}$$

получаем уравнение кругового проектирующего цилиндра  $x^2 + y^2 = 2y$ . Таким образом, проекцией лепестка на плоскость  $Oxy$  является круг с центром  $C(0, 1)$  и радиусом 1 (см. рис. 76);

$$f'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad f'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

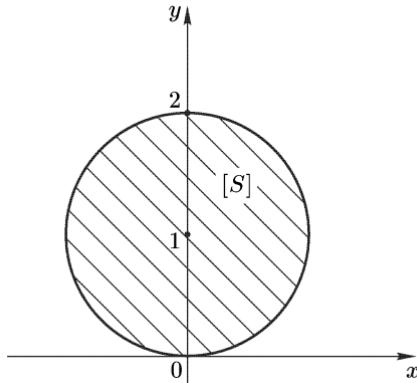


Рис. 76

Таким образом, интересующая нас площадь выражается интегралом

$$\sigma = \iint_{[S]} \sqrt{2} \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_{[S]} dx \, dy = \pi \sqrt{2}.$$

Напоминаем, что  $\iint_{[S]} dx \, dy = S$  — площадь области интегрирования.

## § 2.4. Задания для упражнений

1. Сформулируйте определение стандартной прямоугольной области.
2. Дайте определение интегральной суммы функции двух переменных.
3. Ответьте на вопрос: какая последовательность разбиений называется нормальной?
4. Сформулируйте определение интегрируемости и двойного интеграла функции на прямоугольной области.
5. Сформулируйте и докажите линейные свойства двойного интеграла.
6. Дайте определение стандартного продолжения функции на прямоугольную область.
7. Составьте план доказательства теоремы об интегрируемости функции, непрерывной на стандартной области.
8. Докажите интегрируемость функции, непрерывной на обобщенной стандартной области.
9. Опишите правило перехода от двойного интеграла к повторному по прямоугольной стандартной области.
10. Дайте обоснование формулы Фубини вычисления двойного интеграла по произвольной стандартной области.
11. Опишите правило преобразования двойного интеграла к новым переменным интегрирования.
12. Опишите процедуру перехода к полярным координатам в двойном интеграле.
13. Раскройте геометрический смысл двойного интеграла в случае неотрицательной, неположительной и меняющей знак функции.
14. Выведите формулу вычисления объема стандартной области в пространстве.
15. Приведите обоснование формулы компланации (формулы вычисления площади области, расположенной на поверхности).

*Представьте двойной интеграл  $\iint_S f(x, y) dx dy$  повторным интегралом, если области интегрирования  $[S]$  определены неравенствами.*

16.  $[S]: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2.$

17.  $[S]: x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$

18.  $[S]: x + y \leq 1, \quad x - y \leq 1, \quad x \geq 0.$

19.  $[S]: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0. \quad 20. [S]: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$

21.  $[S]: y \geq x^2, \quad y \leq 4 - x^2. \quad 22. [S]: y^2 - x^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 9.$

23.  $[S]: x^2 + y^2 \geq 2x, \quad x^2 + y^2 \leq 4x.$

*Дан повторный интеграл. Изобразите область интегрирования.*

24.  $\int_{-2}^{-1} dx \int_x^{1/x} f(x, y) dy. \quad 25. \int_{-1}^0 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx.$

*Измените порядок интегрирования в повторных интегралах.*

26.  $\int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy. \quad 27. \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$

28.  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy. \quad 29. \int_{-2}^1 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy.$

30.  $\int_0^1 dx \int_x^{1+x^2} f(x, y) dy. \quad 31. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$

32.  $\int_1^2 dy \int_{-y^2}^3 f(x, y) dx. \quad 33. \int_{-1}^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy.$

$$34. \int_0^2 dx \int_0^{e^x} f(x, y) dy. \quad 35. \int_{-2}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$36. \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}/\sqrt{2}}^{\sqrt{4-x^2}/\sqrt{2}} f(x, y) dy. \quad 37. \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$38. \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy. \quad 39. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy.$$

*Вычислите двойные интегралы. Области интегрирования определены или неравенствами, или уравнениями ограничивающих линий.*

$$40. \iint_S e^{x+y} dxdy, \text{ где } [S]: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

$$41. \iint_S x^2 y \cos(xy^2) dxdy, \text{ где } [S]: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2.$$

$$42. \iint_S (x^3 + y^3) dxdy, \text{ где } [S]: y = \frac{1}{x}, y = x, x = 4, y = 0.$$

$$43. \iint_S 4y^2 \sin 2xy dxdy, \text{ где } [S]: x = 0, y = \sqrt{2\pi}, y = 2x.$$

$$44. \iint_S (x - y) dxdy, \text{ где } [S]: y = 2 - x^2, y = 2x - 1.$$

$$45. \iint_S \frac{y^3}{x^2} dxdy, \text{ где } [S]: y \geq \frac{1}{3}x, y \leq \sqrt{x}, x \geq 1.$$

$$46. \iint_S (3x + y) dxdy, \text{ где } [S]: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{2}{3}x + 3.$$

$$47. \iint_S ye^{xy/2} dxdy, \text{ где } [S]: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 2, x = 4.$$

48.  $\int\limits_{[S]} \int (x+y) dx dy$ , где  $[S]: y = 4 - (x-1)^2$ ,  $y = \frac{3}{2}x$ ,  $x \geq 0$ .

49.  $\int\limits_{[S]} \int 3xy^2 dx dy$ , где  $[S]: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ .

*Используя замену переменных  $x+y = u$ ,  $x-y = v$ , вычислите*

*интеграл.*

50.  $\int\limits_{[S]} \int (x+y)^3(x-y)^2 dx dy$ , где область  $[S]$  — квадрат, ограниченный прямыми  $x+y=1$ ,  $x-y=1$ ,  $x+y=3$ ,  $x-y=-1$ .

*В следующих двойных интегралах  $\int\limits_{[S]} \int f(x, y) dx dy$  перейдите к полярным координатам; результат представьте в виде повторного интеграла.*

51. Область  $[S]$  ограничена окружностями  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 8x$  и прямыми  $y = x$ ,  $y = 2x$ .

52. Область  $[S]$  является общей частью двух кругов:  $x^2 + y^2 \leq 2x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4y$ .

53. Область  $[S]$  ограничена правой частью петли лемнискаты Бернулли  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

54. Преобразуйте повторный интеграл  $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$  к повторному интегралу в полярных координатах.

Перейдите к полярным координатам и вычислите интегралы.

55.  $\iint_{[S]} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , где область  $[S]$  — четверть круга  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .
56.  $\iint_{[S]} \ln(x^2 + y^2) dx dy$ , здесь область  $[S]$  — кольцо:  $e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4$ .

Вычислите двойные интегралы.

57.  $\iint_{[S]} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ , где область  $[S]$  — круг  $x^2 + y^2 \leq Rx$ .
58.  $\iint_{[S]} \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$ , если  $[S]$  — часть кольца  $x^2 + y^2 \geq 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $y \leq x\sqrt{3}$ .

Найдите площади фигур, ограниченных линиями.

59.  $y = 4 - x^2$ ,  $3x - 2y - 6 = 0$ .

60.  $x \geq 0$ ,  $y \geq 5x$ ,  $y \leq 6 - x^2$ .

61.  $y = 3/x$ ,  $y = 4e^x$ ,  $y = 3$ ,  $y = 4$ .

62.  $x = \sqrt{36 - y^2}$ ,  $x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$ .

63.  $x = 8 - y^2$ ,  $x = -2y$ .

64.  $x^2 + y^2 \leq 4y$ ,  $x^2 + y^2 \geq 4$ ,  $x \geq 0$ .

65.  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ .

66.  $x^2 - 4y + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 8y + y^2 = 0$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ .

Найдите объемы тел, ограниченных следующими поверхностями.

67. Координатными плоскостями, плоскостями  $x = 4$ ,  $y = 4$  и параболоидом  $z = x^2 + y^2 + 1$ .

68. Цилиндрами  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2\sqrt{x}$  и плоскостями  $z = 0$ ,  $x + z = 6$ .

69. Цилиндром  $z = 4 - x^2$  и плоскостями  $y = 0$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$ .

70. Цилиндром  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  и плоскостями  $z = 12 - 3x - 4y$ ,  $z = 1$ .
71. Цилиндром  $z = \frac{y^2}{2}$  и плоскостями  $2x + 3y - 12 = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ .
72. Конусом  $x^2 + y^2 = z^2$  и параболоидом  $z = x^2 + y^2$ .
73. Цилиндром  $y = 1 + x^2$  и плоскостями  $z = 3x$ ,  $y = 5$ ,  $z = 0$ .
74. Параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $y + z = 2$ .
75. Параболоидом  $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$  и плоскостями  $x + y - 3 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .
76. Сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  и цилиндром  $x^2 + y^2 = ax$  (задача Вивиани).

*Вычислите площадь части кривой поверхности.*

77. Найдите площадь части цилиндра  $y^2 = 2z$ , вырезаемой плоскостями  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ .
78. Найдите площадь части параболоида  $x^2 + y^2 = 2z$ , отсеченной плоскостью  $z = 2$ .
79. Найдите площадь части цилиндра  $z^2 = 4x$ , вырезанной цилиндром  $y^2 = 4x$  и плоскостью  $x = 1$ .
80. Найдите площадь части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 2y$ .
81. Найдите площадь части конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , лежащей над плоскостью  $Oxy$  и отсеченной плоскостью  $z = \sqrt{2}(x/2 + 1)$ .
82. Найдите площадь части поверхности конуса  $y^2 + z^2 = x^2$ , расположенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ .
83. Найдите площадь части параболоида  $x = 1 - y^2 - z^2$ , отсеченной плоскостью  $x = 0$ .
84. Найдите площадь части конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 2x$ .
85. Найдите площадь части параболоида  $z = xy$ , ограниченной цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$ .

## Г л а в а 3. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Теория тройного интеграла почти полностью повторяет теорию двойного интеграла, поэтому мы приведем ее в сокращенном виде.

### § 3.1. Определение и вычисление тройного интеграла

**3.1.1. Понятие интегрируемости и интеграла функции трех переменных.** Функция трех переменных  $f(x, y, z)$  сначала рассматривается на области  $[V^*]$  пространства  $Oxyz$ , ограниченной параллелепипедом, грани которого параллельны координатным плоскостям. Область разбивается на ячейки  $[V_k]$ , в которых определяются опорные точки  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  и значения функции в этих точках:

$$f(M_k) = f(x_k, y_k, z_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Составляется интегральная сумма

$$\sum_{k=1}^m f(M_k)V_k,$$

где  $V_k$  — объем ячейки  $[V_k]$ . Определяется понятие нормальной последовательности разбиений области  $[V^*]$  как пронумерованной последовательности разбиений этой области, в которой при неограниченном росте номера  $n = 1, 2, \dots$  наибольший диаметр ячеек стремится к нулю, т. е.

$$\Delta_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0.$$

Диаметром ячейки мы называем расстояние между наиболее удаленными друг от друга точками этой ячейки. На каждом разбиении составляется интегральная сумма

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(M_k)V_k,$$

где  $n$  — номер разбиения,  $m_n$  — число соответствующих ячеек. Тем самым составляется последовательность произвольных интегральных сумм функции  $f(x, y, z)$ .

Функция  $f(x, y, z)$  называется *интегрируемой* на области  $[V^*]$ , если при любой нормальной последовательности разбиений области все последовательности интегральных сумм функции сходятся. При этом их общий предел называется *тройным интегралом* этой функции.

*Приводим обозначение вместе с определением:*

$$\int \int \int_{[V^*]} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k, z_k) V_k \text{ и } \Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

На области иных конфигураций тройной интеграл обобщается следующим образом. Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена на области  $D$ , являющейся частью области  $[V^*]$ . Вводится вспомогательная функция  $f^*(x, y, z)$ , совпадающая с  $f(x, y, z)$  на  $D$  и равная нулю во всех остальных точках области  $[V^*]$  (напоминаем, что границей области  $[V^*]$  служит параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям). Если  $f^*(x, y, z)$  интегрируема на  $[V^*]$ , то  $f(x, y, z)$  называется *интегрируемой на D*, и ее интеграл обозначается и определяется следующим образом:

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{[V^*]} f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

**3.1.2. Интегрируемость непрерывной функции.** Здесь нам понадобится понятие объемной стандартной области. Оно определяется с помощью координатной системы  $Oxyz$ : область проектируется на какую-либо из координатных плоскостей, на проекции вводятся функции, определяющие форму области. В определении также используются прямые, перпендикулярные указанной плоскости.

Мы рассчитываем на то, что Ваше восприятие характеристических свойств области, составляющих приведенное ниже определение, не будет зависеть от того, на какую именно координатную плоскость проецируется область.

Итак, область  $[V]$  в пространстве  $Oxyz$  мы называем *стандартной*, если, во-первых, ее проекция на плоскость

$Oxy$  представляет собой стандартную в этой плоскости область  $[S]$ . Во-вторых, пересечение с областью  $[V]$  любой прямой, параллельной оси  $Oz$  и пересекающей  $[S]$ , представляет собой отрезок. И, в-третьих, область  $[V]$  ограничена снизу и сверху графиками непрерывных на  $[S]$  функций  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ .

Попробуйте ответить на вопрос: что изменится в определении, если область спроектировать не на  $Oxy$ , а на какую-нибудь другую координатную плоскость, например на  $Oxz$ .

**Теорема.** *Непрерывная на стандартной области функция интегрируема на этой области.*

Доказательство мы не приводим, так как по смыслу задействованных в нем понятий и фактов (а также композиционно) оно повторяет доказательство соответствующей теоремы, приведенной в п. 2.1.7. Заметим лишь, что тройной интеграл непрерывной на стандартной области функции можно представить пределом последовательности интегральных сумм, определенной на нормальной последовательности разбиений самой области  $[V]$  без ее включения в область  $[V^*]$ , ограниченную параллелепипедом, т. е.

$$\int \int \int_{[V]} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} f(x_k, y_k, z_k) V_k,$$

где  $[V_k] \subset [V]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Добавим, что слагаемые, соответствующие приграничным ячейкам, можно исключить.

**Интеграл по обобщенной стандартной области.** Область  $[V]$  будем называть *обобщенной стандартной областью*, если ее можно разбить на конечное число стандартных частей. Непрерывная на обобщенной стандартной области функция интегрируема на этой области, и ее интеграл можно представить суммой интегралов по стандартным частям.

**3.1.3. Основные свойства тройных интегралов.** Если обобщенная стандартная область интегрирования непрерывной функции разбита на обобщенные стандартные части, то тройной интеграл по данной области равен сумме соответствующих интегралов по частичным областям.

Тройной интеграл константы равен произведению этой константы на объем области интегрирования. В частности, при единичной подынтегральной функции

$$\iint\limits_{[V]} dx dy dz = V.$$

Интеграл суммы равен сумме интегралов слагаемых. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла.

Неравенство функций в области переходит на соответствующие интегралы.

**Теорема** (о среднем значении при стандартной области интегрирования и непрерывной подынтегральной функции). *В области интегрирования имеется по меньшей мере одна точка, в которой значение подынтегральной функции равно отношению интеграла к объему области интегрирования, т. е. существует точка  $\tilde{M} \in [V]$ , такая что*

$$\begin{aligned} f(\tilde{M}) &= \frac{1}{V} \iint\limits_{[V]} f(x, y, z) dx dy dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint\limits_{[V]} f(x, y, z) dx dy dz = f(\tilde{M})V. \end{aligned}$$

**3.1.4. Основной способ вычисления тройных интегралов.** Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на стандартной области  $[V]$ , то соответствующий тройной интеграл можно представить в виде

$$\iint\limits_{[V]} \iint\limits_{[S]} f(x, y, z) dx dy dz = \iint\limits_{[S]} dx dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

По условию функции  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$  непрерывны на стандартной области  $[S]$ . Их графики снизу и сверху ограничивают область  $[V]$ . Правая часть формулы представляет собой так называемый повторный интеграл. Порядок его вычисления состоит в следующем. Сначала при фиксированных  $x$  и  $y$  выполняется внутреннее интегрирование, т. е. функция  $f(x, y, z)$  как функция одной переменной  $z$  интегрируется по отрезку  $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ .

Затем полученный результат после освобождения от фиксации переменных  $x$  и  $y$  интегрируется по области  $[S]$ .

Напомним, что область  $[S]$  в плоскости  $Oxy$  стандартна. Если она при  $a < b$  ограничена прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , а также графиками непрерывных на  $[a, b]$  функций  $y_1(x) \leq y_2(x)$ , то тройной интеграл представляется в виде

$$\int \int \int [V] f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Обосновать формулу можно, опираясь на основную идею доказательства аналогичной теоремы для двойного интеграла. Ее суть в том, чтобы построить последовательность интегральных сумм подынтегральной функции, сходящейся одновременно к тройному и повторному интегралам. Принцип построения таких специфических сумм естественно трансформируется на трехмерный случай. Здесь мы ограничились лишь приведенными соображениями.

Преобразование тройного интеграла к повторному следует начинать с выяснения, является ли область  $[V]$  стандартной. Если да, определяем, на какую координатную плоскость ее следует спроектировать. Заметим, что при ответе на последний вопрос мы определяем переменные интегрирования в двойном и внутреннем интегралах. Например, при проектировании  $[V]$  на  $Oyz$  роли переменных интегрирования распределяются в следующем порядке:  $y$  и  $z$  — в двойном,  $x$  — во внутреннем интеграле. В этом случае область  $[V]$  проектируется на указанную плоскость  $Oyz$ , тем самым определяется область интегрирования  $[S]$  для двойного интеграла и непрерывные на ней функции  $x_1(y, z) \leq x_2(y, z)$ . При традиционном ракурсе рисунка (ось  $Ox$  на нас, ось  $Oy$  — вправо, ось  $Oz$  — вверх) график  $x_1(y, z)$  — сзади, а график  $x_2(y, z)$  — спереди ограничивают область  $[V]$ , после чего формируется повторный интеграл:

$$\int \int [S] dy dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) dx.$$

**Пример 1.** Подынтегральная функция  $f(x, y, z) = xy + 2z$ . Область интегрирования  $[V]$  ограничена плоскостями  $x = 0$ ,

$y = 0$ ,  $x + y - z = 0$ ,  $x + y + z = 2$ . Она стандартна, и ее проекция на плоскость  $Oxy$  представляет собой прямоугольный треугольник с катетами на координатных осях (см. рис. 77). Уравнение гипотенузы получается из системы

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1.$$

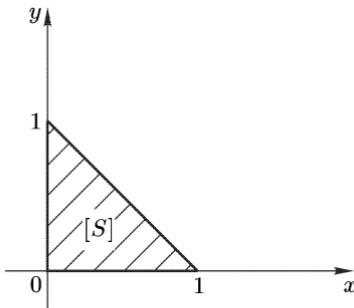


Рис. 77

Из уравнений плоскости, ограничивающих снизу и сверху область  $[V]$ , определяем  $z_1(x, y) = x + y$ ,  $z_2(x, y) = 2 - x - y$ . Теперь все готово для интегрирования:

$$I = \iint_{[V]} (xy + 2z) dx dy dz = \iint_{[S]} dx dy \int_{x+y}^{2-x-y} (xy + 2z) dz.$$

Сначала выполняется внутреннее интегрирование, в нашем случае по переменной  $z$  при постоянных  $x$  и  $y$ :

$$I = \iint_{[S]} (xyz + z^2) \Big|_{x+y}^{2-x-y} dx dy.$$

В результате двойной подстановки при переменных  $x$  и  $y$  получаем

$$I = \iint_{[S]} (xy(2 - x - y) + (2 - x - y)^2 - xy(x + y) - (x + y)^2) dx dy.$$

После преобразования подынтегральной функции и перехода в двойном интеграле к повторному имеем:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (4 - 4x - 4y + 2xy - 2x^2y - 2xy^2) dy.$$

Теперь при фиксированном  $x$  интегрируем по  $y$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( 4y - 4xy - 2y^2 + xy^2 - x^2y^2 - \frac{2}{3}xy^3 \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left( 4(1-x) - 4x(1-x) - 2(1-x)^2 + x(1-x)^2 - \right. \\ &\quad \left. - x^2(1-x)^2 - \frac{2}{3}x(1-x)^3 \right) dx. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( 2 - \frac{11}{3}x + x^2 + x^3 - \frac{1}{3}x^4 \right) dx = \\ &= \left( 2x - \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{41}{60}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $I = \frac{41}{60}$ .

**Пример 2.** Вычислим интеграл

$$I = \iint_{[V]} \frac{x}{1+y^2+z^2} dxdydz.$$

Область  $[V]$  ограничена круговым параболоидом  $x = y^2 + z^2$  и конической воронкой  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Здесь свойства стандартной области проявляются при ее проектировании на плоскость  $Oyz$ . Чтобы определить границу проекции, исключим  $x$  из системы:

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 - \sqrt{y^2 + z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} \left( \sqrt{y^2 + z^2} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = 1.$$

Это уравнение в плоскости  $Oyz$  определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Следовательно, проекцией области  $[V]$  на плоскость  $Oyz$  является круг  $[S]$  с указанной границей (см. рис. 78). Таким образом,  $x$  мы задействуем как переменную внутреннего интегрирования, а  $y$  и  $z$  — как переменные интегрирования в двойном интеграле. Пределы интегрирования по  $x$  очевидны:

$$x_1(y, z) = y^2 + z^2 \leqslant \sqrt{y^2 + z^2} = x_2(y, z).$$

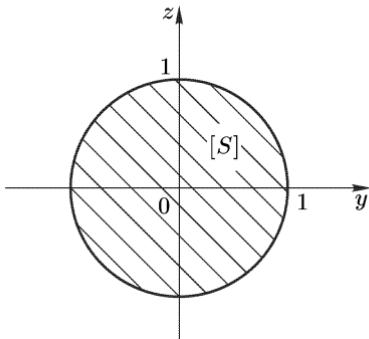


Рис. 78

Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{[S]} dy dz \int_{y^2+z^2}^{\sqrt{y^2+z^2}} \frac{x}{1+y^2+z^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{[S]} \frac{dy dz}{1+y^2+z^2} x^2 \Big|_{y^2+z^2}^{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{1}{2} \int \int_{[S]} \frac{y^2+z^2 - (y^2+z^2)^2}{1+y^2+z^2} dy dz. \end{aligned}$$

В этом интеграле естествен переход к полярным координатам:

$$\begin{cases} y = r \cos \varphi, \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Якобиан  $J(\varphi, r) = r$ .

В полярных координатах:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2 - r^4}{1 + r^2} \cdot r dr.$$

В более удобном для интегрирования виде подынтегральная функция выглядит так:

$$\frac{r^3 - r^5}{1 + r^2} = -r^3 + 2r - \frac{2r}{1 + r^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} 2\pi \int_0^1 \left( -r^3 + 2r - \frac{2r}{1 + r^2} \right) dr = \\ &= \pi \left( -\frac{r^4}{4} + r^2 - \ln(1 + r^2) \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{3}{4} - \ln 2 \right). \end{aligned}$$

Обратите внимание на область интегрирования в первом интеграле. В любом варианте проектирования ее на координатную плоскость она остается стандартной. Однако при ее проектировании на  $Oxz$  или  $Oyz$  возникают некоторые затруднения при определении пределов для внутреннего интеграла. Проблема разрешается разбиением области на две части плоскостью  $z = 1$ .

Если же область интегрирования по существу нестандартна, но допускает разбиение на стандартные части, то, напоминаем, тройной интеграл по этой области представляется в виде суммы интегралов по стандартным частям.

## § 3.2. Преобразование тройного интеграла к новым переменным интегрирования

**3.2.1. Линейное преобразование переменных интегрирования в тройном интеграле.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, \\ y = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, \\ z = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases}$$

6\*

с невырожденной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

т. е.  $\det(A) \neq 0$ .

Эта система устанавливает взаимно однозначное соответствие между числовыми тройками  $(u, v, w)$  и  $(x, y, z)$ , так как она, например по правилу Крамера, однозначно разрешается относительно переменных  $u, v, w$ , т. е. систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} u = b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z, \\ v = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z, \\ w = b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z. \end{cases}$$

Таким образом, определяются отображение пространства  $Oxyz$  на пространство  $\tilde{O}uvw$  и обратное отображение. Заметим, что при этом параллельные плоскости одного пространства отображаются в параллельные плоскости другого пространства. Например, плоскостям вида  $u = u_0$ , т. е. параллельным координатной плоскости  $\tilde{O}vw$ , соответствуют в пространстве  $Oxyz$  плоскости  $b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = u_0$ . Аналогично, плоскости  $v = v_0$  преобразуются в плоскости  $b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z = v_0$ , а плоскости  $w = w_0$  — в плоскости  $b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z = w_0$ .

Посмотрим, как соотносятся объемы соответствующих областей. Для этого пространство  $\tilde{O}uvw$  разобьем плоскостями, которые проведем с равными промежутками параллельно координатным плоскостям. Пусть  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$  — соответствующие расстояния между соседними плоскостями. Все эти плоскости составляют каркас, разбивающий пространство на одинаковые ячейки, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда объемом  $\Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta w$ . Ячейки, которые образуют соответствующий каркас в пространстве  $Oxyz$ , имеют форму косоугольных параллелепипедов. Ячейки эти также одинаковы и поэтому имеют один и тот же объем, который равен модулю смешанного произведения векторизованных некомпланарных ребер любой такой ячейки. Пусть  $[\tilde{V}_0]$  — типовая ячейка в пространстве  $\tilde{O}uvw$ , а  $[V_0]$  — соответствующая ей ячейка пространства  $Oxyz$ . Чтобы

определить соотношения между их объемами, поступим следующим образом. Вершину ячейки  $[\tilde{V}_0]$  с наименьшими координатами  $(u_0, v_0, w_0)$  обозначим  $\tilde{M}_0$ . Введем еще три точки:  $\tilde{M}_1(u_0 + \Delta u, v_0, w_0)$ ,  $\tilde{M}_2(u_0, v_0 + \Delta v, w_0)$ ,  $\tilde{M}_3(u_0, v_0, w_0 + \Delta w)$ .

Соответствующие точки в пространстве  $Oxyz$  обозначим  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ . Когда точка  $\tilde{M}(u, v, w)$  проходит отрезок  $[\tilde{M}_0, \tilde{M}_1]$  от  $\tilde{M}_0$  до  $\tilde{M}_1$ , соответствующая точка  $M(x, y, z)$  перемещается от  $M_0$  до  $M_1$ . Приращения ее координат таковы:

$$\begin{aligned}\Delta_u x = x_1 - x_0 &= a_{11}(u_0 + \Delta u) + a_{12}v_0 + a_{13}w_0 - \\ &\quad - (a_{11}u_0 + a_{12}v_0 + a_{13}w_0) = a_{11}\Delta u;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_u y = y_1 - y_0 &= a_{21}(u_0 + \Delta u) + a_{22}v_0 + a_{23}w_0 - \\ &\quad - (a_{21}u_0 + a_{22}v_0 + a_{23}w_0) = a_{21}\Delta u;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_u z = z_1 - z_0 &= a_{31}(u_0 + \Delta u) + a_{32}v_0 + a_{33}w_0 - \\ &\quad - (a_{31}u_0 + a_{32}v_0 + a_{33}w_0) = a_{31}\Delta u.\end{aligned}$$

Это координаты вектора  $M_0M_1$  в координатном базисе  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

Когда же точка  $\tilde{M}$  движется параллельно оси  $\tilde{O}v$  от точки  $\tilde{M}_0$  до  $\tilde{M}_2$ , соответствующая точка  $M$  прочерчивает ребро  $M_0M_2$  косого параллелепипеда. Приращения ее координат:

$$\begin{aligned}\Delta_v x = x_2 - x_0 &= a_{11}u_0 + a_{12}(v_0 + \Delta v) + a_{13}w_0 - \\ &\quad - (a_{11}u_0 + a_{12}v_0 + a_{13}w_0) = a_{12}\Delta v;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_v y = y_2 - y_0 &= a_{21}u_0 + a_{22}(v_0 + \Delta v) + a_{23}w_0 - \\ &\quad - (a_{21}u_0 + a_{22}v_0 + a_{23}w_0) = a_{22}\Delta v;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_v z = z_2 - z_0 &= a_{31}u_0 + a_{32}(v_0 + \Delta v) + a_{33}w_0 - \\ &\quad - (a_{31}u_0 + a_{32}v_0 + a_{33}w_0) = a_{32}\Delta v.\end{aligned}$$

Аналогично, меняя переменную  $w$  от  $w_0$  до  $w_0 + \Delta w$ , получаем

$$\Delta_w x = x_3 - x_0 = a_{13}\Delta w;$$

$$\Delta_w y = y_3 - y_0 = a_{23}\Delta w;$$

$$\Delta_w z = z_3 - z_0 = a_{33}\Delta w.$$

Это координаты векторизованного ребра  $M_0M_3$ .

Таким образом,

$$M_0M_1 = a_{11}\Delta u\mathbf{i} + a_{21}\Delta u\mathbf{j} + a_{31}\Delta u\mathbf{k};$$

$$M_0M_2 = a_{12}\Delta v\mathbf{i} + a_{22}\Delta v\mathbf{j} + a_{32}\Delta v\mathbf{k};$$

$$M_0M_3 = a_{13}\Delta w\mathbf{i} + a_{23}\Delta w\mathbf{j} + a_{33}\Delta w\mathbf{k}.$$

Интересующий нас объем косоугольной ячейки равен модулю смешанного произведения этих векторов, т. е.

$$V_0 = | \langle M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3 \rangle | =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} a_{11}\Delta u & a_{21}\Delta u & a_{31}\Delta u \\ a_{12}\Delta v & a_{22}\Delta v & a_{32}\Delta v \\ a_{13}\Delta w & a_{23}\Delta w & a_{33}\Delta w \end{array} \right|.$$

Выносим за знак определителя произведение  $\Delta u\Delta v\Delta w = \tilde{V}_0$ . В результате получаем

$$V_0 = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \right| |\tilde{V}_0.$$

Обратите внимание на то, что элементы определителя представляют собой частные производные функций, определяющих преобразование:

$$a_{11} = \frac{\partial x}{\partial u}; \quad a_{21} = \frac{\partial y}{\partial u}; \quad a_{31} = \frac{\partial z}{\partial u};$$

$$a_{12} = \frac{\partial x}{\partial v}; \quad a_{22} = \frac{\partial y}{\partial v}; \quad a_{32} = \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$a_{13} = \frac{\partial x}{\partial w}; \quad a_{23} = \frac{\partial y}{\partial w}; \quad a_{33} = \frac{\partial z}{\partial w}.$$

Таким образом, коэффициенты в соотношении объемов можно представить в виде

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{array} \right| = J.$$

Можно сказать, что это якобиан данного преобразования. Таким образом, соотношение объемов соответствующих типовых ячеек можно переписать так:

$$V_0 = |J| \tilde{V}_0.$$

Обратимся теперь к интегралам. По-прежнему полагаем, что между пространствами  $Oxyz$  и  $\tilde{O}uvw$  установлено соответствие, определяемое функциями

$$\begin{aligned}x(u, v, w) &= a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w; \\y(u, v, w) &= a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w; \\z(u, v, w) &= a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w.\end{aligned}$$

По-прежнему оба пространства соответствующими каркасами разбиты на ячейки. Будем полагать для определенности, что разбиение пространства  $\tilde{O}uvw$  представляет собой кубильяж с ребром ячейки  $\Delta u = \Delta v = \Delta w = \frac{1}{n}$ ,  $n \in N$ . Пусть  $[V]$  и  $[\tilde{V}]$  — отображающиеся друг на друга стандартные или обобщенные стандартные области, и на области  $[V]$  определена непрерывная функция  $f(x, y, z)$ .

Ее интеграл по области  $[V]$  выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\int \int \int_{[V]} f(x, y, z) dx dy dz &= \\&= \int \int \int_{[\tilde{V}]} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.\end{aligned}$$

Для доказательства ячейки, оказавшиеся внутри области  $[V]$ , пронумеруем и обозначим  $[V_k]$ . Соответствующие им ячейки в пространстве  $\tilde{O}uvw$  обозначим  $[\tilde{V}_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Произвольно выберем опорные точки  $M_k \in [V_k]$ , тем самым определим соответствующие  $\tilde{M}_k \in [\tilde{V}_k]$  и значения  $f(M_k) = f(x(\tilde{M}_k), y(\tilde{M}_k), z(\tilde{M}_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{m_n} f(M_k) V_k = \sum_{k=1}^{m_n} f(x(\tilde{M}_k), y(\tilde{M}_k), z(\tilde{M}_k)) |J| \tilde{V}_k.$$

В результате предельного перехода при  $k \rightarrow \infty$  получаем равенство соответствующих интегралов.

Если область  $[V]$  в пространстве  $Oxyz$  ограничена парами параллельных плоскостей, то подходящим линейным преобразованием она отображается на область  $[\tilde{V}]$  в пространстве  $\tilde{O}uvw$ , ограниченную параллелепипедом, грани которого параллельны координатным плоскостям. При переходе к повторным интегралам по таким областям все пределы интегрирования оказываются постоянными.

**Пример 1.** Область  $[V]$  ограничена плоскостями  $x + y - z = 0$ ,  $x + y - z = 1$ ,  $x - y + z = 1$ ,  $x - y + z = 2$ ,  $-x + y + z = 2$ ,  $-x + y + z = 3$ .

Ставится задача проинтегрировать по этой области функцию  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ . В этом примере непосредственный переход к повторному интегралу непрост, так как нелегко изобразить и даже вообразить особенности данной области. Однако по виду уравнений плоскостей можно сказать, что область  $[V]$  ограничена косоугольным параллелепипедом. Представляется перспективным следующее линейное преобразование:

$$\begin{cases} x + y - z = u, \\ x - y + z = v, \\ -x + y + z = w. \end{cases}$$

Оно переводит данные плоскости пространства  $Oxyz$  в плоскости  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 1$ ,  $v = 2$ ,  $w = 2$ ,  $w = 3$  пространства  $\tilde{O}uvw$ . Следовательно, при указанном преобразовании область  $[V]$  отображается на кубическую область  $[\tilde{V}]$ .

Теперь преобразуем интеграл

$$\iint_{[V]} (x + 2y + 3z) dx dy dz$$

к новым переменным интегрирования  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Сперва разрешаем систему относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Вычислим определитель системы по правилу Крамера

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

и еще три определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} u & 1 & -1 \\ v & -1 & 1 \\ w & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2u - 2v, \quad \begin{vmatrix} 1 & u & -1 \\ 1 & v & 1 \\ -1 & w & 1 \end{vmatrix} = -2u - 2w,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & u \\ 1 & -1 & v \\ -1 & 1 & w \end{vmatrix} = -2v - 2w.$$

Отсюда

$$x = \frac{-2u - 2v}{-4}, \quad y = \frac{-2u - 2w}{-4}, \quad z = \frac{-2v - 2w}{-4},$$

т.е

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + 0 \cdot w, \\ y = \frac{1}{2}u + 0 \cdot v + \frac{1}{2}w, \\ z = 0 \cdot u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w. \end{cases}$$

Якобиан линейного преобразования постоянен. В нашем случае

$$J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Подынтегральная функция преобразованного интеграла получается следующим образом. Полученные выражения переменных  $x, y, z$  подставляются в данную функцию. Ставится задача проинтегрировать по этой области функцию  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ , результат множится на модуль якобиана.

Итак,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) &= \\ &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) = \frac{3}{2}u + 2v + \frac{5}{2}w; \\ |J| &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \iint_{[V]} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \iint_{[\tilde{V}]} \left( \frac{3}{2}u + 2v + \frac{5}{2}w \right) \frac{1}{4} du dv dw.$$

Особенности этого примера побуждают к следующим действиям:

$$I = \frac{3}{8} \iint_{[\tilde{V}]} u du dv dw + \frac{1}{2} \iint_{[\tilde{V}]} v du dv dw + \frac{5}{8} \iint_{[\tilde{V}]} w du dv dw.$$

Проектируем область  $[V]$  по порядку на все координатные плоскости:  $\tilde{O}uv$ ,  $\tilde{O}uw$ ,  $\tilde{O}vw$ . Соответствующие проекции обозначим  $[S_1]$ ,  $[S_2]$ ,  $[S_3]$  (см. рис. 79). Это квадраты с единичной стороной, поэтому их площади равны единице.

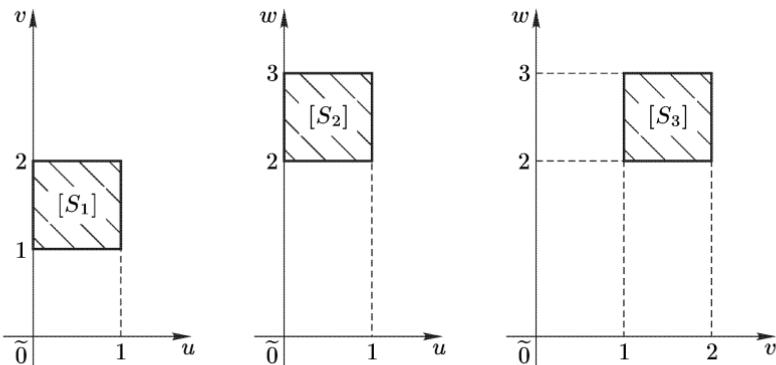


Рис. 79

Перейдем к повторным интегралам:

$$I = \frac{3}{8} \iint_{[S_3]} dv dw \int_0^1 u du + \frac{1}{2} \iint_{[S_2]} du dw \int_1^2 v dv + \frac{5}{8} \iint_{[S_1]} du dv \int_2^3 w dw.$$

Во всех повторных интегралах выполним внутреннее интегрирование, а двойные заменим площадями областей интегрирования:

$$I = \frac{3}{16} u^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{4} \cdot v^2 \Big|_1^2 + \frac{5}{16} w^2 \Big|_2^3.$$

Окончательно,  $I = \frac{5}{2}$ .

**3.2.2. Общая формула преобразования тройного интеграла к новым переменным интегрирования.** Рассматриваются пространства  $Oxyz$  и  $\tilde{O}uvw$  и функции

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$

Предполагается, что эта система устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками двух обобщенных стандартных областей:  $[V]$  в пространстве  $Oxyz$  и  $[\tilde{V}]$  в пространстве  $\tilde{O}uvw$ . Пусть также все девять частных производных данных функций непрерывны на области  $[\tilde{V}]$  и составленный из них определитель, называемый якобианом, отличен от нуля:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Интеграл непрерывной на области  $[V]$  функции  $f(x, y, z)$  преобразуется к новым переменным интегрирования  $u, v, w$  по формуле, которая приводится без доказательства:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{[V]} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int \int \int_{[\tilde{V}]} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned}$$

Заметим, что при переходе к новым переменным меняется не только область интегрирования, но и подынтегральная функция, что также приходится учитывать при определении метода интегрирования.

**3.2.3. Преобразование тройного интеграла к цилиндрическим координатам.** Цилиндрические координаты точки в пространстве введем с помощью декартовой системы координат  $Oxyz$  следующим образом. В плоскости  $Oxy$  введем полярные координаты, причем в качестве полярной

оси задействуем положительный луч оси  $Ox$ . Произвольно возьмем точку  $M(x, y, z)$ , спроектируем ее на плоскость  $Oxy$ , проекцию обозначим  $M_1(x, y, 0)$ . Пусть  $(r, \varphi)$  — ее полярные координаты. Напоминаем:  $r = |OM_1| \geq 0$  — полярный радиус,  $\varphi$  — полярный угол точки  $M_1$ , изменяется от 0 до  $2\pi$  или от  $-\pi$  до  $\pi$ .

Числа  $(r, \varphi, z)$  называются *цилиндрическими координатами* точки  $M$ . Их связь с декартовыми координатами этой точки очевидна (см. рис. 80):

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

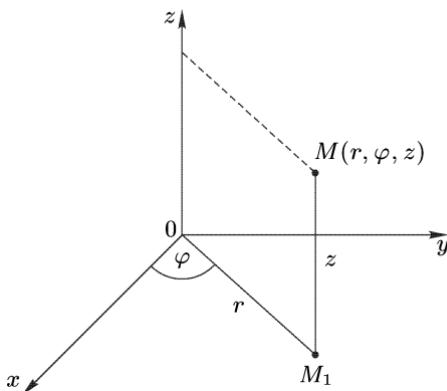


Рис. 80

Составим и вычислим якобиан:

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам можно выполнить по формуле

$$\iint\limits_{[V]} f(x, y, z) dx dy dz = \iint\limits_{[\tilde{V}]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Пример. Область  $[V]$  в пространстве  $Oxyz$  ограничена цилиндрами  $x^2 + y^2 = a_1^2$ ,  $x^2 + y^2 = a_2^2$  при  $0 < a_1 < a_2$  и плоскостями  $z = h_1$ ,  $z = h_2$  при  $h_1 < h_2$ .

Подынтегральная функция  $f(x, y, z) = \frac{x^2 z^2}{x^2 + y^2}$ .

При  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и  $\varphi$ , меняющемся от 0 до  $2\pi$ , уравнения цилиндрических поверхностей переходят в уравнения  $r = a_1$ ,  $r = a_2$ , уравнения плоскостей не меняются. Следовательно, данная область интегрирования  $[V]$  отображается на область  $[\tilde{V}]$ , имеющую форму параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям (см. рис. 81).

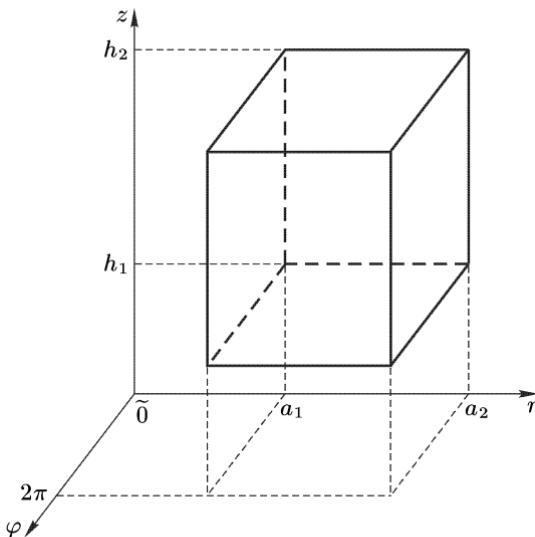


Рис. 81

Таким образом, интеграл

$$I = \iint\limits_{[V]} \frac{x^2 z^2}{x^2 + y^2} dx dy dz = \iint\limits_{[\tilde{V}]} \frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot z^2}{r^2} r dr d\varphi dz$$

преобразуется в трехкратный интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_{a_1}^{a_2} r dr \int_{h_1}^{h_2} z^2 dz.$$

Вычмслим отдельно интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Таким образом,

$$I = \pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_{a_1}^{a_2} \cdot \frac{1}{3} z^3 \Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{\pi}{6} (a_2^2 - a_1^2) (h_2^3 - h_1^3).$$

Заметим, что в нашем примере, а также и в некоторых других случаях, пределы в преобразованном интеграле можно получить при умелом использовании особенностей исходной области интегрирования  $[V]$  без построения области  $[\tilde{V}]$ . Здесь мог бы оказаться полезным практический опыт преобразования двойного интеграла к полярным координатам.

**3.2.4. Преобразование тройного интеграла к сферическим координатам.** Сферические координаты используются в астрономии, в многочисленных системах слежения за воздушными и космическими объектами и т. д. Сферическими по существу являются привычные нам географические координаты.

Мы введем сферические координаты точки в пространстве, полагая, что в нем имеется декартова система координат  $Oxyz$ . Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка пространства, а  $M_1(x, y, 0)$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $Oxy$ . В качестве первой координаты возьмем расстояние от начала координат до этой точки:  $\rho = |OM|$ . Вторая координата  $\varphi$  (как в полярной системе координат) — радианная мера угла между лучом  $OM_1$  и положительным лучом оси  $Ox$ . Будем полагать, что  $\varphi$  меняется от  $-\pi$  до  $\pi$  или от 0 до  $2\pi$ . Третью координату  $\theta$  введем по аналогии с географической широтой с помощью меры  $\alpha$  угла  $\angle MOM_1$ . При  $z \geq 0$ , т. е. когда точка  $M$  находится в верхнем полупространстве, полагаем  $\theta = \alpha$  и  $\theta = -\alpha$  при  $z < 0$ . Следовательно,  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Числа  $(\rho, \varphi, \theta)$  будем называть сферическими координатами точки  $M$ . Их связь с декартовыми координатами этой точки выражается следующим образом (см. рис. 82):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

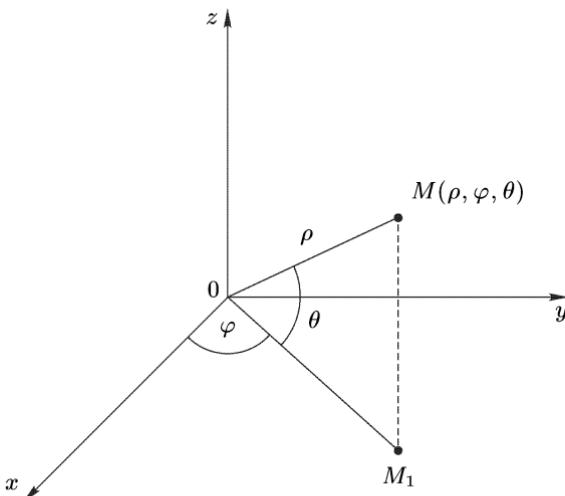


Рис. 82

Вычислим якобиан

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -\rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ -\rho \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Общие множители элементов второй и третьей строки вынесем за знак определителя. В результате получаем

$$\begin{aligned} J &= \rho^2 \cos \theta \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= \rho^2 \cos \theta [\sin \theta (\sin \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \varphi) + \\ &+ \cos \theta (\cos \theta \cos^2 \varphi + \cos \theta \sin^2 \varphi)] = \rho^2 \cos \theta [\sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \\ &+ \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)] = \rho^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Таким образом, якобиан преобразования декартовых координат к сферическим вычислен. Итак,

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \cos \theta.$$

*Преобразовать тройной интеграл к сферическим координатам можно по формуле*

$$\begin{aligned} \iint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iint_{\tilde{V}} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta) \rho^2 \cos \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

При использовании этой формулы могут оказаться полезными следующие наблюдения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \theta.$$

Отсюда, в частности, следует, что уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  переходит в уравнение  $\rho = a$ , а уравнение конуса  $z = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$  — в уравнение  $\rho \sin \theta = \lambda \rho \cos \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \lambda$  и т. п.

Пример 1. Вычислим интеграл  $I = \iint_V z dx dy dz$ , если

$[V]$  есть расположенная в первом координатном октанте часть сферического слоя  $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ ,  $0 < a < b$ .

Преобразованная область  $\tilde{V}$  в пространстве  $\tilde{\rho} \varphi \theta$  ограничена прямоугольным параллелепипедом. Выпишем уравнения его граней:  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\rho = a$ ,  $\rho = b$ .

Таким образом,

$$I = \iiint_{[V]} z \, dx dy dz = \iiint_{[\tilde{V}]} \rho \sin \theta \rho^2 \cos \theta \, d\rho d\varphi d\theta.$$

В этом примере порядок интегрирования в повторном интеграле может быть любым, поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_a^b \rho^3 \, d\rho = \\ &= \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_a^b = \frac{\pi}{16} (b^4 - a^4). \end{aligned}$$

Заметим, что при некоторых условиях, в частности в этом примере, пределы интегрирования в преобразованном интеграле определяются по исходной области  $[V]$ . Иными словами, данный тройной интеграл при переходе к сферическим координатам можно представить в виде

$$\begin{aligned} \iiint_{[V]} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \cos \theta \, d\theta \times \\ &\times \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta) \rho^2 \, d\rho. \end{aligned}$$

Обоснование этой формулы, а также методика определения пределов интегрирования опираются на следующие наблюдения.

Сначала о пределах интегрирования по переменной  $\rho$ . Представим себе в пространстве  $Oxyz$  область  $[V]$  и всевозможные исходящие из начала координат лучи, пересекающие эту область. Будем полагать, что пересечения этих лучей с областью представляют собой отрезки. А теперь давайте посмотрим, во что эта модель трансформируется при переходе от декартовых координат к сферическим. Заметим, что каждому лучу соответствует, и притом взаимно однозначно, пара значений  $(\varphi, \theta)$ . Таким образом, данная область  $[V]$  и пучок пересекающих ее лучей определяют в координатной плоскости  $\tilde{O}\rho\varphi$  декартовой системы  $\tilde{O}\rho\varphi\theta$  некую область  $[\tilde{S}]$  и на ней две функции  $\rho_1(\varphi, \theta) \leq \rho_2(\varphi, \theta)$ .

Функции определяются так. Пусть через произвольную точку  $M \in [V]$  проходит луч  $OM$  и отрезок  $[M_1 M_2]$  — его пересечение с областью  $[V]$ . Будем считать, что лучу соответствует числовая пара  $(\varphi, \theta)$  и что точка  $M_1$  ближе к началу координат, чем точка  $M_2$ . Тогда  $\rho_1(\varphi, \theta) = |OM_1|$ , а  $\rho_2(\varphi, \theta) = |OM_2|$ . Ясно, что  $0 \leq \rho_1(\varphi, \theta) \leq \rho_2(\varphi, \theta)$ . Графики этих функций в пространстве  $\tilde{\rho} \varphi \theta$  вместе с цилиндрической поверхностью, проведенной через границу области  $[\tilde{S}]$  параллельно оси  $\tilde{\rho}$ , ограничивают объемную область  $[\tilde{V}]$ . Правая часть формулы представляет собой результат преобразования интеграла

$$\int \int \int_{[\tilde{V}]} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta) \rho^2 \cos \theta d\varphi d\theta d\rho$$

к трехкратному интегралу. Чтобы получить пределы интегрирования по  $\rho$ , изучается граница данной области  $[V]$ . Для определения  $\rho_1(\varphi, \theta)$  берется та ее часть, которая обращена к началу координат. Она состоит из точек входа лучей в данную область. Выписывается ее уравнение в координатах  $x, y, z$ , в которое подставляются выражения

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Получившееся равенство разрешается относительно  $\rho$ . Если начало координат принадлежит данной области, то полагаем  $\rho_1(\varphi, \theta) \equiv 0$ . Функция  $\rho_2(\varphi, \theta)$  определяется аналогично, т. е. в уравнении поверхности, составленной из точек выхода лучей из области, также переходим к сферическим координатам. Результат разрешается относительно  $\rho$ .

Чтобы определить пределы интегрирования по переменным  $\theta$  и  $\varphi$  без построения области  $[\tilde{V}]$ , представим себе, что область  $[V]$  рассечена всевозможными полуплоскостями с общей границей, совпадающей с осью  $Oz$ . Вообразим сечение области  $[\tilde{V}]$  полуплоскостью, составляющей угол  $\varphi$  с положительным лучом оси  $Ox$ , а также угол с вершиной в начале координат, в который это сечение вписано. Определяются углы  $\theta_1(\varphi) \leq \theta_2(\varphi)$  наклона сторон этого угла к плоскости  $Oxy$ , которые и являются пределами интегрирования по переменной  $\theta$ .

Пределы интегрирования по  $\varphi$  определяются положением полуплоскостей, составляющих двугранный угол, в который вписана данная область  $[V]$ . Точнее,  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  — концы промежутка всевозможных значений  $\varphi$ , при которых сечения области соответствующими полуплоскостями непусты.

Рассмотрим еще один пример.

**Пример 2.** Вычислим интеграл функции  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  по кольцу  $[V]$ , которое определим системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \\ z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \\ z \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Снизу кольцо ограничено плоскостью  $z = 1/2$ , с внутренней стороны, т. е. со стороны оси  $Oz$ , — конусом с вершиной в начале координат и образующими, наклоненными к плоскости  $Oxy$  под углом  $\pi/3$ . Наружная граница — часть сферы с центром в точке  $(0; 0; 1)$  и радиусом 1. Сечение кольца плоскостью  $Oxy$  см. на рис. 83. Само кольцо получается вращением этого сечения вокруг оси  $Oz$ . В интеграле

$$I = \iint_{[V]} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

перейдем к сферическим координатам. Уравнение плоскости  $z = 1/2$  переходит в уравнение

$$\rho \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2 \sin \theta}.$$

Уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  преобразуется следующим образом:

$$\rho^2 = 2\rho \sin \theta \Rightarrow \rho = 2 \sin \theta.$$

В том и другом случае  $\rho$  не зависит от  $\varphi$ , что естественно, так как  $[V]$  является телом вращения с осью  $Oz$ . Координата  $\theta$

у всех точек пересечения сферы с плоскостью одна и та же и определяется из системы

$$\begin{cases} \rho = 2 \sin \theta, \\ \rho = \frac{1}{2 \sin \theta} \end{cases} \Rightarrow 2 \sin \theta = \frac{1}{2 \sin \theta} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{4}.$$

Поскольку  $\sin \theta \geqslant 0$ , величина  $\theta$  является корнем уравнения  $\sin \theta = 1/2$ , следовательно,  $\theta = \pi/6$ . Теперь можно сказать, что при произвольном  $\theta \in [-\pi, \pi]$  сечение кольца  $[V]$  соответствующей полуплоскостью является фигурой, вписанной в угол с вершиной в начале координат и сторонами, составляющими с плоскостью  $Oxy$  углы  $\pi/6$  и  $\pi/3$ . Они представляют собой пределы интегрирования по переменной  $\theta$ . При каждом  $\theta \in [\pi/6, \pi/3]$  величина  $\rho$  меняется от  $\frac{1}{2 \sin \theta}$  до  $2 \sin \theta$  (см. рис. 84).

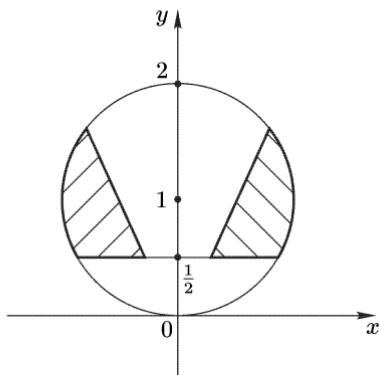


Рис. 83

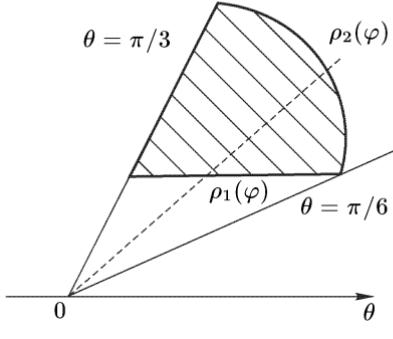


Рис. 84

Таким образом, все подготовлено для расстановки пределов в повторном интеграле в сферических координатах. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta}} = \frac{1}{\rho \cos \theta}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \int_{1/2 \sin \theta}^{2 \sin \theta} \frac{\rho^2 \cos \theta}{\rho \cos \theta} d\rho = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta \int_{1/2 \sin \theta}^{2 \sin \theta} \rho d\rho = \varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_{1/2 \sin \theta}^{2 \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

В результате преобразований получаем

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left( 4 \sin^2 \theta - \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right) d\theta = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left( 2 - 2 \cos 2\theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right) d\theta = 2\pi \theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \pi \sin 2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{1}{4} \pi \operatorname{ctg} \theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi.$$

## § 3.3. Некоторые приложения тройного интеграла

**3.3.1. Объем и масса тела.** Формула для вычисления объема стандартной области,

$$V = \iint_{[S]} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy,$$

приведена в п. 2.3.3. Она является очевидным следствием формулы, приведенной в п. 3.1.3:

$$V = \iiint_{[V]} dx dy dz.$$

В некоторых случаях именно эта формула дает наиболее удобный способ вычисления объема.

Пример 1. Область  $[V]$  определена системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq z, \\ z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}. \end{cases}$$

Тройной интеграл по этой области преобразуем к сферическим координатам следующим образом:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

$$J = \rho^2 \cos \theta.$$

Уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  переходит в уравнение  $\rho = \sin \theta$ . Образующие конуса наклонены к плоскости  $Oxy$  под углом  $\frac{\pi}{3}$ . Следовательно,

$$V = \iiint_{[V]} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \cos \theta d\theta \int_0^{\sin \theta} \rho^2 d\rho = \frac{3\pi}{32}.$$

*Масса тела.* Если тело представляет собой материальный объект и вещества, из которого оно состоит, имеет постоянную плотность  $\gamma = \text{const}$ , то масса пропорциональна объему тела, т. е.

$$m = \gamma V.$$

Когда же плотность  $\gamma$  как функция точки  $M \in [V]$  непостоянна, масса обычно определяется следующим образом. Тело  $[V]$  условно разбивается на части  $[V_k]$ , в каждой  $[V_k]$  фиксируется точка  $M_k$ . Предполагается, что масса  $[V_k]$ , приближенно равная  $\gamma(M_k)V_k$ , сосредоточена в этой точке,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Сумма всех таких условно точечных масс приближенно приравнивается массе всего тела, т. е.

$$m \approx \sum_{k=1}^n \gamma(M_k)V_k.$$

Точное выражение массы получается в результате предельного перехода при условии, что  $n$  неограниченно растет и диаметры

всех частей стремятся к нулю, т. е.

$$m = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \gamma(M_k) V_k,$$

где  $\Delta_k = \max d_k$ ,  $d_k$  — диаметр  $[V_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

При наличии в пространстве координатной системы  $Oxyz$  тело  $[V]$  задается обычными математическими средствами: плотность  $\gamma$  в этом случае оказывается функцией трех переменных  $x, y, z$ , а ее тройной интеграл — массой тела. Таким образом,

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Пример 2.  $[V]$  — шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ,  $\gamma(M)$  численно равна расстоянию от точки  $M \in [V]$  до начала координат, т. е.

$$\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Вычислим массу шара:

$$m = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

После перехода к сферическим координатам получаем

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \pi a^4.$$

**3.3.2. Координаты центра масс и статические моменты.** Будем полагать, что в пространстве  $Oxyz$  находится материальное тело  $[V]$  и  $\gamma(M) = \gamma(x, y, z)$  — его плотность.

Вывод формул для вычисления координат центра масс и в этом случае строится на имитации тела системой точечных масс (см. вывод формулы массы тела в п. 3.3.1). Напомним, что для системы точечных масс  $m_k$ , помещенных в точки  $M_k$  с координатами  $(x_k, y_k, z_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , координаты центра

масс выражаются следующим образом:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Тело  $[V]$  разбивается на части  $[V_k]$ , в точках  $M_k \in [V_k]$  помещаются массы  $\gamma(M_k)V_k$ , и по указанным формулам формируются приближенные значения искомых координат:

$$x_C \approx \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma(M_k)V_k}{\sum_{k=1}^n \gamma(M_k)V_k}, \quad y_C \approx \frac{\sum_{k=1}^n y_k \gamma(M_k)V_k}{\sum_{k=1}^n \gamma(M_k)V_k}, \quad z_C \approx \frac{\sum_{k=1}^n z_k \gamma(M_k)V_k}{\sum_{k=1}^n \gamma(M_k)V_k}.$$

Точные значения координат получаются в результате предельного перехода при условии, что  $n \rightarrow \infty$  и диаметры всех частичных областей стремятся к нулю.

Пределы числителей и знаменателей приведенных дробей являются тройными интегралами. В частности, в знаменателе — масса тела  $[V]$

$$\iiint_{[V]} \gamma(x, y, z) dx dy dz = m.$$

Таким образом,

$$x_C = \frac{\iiint_{[V]} x \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad y_C = \frac{\iiint_{[V]} y \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m},$$

$$z_C = \frac{\iiint_{[V]} z \gamma(x, y, z) dx dy dz}{m}.$$

Интегралы в чисителях — так называемые статические моменты тела  $[V]$  относительно координатных плоскостей  $Oyz$ ,  $Oxz$ ,  $Oxy$  соответственно.

Пример. Однородное тело  $[V]$  имеет форму пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $x + y + z = 1$ .

По условию его плотность  $\gamma$  постоянна. Определим массу, статические моменты и координаты центра масс этого тела.

Масса тела равна

$$m = \gamma V = \frac{1}{6} \gamma.$$

Статический момент относительно плоскости  $Oxy$  имеет вид

$$S_{xy} = \iint_V z \gamma \, dx dy dz = \gamma \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z \, dz = \frac{1}{24} \gamma.$$

Вычисления двух других статических моментов дают тот же результат, т. е.

$$S_{yz} = S_{xz} = \frac{1}{24} \gamma,$$

о чём в нашем конкретном случае можно догадаться и без вычислений. Следовательно,

$$x_C = y_C = z_C = \frac{\frac{1}{24} \gamma}{\frac{1}{6} \gamma} = \frac{1}{4}.$$

Итак, масса тела  $m = \frac{1}{6} \gamma$ , статические моменты  $S_{xy} = S_{yz} = S_{xz} = \frac{1}{24} \gamma$ , координаты центра масс  $C \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$ .

**3.3.3. Моменты инерции.** Здесь приведены готовые формулы. Основой вывода служит все та же дискретная модель с последующим предельным переходом (см. п.п. 3.3.1, 3.3.2).

Момент инерции тела относительно точки можно вычислить по формуле

$$I_O = \iint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma \, dx dy dz.$$

Начало координатной системы  $Oxyz$  помещено в указанную точку,  $[V]$  — часть пространства, т. е. область, которую занимает данное материальное тело с заданной плотностью  $\gamma(x, y, z)$ .

Момент инерции относительно оси:

$$I_z = \iint_V (x^2 + y^2) \gamma \, dx dy dz.$$

Здесь ось совмещена с осью  $Oz$  координатной системы.

Пример. Вычислим моменты инерции шара относительно центра и диаметра при условии, что плотность постоянна.

Для решения этой задачи будем полагать, что начало координат  $Oxyz$  совпадает с центром шара, т. е.  $[V]$  определяется неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

В обоих случаях интеграл преобразуется к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

$$J = \rho^2 \cos \theta.$$

Вычислим момент инерции  $[V]$  относительно точки  $O(0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} I_O &= \iiint_{[V]} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma \, dx \, dy \, dz = \\ &= \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_0^a \rho^4 \, d\rho = \frac{4}{5} \gamma \pi a^5. \end{aligned}$$

Момент инерции  $[V]$  относительно  $Oz$  равен

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{[V]} (x^2 + y^2) \cdot \gamma \cdot dx \, dy \, dz = \\ &= \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta \int_0^a \rho^4 \, d\rho = \frac{8}{15} \gamma \pi a^5. \end{aligned}$$

### § 3.4. Задания для упражнений

1. Дайте определение интегральной суммы функции трех переменных.
2. Дайте определение интегрируемости и тройного интеграла функции трех переменных.

3. Сформулируйте основные свойства тройных интегралов.
4. Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении применительно к тройному интегралу.
5. Укажите этапы преобразования тройного интеграла к повторному.
6. Опишите правило перехода в тройном интеграле к новым переменным интегрирования.
7. Опишите процедуру перехода в тройном интеграле к цилиндрическим координатам.
8. Опишите процедуру перехода в тройном интеграле к сферическим координатам.
9. Напишите формулы для вычисления массы и координат центра масс, а также формулы для вычисления статических моментов и моментов инерции материального тела  $[V]$ .

*Вычислите выражения.*

$$10. \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz. \quad 11. \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^3 z \cdot dz.$$

*Вычислите интегралы.*

12.  $\iiint_{[V]} x^2 yz \, dxdydz$ , где  $[V]$  — тело, ограниченное плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z - 2 = 0$ .
13.  $\iiint_{[V]} y \cos(z + x) \, dxdydz$ , где  $[V]$  — область, ограниченная цилиндром  $y = \sqrt{x}$  и плоскостями  $y = 0, z = 0, x + z = \frac{\pi}{2}$ .
14.  $\iiint_{[V]} 2y^2 e^{xy} \, dxdydz$ , где  $[V]$  — тело, ограниченное плоскостями  $x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 1$ .
15.  $\iiint_{[V]} (15x + 30y) \, dxdydz$ , где  $[V]$  — тело, ограниченное параболоидом  $z = x^2 + 3y^2$  и плоскостями  $y = 0, y = x, z = 0, x = 1$ .

16.  $\iiint_V z \, dx dy dz$ , если область  $[V]$  задана системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \\ 3z \geq x^2 + y^2. \end{cases}$$

Напоминаем, что информацию о геометрическом объекте, заданном в пространстве  $Oxyz$ , можно получить следующим образом. Во-первых, неравенства заменяются уравнениями. Изучаются и по возможности изображаются соответствующие поверхности. Они разбивают пространство на части, которые как-то регистрируются, например нумеруются. Во-вторых, в каждой части выбираются пробные точки, их координаты подставляются в исходную систему неравенств. Интересующая нас область  $[V]$  составляется из тех частей, точки которых удовлетворяют исходным неравенствам.

*Вычислите объемы тел, ограниченных следующими поверхностями.*

17. Цилиндрами  $z = 4 - y^2$ ,  $z = y^2 + 2$  и плоскостями  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

18. Параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = x + y$ .

19. Параболоидами  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$ , плоскостью  $y = x$  и цилиндром  $y = x^2$ .

*В интеграле  $\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz$  перейдите к цилиндрическим координатам и расставьте пределы интегрирования в соответствующих повторных интегралах, если область  $[V]$  задана следующими поверхностями.*

20. Цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$  и плоскостями  $z = 1$ ,  $z = 5$ .

21. Цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$ , параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 5$ .

22. Цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$ , параболоидом  $z = x^2 + y^2 - 4$  и плоскостью  $x + y + 4z - 4 = 0$ .

23. Цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$  и плоскостями  $z = 0$ ,  $z = 5$ .

Вычислите интегралы с помощью перехода к цилиндрическим координатам.

24.  $\int \int \int_{[V]} \left( x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy dz$ , где  $[V]$  — тело, определяемое неравенствами  $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x \geqslant 0$ ,  $y \geqslant 0$ ,  $z \leqslant 1$ . Расставьте пределы интегрирования в повторном интеграле в прямоугольной системе координат, затем перейдите в исходном интеграле к цилиндрическим координатам. Какой из вариантов будет более удобен при вычислении интеграла?

25. Определите объем тела, ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ .

26.  $\int \int \int_{[V]} (x^2 + y^2) dx dy dz$ , где область  $[V]$  ограничена парaboloidом  $2z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 2$ .

цилиндром  $x^2 + z^2 = 1$  и плоскостями  $y = 0$ ,  $y = 1$ .

28. Вычислите объем тела, заданного системой  $x^2 + y^2 \leqslant 2y$ ,  $z \geqslant 0$ ,  $z \leqslant 1$ ,  $y \geqslant x$ .

Вычислите интегралы с помощью перехода к сферическим координатам.

29. В интеграле  $\int \int \int_{[V]} f(x, y, z) dx dy dz$  перейдите к сферическим координатам и расставьте пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле, если  $[V]$  — общая часть двух шаров:  $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$  и  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leqslant R^2$ .

30. Вычислите интеграл  $\int \int \int_{[V]} x^2 dx dy dz$ , где область  $[V]$  — шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ .

31. Вычислите интеграл  $\int \int \int_{[V]} (x^2 + y^2) dx dy dz$ , если область  $[V]$  определяется системой

$$\begin{cases} r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

32. Вычислите интеграл  $\int \int \int_{[V]} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , если

тело  $[V]$  ограничено плоскостью  $z = 0$  и полусферой  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Расставьте пределы интегрирования в повторном интеграле в прямоугольной системе координат, затем перейдите в исходном интеграле к сферическим координатам. Какой из вариантов более удобен при вычислении интеграла?

33. Найдите объем тела  $[V]$ , определяемого неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 - 8z \leq 0$ .

34. Вычислите объем тела  $[V]$ , заданного системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \\ z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}. \end{cases}$$

35. Вычислите объем тела, определяемого неравенствами  $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 < a < b$ ).

*Вычислите массу тел.*

36. Вычислите массу шара с центром в начале координат и радиусом  $R$ , если плотность вещества, из которого изготовлен шар, определяется функцией  $\gamma = x^2$ .

37. Вычислите массу тела, ограниченного параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостями  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , если плотность вещества в каждой точке тела определяется функцией  $\gamma = \frac{1+2z}{1+x^2+y^2}$ .

38. Найдите массу тела, заданного системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ z \geq 0, \end{cases}$$

если плотность вещества, из которого это тело изготовлено, равна  $\gamma = 2z$ .

39. Вычислите массу внутренней части конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ограниченного сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , если плотность вещества в каждой точке равна аппликате этой точки.

40. Определите массу сферического слоя

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, \end{cases}$$

если плотность вещества  $\gamma$  в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до начала координат.

## Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Теория поля сформировалась на стыке векторной алгебры и математического анализа. Она во многом определяет математический язык, с помощью которого описываются многие явления в самых разных областях современной физики. Предметом исследования и описания в теории поля служат так называемые скалярные и векторные поля.

Говорят, что на множестве  $D$  пространства определено *скалярное поле*  $\Phi$ , если в каждой точке  $M \in D$  задано определенное числовое значение  $\Phi(M)$ . Скалярными полями являются: плотность вещества, составляющего материальное тело  $D$ ; температура в заданной точке пространства; плотность электрического заряда и т. д.

Полагают, что на множестве  $D$  определено *векторное поле*  $\mathbf{R}$ , если каждой точке  $M \in D$  поставлен в соответствие вектор  $\mathbf{R}(M)$ . Таковым, например, является поле скоростей движущегося газа. Векторными полями являются всевозможные силовые поля: гравитационное, электрическое, магнитное и т. д.

При наличии координатной системы  $Oxyz$ , что обычно предполагается, скалярное поле представляет собой функцию трех переменных:  $\Phi(M) = \Phi(x, y, z)$ . Задание на множестве  $D$  векторного поля равносильно определению на этом множестве трех функций  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  в каждой точке  $M$  с координатами  $(x, y, z)$  множества  $D$ , их значения служат координатами вектора  $\mathbf{R}(x, y, z)$ , т. е.

$$\mathbf{R}(M) = \mathbf{R}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k},$$

короче,

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}.$$

Примером служит векторное поле градиента. По определению

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

При непрерывности частных производных градиент функции в заданной точке является нормальным вектором проходящей

через эту точку поверхности уровня функции. Поверхностью уровня функции трех переменных называется множество всех точек области определения функции, на котором функция принимает одно и то же значение.

## § 4.1. Криволинейные интегралы

**4.1.1. Гладкая дуга.** В криволинейных интегралах геометрическим объектом, по которому интегрируется функция, является дуга, определяемая параметризацией, т. е. тройкой функций  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \eta(t)$  и промежутком  $[\alpha, \beta]$  значений параметра  $t$ . Параметризация также используется и в форме линейной комбинации единичных векторов координатных осей:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \eta(t)\mathbf{k}.$$

Предполагается, что параметризация устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками дуги  $[L]$  и отрезка  $[\alpha, \beta]$  значений параметра  $t$ . Заметим, что такая дуга не имеет самопересечений.

Дуга  $[L]$  называется *гладкой*, если существует ее параметризация  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \eta(t)$ , такая что на отрезке  $[\alpha, \beta]$  существуют и непрерывны производные  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\eta'(t)$ , причем

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\eta'(t))^2 > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| > 0$$

при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Напомним, что  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  — вектор касательной к дуге. Его направление указывает направление движения точки  $M \in [L]$  при возрастании параметра  $t \in [\alpha, \beta]$ .

Гладкая дуга имеет длину, т. е. спрямляема (доказательство, а также определение длины дуги см. во введении). Длину дуги будем обозначать той же буквой, что и дугу, но без скобок. Таким образом,  $L$  — длина дуги  $[L]$ .

На спрямляемой дуге вводится так называемый естественный параметр  $s$  — дуговая координата точки  $M(s) \in [L]$  — и соответствующая естественная параметризация  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,

$z = z(s)$ , или

$$\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

На рис. 85 вектор касательной к дуге  $[L]$  изображает единичный вектор  $\tau^0(s)$ :

$$\tau^0(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

$$|\tau^0(s)| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1 \Rightarrow |ds| = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

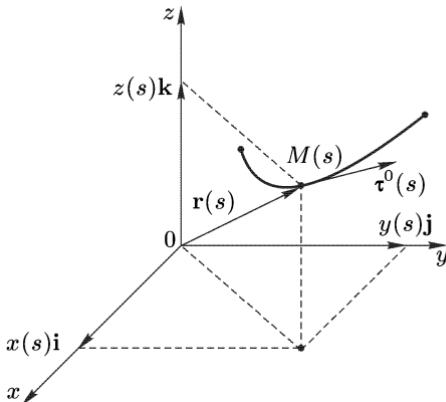


Рис. 85

Наличие двух параметризаций дуги  $[L]$ , натуральной  $\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$  и какой-нибудь другой  $\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \eta(t)\mathbf{k}$ , определяет функциональную зависимость  $s = s(t)$ . При этом

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\eta'(t))^2}.$$

При знаке плюс  $s(t)$  возрастает, а при знаке минус — убывает.

Ниже используются лишь гладкие дуги или так называемые кусочно гладкие, т. е. дуги, составленные из гладких частей.

**4.1.2. Интеграл по дуге (криволинейный интеграл I рода).** Будем полагать, что гладкая дуга  $[L]$  находится в области определения функции  $f(x, y, z) = f(M)$  и что функция непрерывна на этой дуге. Согласно определению сначала составляется криволинейная интегральная сумма данной функции, т. е. дуга  $[L]$  разбивается на  $n$  частей  $[L_k]$ , фиксируются точки  $M_k \in [L_k]$

и определяются значения  $f(M_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Затем составляется сумма произведений значений функции на длины соответствующих частичных дуг:

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) L_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) L_k.$$

Здесь  $L_k$  — длина дуги  $[L_k]$ .

*Криволинейным интегралом I рода* называется предел этой интегральной суммы при условии, что  $n \rightarrow \infty$  и  $\max L_k \rightarrow 0$ . Обратите внимание на то, что в определении использована лишь спрямляемость дуги  $[L]$ , следовательно, интеграл не зависит от выбора параметризации этой дуги. Введем обозначение и повторим определение интеграла по дуге:

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y, z) ds &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max L_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(M_k) L_k = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max L_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) L_k. \end{aligned}$$

*Вычисление криволинейного интеграла I рода* можно выполнить по формуле

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y, z) ds &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\eta'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha < \beta$ ,  $(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))$  — параметризация дуги  $[L]$ ,  $t$  меняется от  $\alpha$  до  $\beta$ .

Для доказательства введем на дуге  $[L]$  естественный параметр, так чтобы при возрастании  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  величина  $s = s(t)$  менялась от 0 до  $L$ . Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) L_k,$$

задействуем дуговые координаты  $s_k$  опорных точек  $M_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , и перепишем криволинейную сумму:

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) L_k = \sum_{k=1}^n f(x(s_k), y(s_k), z(s_k)) L_k.$$

Получилась интегральная сумма функции  $f(x(s), y(s), z(s))$ . Мы как бы спрямили дугу  $[L]$  и вместе с разбиением уложили ее на числовую ось в форме отрезка  $[0, L]$ . В результате предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$  и  $\max L_k \rightarrow 0$  получаем равенство интегралов

$$\int_{[L]} f(x, y, z) ds = \int_0^L f(x(s), y(s), z(s)) ds.$$

Путем перехода в последнем интеграле к переменной интегрирования  $t$  получаем

$$\begin{aligned} \int_{[L]} f(x, y, z) ds &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\eta'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Пример. Проинтегрировать функцию  $f(x, y, z) = x + y + z$  по витку винтовой линии

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \end{cases}$$

$t$  меняется от 0 до  $2\pi$ .

Согласно последней формуле

$$\begin{aligned} \int_{[L]} (x + y + z) ds &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \\ &= \sqrt{2} \left( \sin t - \cos t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Замечание.** Если дуга  $[L]$  представляет собой материальный объект, например кусок проволоки, и функция  $f(x, y, z)$ , равная  $\gamma(M)$ , — ее линейная плотность, то

$$\int_{[L]} \gamma(x, y, z) ds = m,$$

где  $m$  — масса дуги.

Если подынтегральная функция представляет собой плотность электрического заряда, то соответствующий интеграл выражает полный заряд данного проводника и т. д.

*Криволинейный интеграл по кусочно гладкой дуге* равен по определению сумме интегралов по гладким частям. Пусть, например, кусочно гладкая дуга  $[L]$  — треугольник  $\Delta ABC$ . В этом случае гладкими дугами являются отрезки:  $[L_1] = [AB]$ ,  $[L_2] = [BC]$ ,  $[L_3] = [CA]$ . Криволинейный интеграл I рода в этом случае представляется в виде

$$\begin{aligned} \int_{[L]} f(x, y, z) ds &= \int_{[AB]} f(x, y, z) ds + \\ &\quad + \int_{[BC]} f(x, y, z) ds + \int_{[CA]} f(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

В этом случае направление сторон значения не имеет.

**4.1.3. Циркуляция векторного поля. Криволинейный интеграл II рода.** Циркуляция векторного поля по направленной дуге  $[L]$  определяется следующим образом. Пусть на дуге  $[L]$  определено векторное поле  $\mathbf{R}(M)$ , кроме того, на дуге задано направление. Таким образом, можно говорить о начале и конце данной дуги. Обозначим их соответственно  $M_0$  и  $M_L$ , саму направленную дугу обозначим  $[L]$ . Введем естественный параметр  $s$  так, чтобы при возрастании  $s$  от 0 до  $L$  точка  $M(s)$  двигалась от  $M_0$  до  $M_L$ . Соответственно введем  $\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$ . Нам понадобится  $\tau^0 = \tau^0(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  — единичный вектор касательной к дуге  $[L]$ . Напомним, что он указывает направление движения точки по дуге при возрастании  $s$  (см. рис. 86).

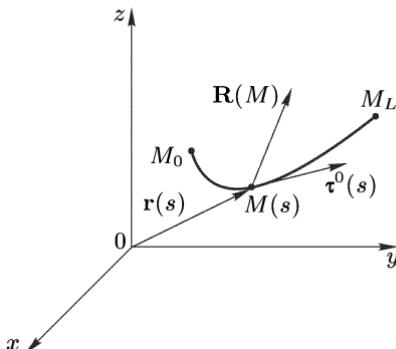


Рис. 86

Определение. Циркуляцией векторного поля  $\mathbf{R}$  по дуге  $[L]$  будем называть криволинейный интеграл

$$A = \int_{[L]} (\mathbf{R}, \tau^0) ds.$$

Скалярное произведение приложенных в точке  $M(s) \in [L]$  векторов  $\mathbf{R}$  и  $\tau^0$  представляет собой проекцию вектора  $\mathbf{R}$  на касательную к дуге  $[L]$  в точке  $M(s)$ .

Заметим, что при изменении направления дуги циркуляция векторного поля меняет знак, так как при этом направление единичного вектора касательной меняется на противоположное, вследствие чего меняется знак подынтегральной функции.

Обозначения циркуляции приводим вместе с определением:

$$\int_{[L]} (\mathbf{R}, \tau^0) ds = \int_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[L]} X dx + Y dy + Z dz.$$

Информация об ориентации, т. е. о направлении дуги, в определениях явно выражается вектором  $\tau^0$ . В обозначениях она присутствует неявно, поэтому в них используется обозначение ориентированной дуги  $[L]$ . Формальная связь обозначений с определением циркуляции представляется следующим образом:

$$(\mathbf{R}, \tau^0) ds = (\mathbf{R}, \tau^0 ds) = (\mathbf{R}, d\mathbf{r}) = \mathbf{R} d\mathbf{r},$$

так как  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  и  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ , то

$$(\mathbf{R}, d\mathbf{r}) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Напоминаем, что координатами вектора  $\mathbf{R}(M) = \mathbf{R}(x, y, z)$  являются функции трех переменных:  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$ . Предполагается, что они непрерывны на дуге  $[L]$ .

Покажем, как вычисляется циркуляция, когда дуга  $[L]$  задана параметризацией  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \eta(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Здесь мы не настаиваем на неравенстве  $\alpha < \beta$ , но требуем, чтобы при изменении  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  точка  $M$  с координатами  $(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))$  перемещалась по  $[L]$  в заданном направлении от  $M_0$  до  $M_L$ . Итак,

$$A = \int_{[L]} (\mathbf{R}, \tau^0) ds = \int_0^L \left( X(x(s), y(s), z(s)) \frac{dx}{ds} + Y(x(s), y(s), z(s)) \frac{dy}{ds} + Z(x(s), y(s), z(s)) \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

В результате преобразования этого интеграла к новой переменной интегрирования  $t$  получаем

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( X(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{dt}{ds} + Y(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \frac{d\psi(t)}{dt} \frac{dt}{ds} + \right. \\ &\quad \left. + Z(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \frac{d\eta(t)}{dt} \frac{dt}{ds} \right) \frac{ds}{dt} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( X(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \varphi'(t) + Y(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \psi'(t) + \right. \\ &\quad \left. + Z(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)) \eta'(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда *формула для вычисления циркуляции векторного поля*:

$$A = \int_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} (X \varphi'(t) + Y \psi'(t) + Z \eta'(t)) dt.$$

Рассмотрим еще один подход к решению задачи вычисления циркуляции, для чего в последнем выражении перейдем к сумме

интегралов:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} (X(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))\varphi'(t) dt + \\ + \int_{\alpha}^{\beta} Y(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))\psi'(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} Z(\varphi(t), \psi(t), \eta(t))\eta'(t) dt.$$

Эти интегралы обозначаются соответственно

$$\int_{[L]} X dx, \int_{[L]} Y dy, \int_{[L]} Z dz.$$

Назовем их простейшими криволинейными интегралами II рода. Их сумму обозначим

$$\int_{[L]} X dx + Y dy + Z dz$$

и назовем полным криволинейным интегралом II рода. Ясно, что этот интеграл представляет собой еще одну форму записи циркуляции.

Существенным является то, что при вычислении простейших криволинейных интегралов II рода можно использовать различные параметризации дуги, при этом для каждого в отдельности подбирать наиболее удобный вариант, однако все такие параметризации, напоминаем, должны соответствовать ориентации дуги  $[L]$ .

**Замечание.** Если векторное поле  $\mathbf{R}(M)$  является силовым, то его циркуляция по направленной дуге представляет собой работу силы, затраченную на перемещение по указанной траектории.

**Пример.** Вычислим работу, затраченную на перемещение материальной точки по прямой из точки  $P(0; 1; 2)$  в точку  $Q(1; 0; 1)$  под действием силы

$$\mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В нашем случае  $[L] = [PQ]$  — направленный отрезок с началом  $P$  и концом  $Q$ . Его параметризация:  $x = t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 2 - t$ ,  $t$  меняется от 0 до 1.

Найдем производные

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = -1, \quad \frac{dz}{dt} = -1.$$

Координаты векторного поля:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{t}{3t^2 - 6t + 5}, \\ Y &= -\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{(1-t)}{3t^2 - 6t + 5}, \\ Z &= -\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{(2-t)}{3t^2 - 6t + 5}. \end{aligned}$$

Работа представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \int_{[L]} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{t}{3t^2 - 6t + 5} \cdot 1 - \frac{(1-t)}{3t^2 - 6t + 5} \cdot (-1) - \frac{(2-t)}{3t^2 - 6t + 5} \cdot (-1) \right) dt. \end{aligned}$$

После преобразования получим:

$$A = \int_0^1 \frac{3 - 3t}{3t^2 - 6t + 5} dt = -\frac{1}{2} \ln |3t^2 - 6t + 5| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$$

*Криволинейный интеграл II рода по кусочно гладкой дуге [L]* по определению равен сумме интегралов по гладким частям. Если, например, [L] представляет собой  $\Delta ABC$ , направление на котором задается указанным порядком вершин, то

$$\oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[AB]} \mathbf{R} d\mathbf{r} + \int_{[BC]} \mathbf{R} d\mathbf{r} + \int_{[CA]} \mathbf{R} d\mathbf{r}.$$

В этом случае направление обхода, т. е. ориентация треугольника, строго учитывается при переходе к соответствующим определенным интегралам.

Мы воспользовались новым символом  $\oint$ , означающим криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Понятие замкнутого контура весьма естественно и наглядно. Говорят, что гладкая или кусочно гладкая дуга образует замкнутый контур, если концы

этой дуги совпадают, и если контур образует направленная дуга, то этот контур называют *ориентированным*.

## § 4.2. Поверхностные интегралы

**4.2.1. Сведения о поверхностях.** Поверхность и векторное поле ее нормалей. Поверхность задается уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Вектор ее нормали

$$\mathbf{N} = \operatorname{grad} F = F'_x(x, y, z)\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\mathbf{k},$$

где  $(x, y, z)$  — координаты точки  $M$  поверхности.

Единичный вектор нормали (единичная нормаль)

$$\mathbf{N}^0 = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{F'_x\mathbf{i} + F'_y\mathbf{j} + F'_z\mathbf{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma,$$

здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы между вектором  $\mathbf{N}^0$  и координатными осями  $Ox, Oy, Oz$  соответственно.

Покажем, как выводится выражение вектора нормали, когда уравнение поверхности разрешается относительно какой-нибудь из задействованных в нем переменных. Пусть для определенности поверхность служит графиком функции  $z = f(x, y) \Leftrightarrow -f(x, y) + z = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (-f(x, y) + z)'_x\mathbf{i} + (-f(x, y) + z)'_y\mathbf{j} + (-f(x, y) + z)'_z\mathbf{k} = \\ &= -f'_x(x, y)\mathbf{i} - f'_y(x, y)\mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Если для обозначения функции двух переменных, графиком которой служит данная поверхность, вместо  $f(x, y)$  используется  $z(x, y)$ , то нормальный вектор записывается следующим образом:

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Сонаправленный с ним единичный вектор

$$\mathbf{N}^0 = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma.$$

Отсюда

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} > 0.$$

Это означает, что  $\gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ , т. е. угол между  $\mathbf{N}^0$  и положительным направлением оси  $Oz$  острый. Можно сказать, что приложенный в точке  $M$  вектор  $\mathbf{N}^0(M)$  находится над поверхностью и что с его конца видна ее верхняя сторона. Вектор  $-\mathbf{N}^0(M)$  составляет с  $Oz$  тупой угол. С его конца видна нижняя сторона поверхности.

Иногда приходится различать стороны поверхности, что осуществляется путем задания направления единичной нормали:

$$\mathbf{v}^0 = \pm \mathbf{N}^0 = \pm \frac{-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Будем полагать, что знаки перед дробью определяют стороны графика  $z = f(x, y)$ : знак плюс соответствует верхней стороне поверхности, а минус — нижней.

В приведенных рассуждениях роль оси  $Oz$  не является исключительной. Она естественно переходит на любую другую ось, лишь бы уравнение поверхности разрешалось относительно одноименной координаты. Например, при  $F(x, y, z) = 0 \Rightarrow x = f(y, z) \Leftrightarrow x - f(y, z) = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (x - f(y, z))'_x \mathbf{i} + (x - f(y, z))'_y \mathbf{j} + (x - f(y, z))'_z \mathbf{k} = \\ &= 1 \cdot \mathbf{i} - f'_y \mathbf{j} - f'_z \mathbf{k}, \end{aligned}$$

или, если вместо  $f(y, z)$  использовать  $x(y, z)$ :

$$\mathbf{N} = \mathbf{i} - \frac{\partial x}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial x}{\partial z} \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}^0 = \frac{\mathbf{i} - \frac{\partial x}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial x}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}}.$$

С конца этого вектора видна передняя сторона поверхности, так как в этом случае

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}} > 0;$$

заднюю сторону поверхности определяет векторное поле  $-\mathbf{N}^0$ .

Когда уравнение поверхности представлено в виде  $y = f(x, z)$ , векторное поле единичной нормали выражается следующим образом:

$$\mathbf{v}^0 = \pm \mathbf{N}^0 = \pm \frac{-\frac{\partial y}{\partial x} \mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial y}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}}.$$

Здесь знак плюс определяет правую сторону поверхности, а минус — левую.

Областью интегрирования в поверхностном интеграле служит ограниченная поверхность  $[\sigma]$ . Если указана ее определенная сторона, то поверхность будем называть ориентированной и обозначать  $[\sigma]$ .

*Гладкая поверхность.* Пусть поверхностная область  $[\sigma]$  лежит на графике функции  $z(x, y)$ . Спроектируем ее на плоскость  $Oxy$ . Проекцию обозначим  $[S]$  и будем считать стандартной.

Поверхность  $[\sigma]$  будем называть гладкой, если функция  $z = z(x, y)$  имеет на области  $[S]$  непрерывные частные производные. Заметим, что в этом случае векторные поля  $\pm \mathbf{N}^0$  непрерывны, т. е. непрерывны все три координаты вектора  $\mathbf{N}^0 = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$ .

Для гладкой поверхности  $[\sigma]$  определена площадь

$$\sigma = \iint_{[S]} \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \iint_{[S]} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

(см. п. 2.3.4).

Более сложные поверхности, по которым интегрируются функции, склеиваются из гладких частей и называются кусочно гладкими. Таковыми, например, являются граница треугольной

пирамиды  $[V]$ , ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $x + y + z = 1$ , или граница тела  $[V]$ , определяемого системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2a^2, \\ ay \geqslant x^2 + z^2. \end{cases}$$

Еще раз о двусторонних поверхностях. Выше приведены примеры так называемых замкнутых поверхностей. Легко можно вообразить, что каждую из них можно выкрасить в два цвета: одним колером внутреннюю сторону поверхности, а другим — внешнюю. При этом граница цветов отсутствует. Внешняя сторона поверхности отождествляется с наружным направлением нормального вектора. Векторное поле единичной нормали  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{N}^0$  выглядит как шкура ощетинившегося ежа. Внутренней стороне соответствует вывернутая шкура с иголками  $\mathbf{v}^0 = -\mathbf{N}^0$ , направленными внутрь.

Двустороннюю поверхность  $[\sigma]$ , имеющую край, можно также определить как поверхность, допускающую двухцветную окраску с границей цветов, совпадающей с краем поверхности.

**Замечание.** Существуют и односторонние поверхности. Описание одной из них, так называемого листа Мебиуса, в наше время можно встретить даже в занимательной литературе. Возьмите бумажную полосу в форме удлиненного прямоугольника  $ABCD$  (см. рис. 87), перекрутите ее один раз. Склейте  $AB$  и  $CD$  так, чтобы  $A$  совпала с  $C$ , а  $B$  — с  $D$ . После этого сделайте попытку не отрывая руки заштриховать получившееся кольцо. Рисуйте, например, змейку. Рано или поздно Вы придетете к началу своей штриховки. На этом основании можно сказать, что попытка окрасить кольцо в два цвета с границей по его краю тщетна.

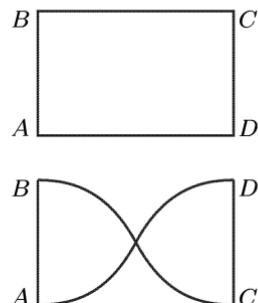


Рис. 87

**4.2.2. Поверхностный интеграл I рода.** Понятие поверхностного интеграла I рода определим для функции  $f(x, y, z)$ , непрерывной на гладкой области  $[\sigma]$ . Сначала определяется интегральная сумма: область  $[\sigma]$  разбивается на части  $[\sigma_k]$ ,

в которых фиксируются точки  $M_k \in [\sigma_k]$ , и определяются значения  $f(M_k) = f(x_k, y_k, z_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Значения функции умножаются на площади соответствующих частичных областей, результаты суммируются, т. е. составляется сумма

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \sigma_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \sigma_k,$$

где  $\sigma_k$  — площадь частичной области  $[\sigma_k]$ .

*Определение и обозначение* поверхностного интеграла I рода:

$$\int\limits_{[\sigma]} \int f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(M_k) \sigma_k.$$

Здесь  $\Delta_n = \max d_k$ , где  $d_k$  — диаметр частичной области  $[\sigma_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, по определению поверхностный интеграл представляет собой предел поверхности интегральной суммы данной функции при условии, что число слагаемых в интегральной сумме неограниченно растет, а диаметры всех частичных областей стремятся к нулю.

*Вычисление поверхностного интеграла.* Поверхностный интеграл выражается двойным интегралом.

*Теорема.* Пусть гладкая область  $[\sigma]$  служит графиком функции  $z(x, y)$  и  $[S]$  — проекция области  $[\sigma]$  на плоскость  $Oxy$ . Тогда поверхностный интеграл I рода функции  $f(x, y, z)$  по области  $[\sigma]$  можно представить следующим образом:

$$\int\limits_{[\sigma]} \int f(x, y, z) d\sigma = \int\limits_{[S]} \int f(x, y, z(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy.$$

*Доказательство.* Используем нормальную последовательность разбиений области  $[S]$  на стандартные части  $[S_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Здесь  $n$  — номер разбиения, а  $m_n$  — число соответствующих ячеек. Через границы всех  $[S_k]$  проведем цилиндрические поверхности параллельно оси  $Oz$ . Они определяют разбиение поверхности  $[\sigma]$  на части  $[\sigma_k]$ . По

формуле компланации (см. п. 2.3.4):

$$\sigma_k = \int \int_{[S_k]} \sqrt{(z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2 + 1} dx dy.$$

Согласно теореме о среднем (см. п. 2.1.8):

$$\sigma_k = \sqrt{(z'_x(\xi_k, \eta_k))^2 + (z'_y(\xi_k, \eta_k))^2 + 1} S_k,$$

$k = 1, 2, \dots, m_n$ . Здесь точка с координатами  $(\xi_k, \eta_k)$  принадлежит ячейке  $[S_k]$ . Теперь напишем равенство двух специальных интегральных сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_n} f(M_k) \sigma_k &= \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \sqrt{(z'_x(\xi_k, \eta_k))^2 + (z'_y(\xi_k, \eta_k))^2 + 1} S_k. \end{aligned}$$

В левой части в качестве опорных задействованы точки  $M_k \in [\sigma_k]$  с координатами  $(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_n$ . Из равенства этих сумм следует равенство указанных интегралов. Теорема доказана.

При выборе способа вычисления конкретного поверхностного интеграла I рода можно использовать любое из следующих равенств:

$$\begin{aligned} \int \int_{[\sigma]} f(x, y, z) d\sigma &= \int \int_{[S_{xy}]} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy, \\ \int \int_{[\sigma]} f(x, y, z) d\sigma &= \int \int_{[S_{yz}]} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, \\ \int \int_{[\sigma]} f(x, y, z) d\sigma &= \int \int_{[S_{xz}]} f(x, y(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz. \end{aligned}$$

Здесь  $[S_{xy}]$ ,  $[S_{yz}]$ ,  $[S_{xz}]$  — проекции области  $[\sigma]$  на соответствующие координатные плоскости.

Поверхностный интеграл по кусочно гладкой области определяется как сумма интегралов по всем ее гладким частям.

**Замечание.** Если подынтегральная функция  $f(x, y, z) = \gamma(M)$ , где  $M \in [\sigma]$ , представляет собой плотность материала, из которого изготовлена поверхность  $[\sigma]$ , то соответствующий поверхностный интеграл I рода численно равен массе всего изделия  $[\sigma]$ , т. е.

$$\int\limits_{[\sigma]} \int \gamma(x, y, z) d\sigma = m.$$

Координаты центра масс вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{1}{m} \int\limits_{[\sigma]} \int x \gamma(x, y, z) d\sigma, \quad y_c = \frac{1}{m} \int\limits_{[\sigma]} \int y \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$z_c = \frac{1}{m} \int\limits_{[\sigma]} \int z \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

Момент инерции  $[\sigma]$  относительно оси  $Oz$  выражает интеграл

$$\int\limits_{[\sigma]} \int (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

**Пример.** Область  $[\sigma]$  является границей тела, определенного системой неравенств

$$\begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2, \\ z \leqslant 1. \end{cases}$$

Проинтегрируем по поверхности  $[\sigma]$  функцию  $f(x, y, z) = z$ .

Если поверхность  $[\sigma]$  представляет собой материальный объект, а подынтегральная функция  $f(x, y, z)$  имеет определенный физический смысл, например,  $z$  — плотность электрического заряда или распределенная по  $[\sigma]$  плотность вещества, то  $\int\limits_{[\sigma]} \int z d\sigma$

выражает заряд  $q$  или массу  $m$  данной поверхности соответственно.

Займемся интегралом. В нашем случае кусочно гладкую замкнутую поверхность  $[\sigma]$  составляют:  $[\sigma_1]$  — часть параболоида  $z = x^2 + y^2$  и круг  $[\sigma_2]$  в плоскости  $z = 1$ . Их проекции на плоскость  $Oxy$  совпадают и представляют собой круг  $[S]$  с центром в начале координат и радиусом 1. Наш интеграл представим

в виде суммы двух слагаемых:

$$\int \int z \, d\sigma = \int \int_{[\sigma_1]} z \, d\sigma + \int \int_{[\sigma_2]} z \, d\sigma.$$

Применим формулу

$$\int \int_{[\sigma]} f(x, y, z) \, d\sigma = \int \int_{[S]} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy.$$

В первом слагаемом задействована функция  $z(x, y) = x^2 + y^2$ .

Следовательно,  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ ;

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Во втором слагаемом  $z(x, y) \equiv 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0 \Rightarrow$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \equiv 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \int_{[\sigma]} z \, d\sigma &= \int \int_{[S]} (x^2 + y^2) \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dx \, dy + \int \int_{[S]} \, dx \, dy = \\ &= \pi \left( \frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{61}{60} \right). \end{aligned}$$

**4.2.3. Поток векторного поля. Поверхностный интеграл II рода.** В определении потока векторного поля задействованы векторное поле и ориентированная поверхность. Векторное поле в пространстве  $Oxyz$  определяется тремя непрерывными функциями трех переменных:  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  — координатами вектора  $\mathbf{R}$ . Сторона гладкой поверхности  $[\sigma]$  задается направлением поля единичной нормали  $\mathbf{v}^0$ .

**Определение.** Потоком векторного поля  $\mathbf{R}$  через поверхность  $[\sigma]$  в направлении, заданном единичной нормалью  $\mathbf{v}^0$ , называется поверхностный интеграл

$$Q = \iint_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma.$$

Он также называется *потоком вектора*  $\mathbf{R}$  через ориентированную поверхность  $[\sigma]$ . Подынтегральная функция  $(\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) = |\mathbf{R}| \cos \zeta$  представляет собой проекцию вектора  $\mathbf{R}$  на нормаль  $\mathbf{v}^0$ , где  $\zeta$  — угол, образованный векторами  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{v}^0$  (см. рис. 88).

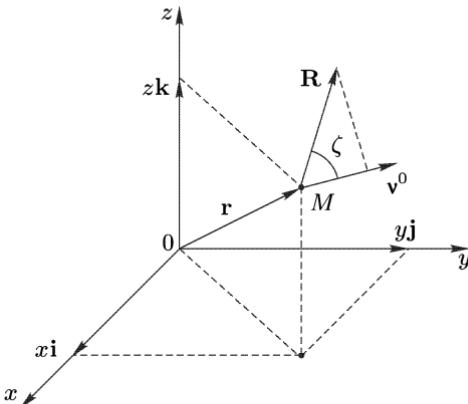


Рис. 88

Заметим, что при переходе на противоположную сторону поверхности, т. е. при изменении направления поля единичной нормали  $\mathbf{v}^0$ , меняется знак подынтегральной функции, а следовательно, и интеграла. Иными словами, при изменении ориентации поверхности поток векторного поля меняет знак.

*Первая формула для вычисления потока.* Будем полагать, что  $[\sigma]$  лежит на графике функции  $z(x, y)$ , тогда верхней ее стороне соответствует

$$\mathbf{N}^0 = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \Rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{N}^0) = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x} X - \frac{\partial z}{\partial y} Y + Z}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Здесь  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ .

Таким образом, поток векторного поля  $\mathbf{R}$  через поверхность  $[\sigma]$  снизу вверх выражается следующим образом:

$$Q = \iint_{[\sigma]} \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}X - \frac{\partial z}{\partial y}Y + Z}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} d\sigma.$$

Обозначим  $[S]$  проекцию  $[\sigma]$  на плоскость  $Oxy$  и перейдем к двойному интегралу:

$$\begin{aligned} Q &= \iint_{[S]} \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}X - \frac{\partial z}{\partial y}Y + Z}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \\ &= \iint_{[S]} \left( -\frac{\partial z}{\partial x}X - \frac{\partial z}{\partial y}Y + Z \right) dx dy. \end{aligned}$$

Здесь  $X = X(x, y, z(x, y))$ ,  $Y = Y(x, y, z(x, y))$ ,  $Z = Z(x, y, z(x, y))$ .

Отсюда формула для вычисления потока вектора  $\mathbf{R}$  через ориентированную поверхность:

$$Q = \iint_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma = \pm \iint_{[S]} \left( -\frac{\partial z}{\partial x}X - \frac{\partial z}{\partial y}Y + Z \right) dx dy.$$

Знаки плюс и минус перед интегралом соответствуют сторонам поверхности  $[\sigma]$ : плюс — верхней ее стороне, минус — нижней. Иными словами, при знаке плюс выражение определяет поток векторного поля снизу вверх, при знаке минус — в противоположном направлении.

Пример 1. Вычислим поток векторного поля  $\mathbf{R} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  через полусферу  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  снизу вверх.

В нашем случае  $X = y$ ,  $Y = -x$ ,  $Z = z^2$ . Выпишем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

По формуле

$$Q = \iint_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma = \iint_{[S]} \left( -\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} y - \right. \\ \left. - \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} (-x) + (a^2 - x^2 - y^2) \right) dx dy.$$

Здесь  $[S]$  — круг в плоскости  $Oxy$  с центром в начале координат и радиусом  $a$ . Первые два слагаемых под знаком интеграла взаимно уничтожаются. Поэтому

$$Q = \iint_{[S]} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{1}{2} \pi a^4.$$

**Замечание.** При выводе формулы мы лишь для определенности предположили, что уравнение поверхности  $[\sigma]$  разрешено относительно переменной  $z$ . В любом другом варианте,  $x = x(y, z)$  или  $y = y(x, z)$ , существование перехода от поверхностного интеграла к двойному остается неизменным. Рекомендуем Вам самостоятельно получить соответствующие формулы (нужная информация в п. 4.2.1).

Традиционные обозначения потока:

$$Q = \iint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma, \quad Q = \iint_{[\sigma]} X dy dz + Y dx dz + Z dx dy.$$

Здесь область интегрирования обозначена  $[\sigma]$ , так как определяющее ее ориентацию поле единичной нормали в подынтегральных выражениях задействовано неявно. Оба обозначения, разумеется, связаны с определением

$$Q = \iint_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma.$$

Доводы в пользу первого обозначения: подынтегральное выражение представляется как скалярное произведение векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{v}^0$ , которые умножаются на скаляр  $d\sigma$ . Вводится обозначение  $\mathbf{v}^0 d\sigma = d\sigma$ , после чего подынтегральное выражение записывается в виде

$$(\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0 d\sigma) = (\mathbf{R}, d\sigma).$$

Соображения, на основании которых вводится второе обозначение, приведены ниже.

*Вторая формула для вычисления потока.* Исходные данные:

1. Определено векторное поле  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ .
2. Определена поверхность  $[\sigma]$ . Ее уравнение  $F(x, y, z) = 0$  однозначно разрешается относительно каждой из переменных  $x, y, z$ , т. е. оно определяет функции  $x(y, z), y(x, z), z(x, y)$ , графиком которых служит поверхность  $[\sigma]$ .

3. Задано поле единичной нормали  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$ , где

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Здесь имеется в виду, что знак перед каждой дробью определяется условием конкретной задачи. Смотрим, какой угол нормаль  $\mathbf{v}^0$  составляет с положительным направлением координатной оси. Если он острый, то перед соответствующей дробью ставим знак плюс, при тупом угле ставим минус.

Пример 2. На рис. 89 изображена треугольная область  $[\sigma]$ . Верхняя сторона  $[\sigma]$  задана направлением вектора  $\mathbf{v}^0$ . В нашем случае углы  $\alpha$  и  $\gamma$  — острые, а угол  $\beta$  — тупой. Поэтому  $\cos \alpha > 0, \cos \gamma > 0$  и лишь

$$\cos \beta = - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}} < 0.$$

Условие однозначной разрешимости уравнения поверхности означает, что  $[\sigma]$  без складок проектируется на все координатные плоскости. Соответствующие проекции обозначим  $[S_{yz}], [S_{xz}], [S_{xy}]$ .

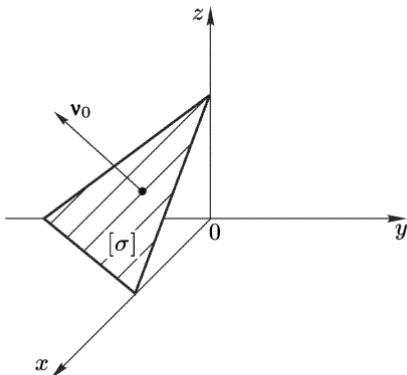


Рис. 89

Поток векторного поля  $\mathbf{R}$  через поверхность  $[\sigma]$  по направлению вектора  $\mathbf{v}^0$  согласно определению

$$Q = \iint_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma = \iint_{[\sigma]} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) d\sigma$$

выразим в виде суммы:

$$Q = \iint_{[\sigma]} X \cos \alpha d\sigma + \iint_{[\sigma]} Y \cos \beta d\sigma + \iint_{[\sigma]} Z \cos \gamma d\sigma.$$

Перейдем к двойным интегралам:

$$\begin{aligned} Q &= \pm \iint_{[S_{yz}]} X \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz \pm \\ &\quad \pm \iint_{[S_{xz}]} Y \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz \pm \\ &\quad \pm \iint_{[S_{xy}]} Z \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy. \end{aligned}$$

Здесь мы трижды воспользовались формулой преобразования поверхностного интеграла I рода к двойному интегралу. После

сокращения получается *вторая формула для вычисления потока*:

$$Q = \iint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \pm \iint_{[S_{yz}]} X(x(y, z), y, z) dy dz \pm \\ \pm \iint_{[S_{xz}]} Y(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{[S_{xy}]} Z(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Напоминаем, что перед каждым интегралом стоит именно тот знак, который определяется направлением поля  $\mathbf{v}^0$ , т. е. заданной стороной поверхности  $[\sigma]$ . Слагаемые, составляющие правую часть формулы вместе с их знаками, обозначаются

$$\iint_{[\sigma]} X dy dz, \quad \iint_{[\sigma]} Y dx dz, \quad \iint_{[\sigma]} Z dx dy.$$

Их иногда называют *поверхностными интегралами по координатам*. Если  $[\sigma]$  расположена на цилиндрической поверхности с образующими, параллельными какой-либо координатной оси, то одноименный интеграл по определению равен нулю. Так, например, если  $[\sigma]$  лежит на цилиндрической поверхности, параллельной оси  $Oy$  (в ее уравнении отсутствует переменная  $y$ ), то по определению  $\iint_{[\sigma]} Y dx dz = 0$  независимо от подынтегральной

функции.

Теперь поток векторного поля представим в виде

$$Q = \iint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \iint_{[\sigma]} X dy dz + \iint_{[\sigma]} Y dx dz + \iint_{[\sigma]} Z dx dy = \\ = \iint_{[\sigma]} X dy dz + Y dx dz + Z dx dy.$$

Это второе обозначение потока.

Все представленные здесь интегралы по заданной стороне поверхности, первый — в векторной форме, а остальные — в координатной, называются *поверхностными интегралами II рода*. Повторим их выражения через двойные интегралы. Формулы

приводятся вместе с определением потока векторного поля:

$$\iint_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma = \pm \iint_{[S]} \left( -\frac{\partial z}{\partial x} X - \frac{\partial z}{\partial y} Y + Z \right) dx dy.$$

$$\iint_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma = \pm \iint_{[S_{yz}]} X dy dz \pm \iint_{[S_{xz}]} Y dx dz \pm \iint_{[S_{xy}]} Z dx dy.$$

Соответствие знаков стороне поверхности, заданной векторным полем  $\mathbf{v}^0$ , определено выше. Определены также и принципы формирования самих интегралов.

*Поток векторного поля через замкнутую поверхность.*  
Пусть поверхность  $[\sigma]$  замкнута, например, она представляет собой границу стандартной объемной области  $[V]$ . Будем полагать, что  $[\sigma]$  допускает разбиение на гладкие части  $[\sigma_1], [\sigma_2], \dots, [\sigma_m]$ . Будем различать две стороны этой поверхности: наружную и внутреннюю. Каждой соответствует поле единичной нормали  $\mathbf{v}^0$ , определяющее ориентацию поверхности.

Поток векторного поля  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  через замкнутую ориентированную поверхность  $[\sigma]$  обозначим и определим следующим образом:

$$\iint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \sum_{k=1}^m \iint_{[\sigma_k]} \mathbf{R} d\sigma.$$

Важно заметить, что ориентация каждой частичной области  $[\sigma_k]$  согласована с ориентацией всей замкнутой области  $[\sigma]$ , т. е. сторона  $[\sigma_k]$ , задействованная в соответствующем интеграле, определяется заданным полем  $\mathbf{v}^0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

**Замечание.** В следующем параграфе выражение потока векторного поля через замкнутую поверхность будет использоваться в виде:

$$\begin{aligned} \iint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma &= \iint_{[\sigma]} X dy dz + Y dx dz + Z dx dy = \\ &= \iint_{[\sigma]} X dy dz + \iint_{[\sigma]} Y dx dz + \iint_{[\sigma]} Z dx dy. \end{aligned}$$

Каждый из этих интегралов по определению представляет собой сумму соответствующих интегралов по гладким частям поверхности  $[\sigma]$ . Ориентация частей должна быть согласована с ориентацией всей  $[\sigma]$ .

## § 4.3. Дивергенция и ротация векторного поля

**4.3.1. Понятие дивергенции векторного поля. Теорема Гаусса–Остроградского.**

Определение. *Дивергенцией* векторного поля  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  называется функция

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса–Остроградского. *Будем полагать, что на объемной стандартной области  $[V]$  с гладкой границей  $[\sigma]$  определено непрерывное векторное поле  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  и  $[\sigma]$  — наружная сторона замкнутой поверхности  $[\sigma]$ . Утверждается, что*

$$\oint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \iiint_{[V]} \operatorname{div} \mathbf{R} dx dy dz,$$

т. е. что поток векторного поля через ориентированную границу области равен тройному интегралу по этой области дивергенции данного векторного поля.

Для доказательства перепишем это равенство (пока условно) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \iint_{[\sigma]} X dy dz + \iint_{[\sigma]} Y dx dz + \iint_{[\sigma]} Z dx dy = \\ & = \iiint_{[V]} \left( \int \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz + \int \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz + \int \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz \right). \end{aligned}$$

Покажем, что третьи слагаемые в левой и правой частях равенства равны. Для этого выполним следующие преобразования:

$$\iiint_{[V]} \int \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{[S]} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz.$$

Здесь  $[S]$  — проекция  $[V]$  на  $Oxy$ , графики  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$  снизу и сверху ограничивают область  $[V]$ . Соответствующие части замкнутой поверхности  $[\sigma]$  обозначим  $[\sigma_1]$  и  $[\sigma_2]$  и продолжим преобразование:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{[S]} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz &= \\ &= \iint\limits_{[S]} (Z(x, y, z_2(x, y)) - Z(x, y, z_1(x, y))) dxdy = \\ &= \iint\limits_{[S]} Z(x, y, z_2(x, y)) dxdy - \iint\limits_{[S]} Z(x, y, z_1(x, y)) dxdy. \end{aligned}$$

Заметим, что наружная сторона поверхности  $[\sigma]$  для  $[\sigma_2]$  является верхней, а для  $[\sigma_1]$  — нижней стороной. Поэтому двойные интегралы по  $[S]$ , причем второй вместе со стоящим перед ним знаком минус, представляют собой поверхностные интегралы по указанным ориентированным областям:

$$\iint\limits_{[V]} \iint\limits_{[\sigma]} \frac{\partial Z}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{[\sigma_2]} Z dxdy + \iint\limits_{[\sigma_1]} Z dxdy = \iint\limits_{[\sigma]} Z dxdy.$$

Интеграл по цилиндрической части границы равен нулю. Равенство третьих слагаемых доказано. Точно также доказывается, что

$$\iint\limits_{[V]} \iint\limits_{[\sigma]} \frac{\partial Y}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{[\sigma]} Y dxdz, \quad \iint\limits_{[V]} \iint\limits_{[\sigma]} \frac{\partial X}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{[\sigma]} X dydz.$$

Можно сказать, что вопрос над знаком равенства между потоком векторного поля и тройным интегралом дивергенции снимается, т. е. теорема Гаусса–Остроградского верна.

**Пример.** С помощью формулы Гаусса–Остроградского определим поток векторного поля

$$\mathbf{R} = xz^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + zy^2\mathbf{k}$$

через сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Имеется в виду ее внешняя сторона  $[\sigma]$ .

Вычислим дивергенцию:

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(yx^2) + \frac{\partial}{\partial z}(zy^2) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Следовательно,

$$\oint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \iint_{[V]} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

$$J = \rho^2 \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\oint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \pi a^4.$$

**4.3.2. Формула Грина.** Пусть на плоскости  $Oxy$  некая область  $[S]$  ограничена контуром  $[L]$ . На  $[S]$  заданы две функции  $P$  и  $Q$  двух аргументов с непрерывными частными производными. Будем также считать, что на граничном контуре введено направление движения точки против хода часовой стрелки (см. рис. 90).

Утверждается, что

$$\oint_{[L]} P dx + Q dy = \iint_{[S]} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Это и есть *формула Грина*. Левая ее часть, как видим, представляет собой циркуляцию по замкнутому контуру  $[L]$  плоского векторного поля  $\mathbf{R} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ . Интеграл в правой части во многих случаях представляет собой удобное средство вычисления указанной циркуляции.

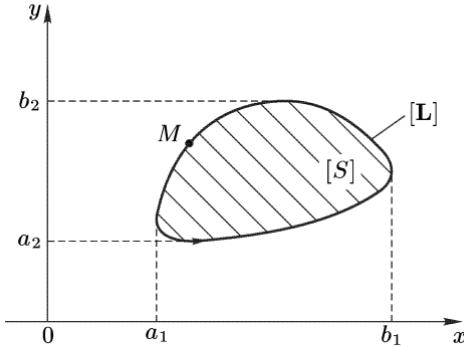


Рис. 90

**Доказательство.** Правую часть формулы представляем в виде разности двух двойных интегралов:

$$\iint_{[S]} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{[S]} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_{[S]} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Отдельно рассмотрим

$$\begin{aligned} \iint_{[S]} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} Q \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \int_{a_2}^{b_2} (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)) dy = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} Q(x_2(y), y) dy - \int_{a_2}^{b_2} Q(x_1(y), y) dy. \end{aligned}$$

Это криволинейные интегралы по правой и левой частям контура соответственно. Чтобы второй интеграл соответствовал заданной ориентации  $[L]$ , меняем местами пределы интегрирования и одновременно знак перед интегралом. В результате

$$\iint_{[S]} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{a_2}^{b_2} Q(x_2(y), y) dy + \int_{b_2}^{a_2} Q(x_1(y), y) dy = \oint_{[L]} Q(x, y) dy.$$

Точно также преобразуется и второй интеграл, поэтому мы соответствующую выкладку приводим в сокращенном виде:

$$\begin{aligned}
 - \int \int_{[S]} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\
 &= - \int_{a_1}^{b_1} (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} P(x, y_1(x)) dx + \int_{b_1}^{a_1} P(x, y_2(x)) dx = \oint_{[L]} P(x, y) dx.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\int \int_{[S]} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{[L]} P dx + \oint_{[L]} Q dy = \oint_{[L]} P dx + Q dy.$$

Утверждение доказано.

**4.3.3. Ротация векторного поля. Формула Стокса.** *Определение ротации* (приводится вместе с обозначениями). Ротацией векторного поля  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  называется новое векторное поле

$$\text{rot } \mathbf{R} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

При воспроизведении этого определения, а также при расчетах удобно следующее выражение ротации:

$$\text{rot } \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

Ротация получается формальным разложением квазиопределителя по элементам его первой строки.

Пример 1.

$$\mathbf{R} = (x + y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + y + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z)\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y^2 + z^2 & x^2 + y + z^2 & x^2 + y^2 + z \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(2y - 2z) - \mathbf{j}(2x - 2z) + \mathbf{k}(2x - 2y).$$

*Формула Стокса.* Будем полагать, что область  $[\sigma]$  расположена на графике функции  $z = z(x, y)$  и ее краем служит замкнутый контур  $[L]$ . Пусть  $[S]$  — проекция  $[\sigma]$  на  $Oxy$ . Предполагается, что на  $[S]$  существуют и непрерывны частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Верхняя сторона  $[\sigma]$  задается векторным полем  $\mathbf{N}^0$ :

$$\mathbf{N}^0 = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Контур  $[L]$  ориентируется движением точки  $M \in [L]$  против часовой стрелки, если смотреть на это движение сверху, т. е. с конца вектора  $\mathbf{N}^0$ .

Предполагается, что на  $[\sigma]$  определено непрерывное векторное поле

$$\mathbf{R} = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Формула Стокса устанавливает равенство между циркуляцией векторного поля по граничному контуру области и потоком ротации этого поля через саму эту область, т. е.

$$\oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \iint_{[\sigma]} \operatorname{rot} \mathbf{R} d\sigma.$$

Доказательство. Левую часть представим выражением

$$\oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \iint_{[L]} X dx + Y dy + Z dz.$$

Преобразуем его к криволинейному интегралу по плоскому контуру  $[L_{xy}]$ , являющемуся проекцией контура  $[L]$  на плоскость  $Oxy$ . Для этого подставим в последнее выражение  $z = z(x, y)$ . При этом

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} &= \oint_{[L_{xy}]} X dx + Y dy + Z \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \\ &= \oint_{[L_{xy}]} \left( X + Z \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( Y + Z \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

Дальнейшее преобразование выполним по формуле Грина, для чего положим

$$X + Z \frac{\partial z}{\partial x} = P, \quad Y + Z \frac{\partial z}{\partial y} = Q.$$

Напоминаем, что

$$\oint_{[L]} P dx + Q dy = \iint_{[S]} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Сформулируем подынтегральную функцию правой части формулы:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( Y + Z \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( X + Z \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Напоминаем, что  $X = X(x, y, z(x, y))$ ,  $Y = Y(x, y, z(x, y))$ ,  $Z = Z(x, y, z(x, y))$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \\ &\quad - \left[ \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Оставшееся выражение перепишем в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right).$$

Обращаем Ваше внимание на то, что заключенные в скобки разности представляют собой координаты ротации векторного поля  $\mathbf{R}$ , следовательно, двойной интеграл по области  $[S]$  всего этого выражения определяет поток ротации через  $[\sigma]$  снизу вверх. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \oint_{[L]} \mathbf{R} dr &= \iint_{[S]} \left( -\frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \right) dx dy = \iint_{[\sigma]} \text{rot } \mathbf{R} d\sigma. \end{aligned}$$

Переход к последнему выражению получен согласно первой расчетной формуле потока векторного поля (см. п. 4.2.3). Утверждение доказано.

Заметим, что в литературе по математическому анализу формула Стокса приводится в следующем виде:

$$\begin{aligned} \oint_{[L]} X dx + Y dy + Z dz &= \iint_{[\sigma]} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \\ &\quad + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Пример 2. Воспользуемся формулой Стокса для вычисления циркуляции векторного поля

$$\mathbf{R} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$$

по треугольному контуру  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  (см. рис. 91).

Сформируем двойной интеграл. Для этого определим

$$\operatorname{rot} \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

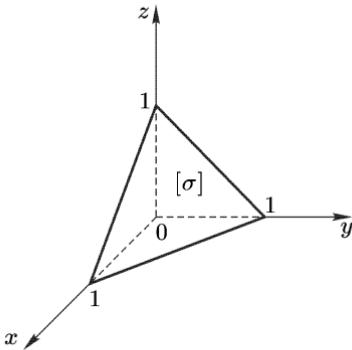


Рис. 91

Уравнение плоскости  $ABC$ :  $x + y + z = 1$ . Следовательно,  $z = 1 - x - y$ . Определим частные производные этой функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$

Пусть  $[\sigma]$  — часть плоскости, ограниченная треугольником  $ABC$ , а  $[S]$  — ее проекция на  $Oxy$ . Циркуляция векторного поля  $\mathbf{R}$  по  $\Delta ABC$  выражается следующим образом:

$$\oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \iint_{[\sigma]} \operatorname{rot} \mathbf{R} d\sigma = \iint_{[S]} (-(-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 2 + 2) dx dy = 6 \cdot S = 3.$$

## § 4.4. Потенциальное векторное поле

**4.4.1. Определение потенциального векторного поля.** Приводим 4 варианта определения потенциального векторного поля. Каждый из них, естественно, определяется соответствующим условием, которому должно удовлетворять векторное поле  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ .

*Условие A:*

$$\operatorname{rot} \mathbf{R} \equiv 0,$$

т. е. во всех точках заданной части пространства  $Oxyz$  ротация данного поля равна нулю.

*Условие Б:*

$$\oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = 0,$$

т. е. циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна нулю повсеместно при условии, что контур служит краем области  $[\sigma]$ , принадлежащей области определения поля.

*Условие В:* Циркуляция векторного поля  $\mathbf{R}$  по любым двум дугам  $[L_1]$  и  $[L_2]$  с общим началом  $M_0$  и общим концом  $M$  одна и та же, если эти дуги составляют полную границу некой области  $[\sigma]$ , находящейся в области определения поля, т. е.

$$\int_{[L_1]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[L_2]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[M_0 M]} \mathbf{R} d\mathbf{r}.$$

Иными словами, циркуляция поля по дуге зависит лишь от начала и конца этой дуги, от самой же дуги — не зависит.

*Условие Г:* Существует скалярное поле  $\Phi = \Phi(x, y, z)$ , градиент которого равен данному векторному полю  $\mathbf{R}$ :

$$\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z.$$

Докажем, что все эти 4 условия эквивалентны, т. е. выполнение любого из них гарантирует выполнение всех остальных. План доказательства представим в виде следующего логического квадрата:

$$\begin{array}{ccc} A & \Rightarrow & B \\ \Updownarrow & & \Downarrow \\ \Gamma & \Leftarrow & B \end{array}$$

**Теорема 1.**  $A \Rightarrow B$ , т. е. если ротация векторного поля повсеместно равна нулю, то циркуляция этого поля по любому замкнутому контуру тоже нулевая, если, конечно, контур принадлежит области определения поля вместе с некоторой ограниченной им областью.

**Доказательство.** По формуле Стокса

$$\oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \iint_{[\sigma]} \operatorname{rot} \mathbf{R} d\sigma = \iint_{[\sigma]} \mathbf{0} \cdot d\sigma = 0.$$

**Теорема 2.**  $B \Rightarrow B$ , т. е. если циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю, то циркуляция этого поля по любой дуге зависит лишь от концов этой дуги.

**Доказательство.** Пусть две дуги  $L_1$  и  $L_2$  имеют общее начало  $M_0$  и общий конец  $M$ . Составим из них контур  $[L]$  так, чтобы его ориентация соответствовала движению по  $[L_1]$  от  $M_0$  до  $M$ , а по  $[L_2]$  — от  $M$  к  $M_0$  (см. рис. 92).

$$\begin{aligned} \oint_{[L]} \mathbf{R} d\mathbf{r} &= \int_{[L_1]} \mathbf{R} d\mathbf{r} - \int_{[L_2]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{[L_1]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[L_2]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[M_0 M]} \mathbf{R} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

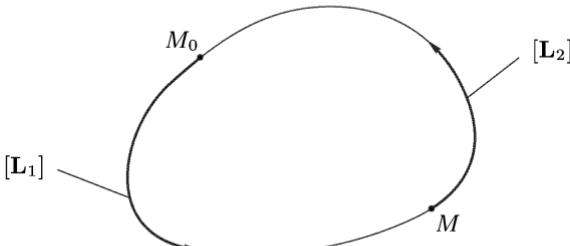


Рис. 92

Теорема 2 доказана. Заметим, что последнее обозначение явно указывает на свойство  $B$  векторного поля  $\mathbf{R}$ , т. е. на независимость циркуляции этого поля от дуги, соединяющей  $M_0$  с  $M$ .

**Теорема 3.**  $B \Rightarrow \Gamma$ , т. е. если циркуляция векторного поля зависит лишь от начала и конца дуги, то найдется скалярное поле, градиент которого равен данному векторному полю.

**Доказательство.** Пусть векторное поле  $\mathbf{R} = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$  обладает свойством  $B$ . Зафиксируем в области его определения точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Другую точку  $M(x, y, z)$  в этой области будем считать свободной. Циркуляция векторного поля  $\mathbf{R}$  от фиксированной точки  $M_0$  до свободной

точки  $M$  является, очевидно, функцией переменных  $x, y, z$ . Введем обозначение:  $\int_{[M_0 M]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \Phi(x, y, z)$ .

Покажем, что  $\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{R}$ , т. е. что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z.$$

Займемся первым равенством. Его левая часть:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y, z) - \Phi(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Обозначим  $M_1$  точку с координатами  $(x + \Delta x, y, z)$  и преобразуем числитель:

$$\begin{aligned} \Phi(x + \Delta x, y, z) - \Phi(x, y, z) &= \int_{[M_0 M_1]} \mathbf{R} d\mathbf{r} - \int_{[M_0 M]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \\ &= \int_{[M_0 M]} \mathbf{R} d\mathbf{r} + \int_{[M M_1]} \mathbf{R} d\mathbf{r} - \int_{[M_0 M]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[M M_1]} \mathbf{R} d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Отрезок  $[M M_1]$  лежит на прямой, параллельной оси  $Ox$ . Когда точка движется по этому отрезку от  $M$  до  $M_1$ , то ее абсцисса, обозначим ее  $\tilde{x}$ , меняется от  $x$  до  $x + \Delta x$ . Две другие координаты,  $y$  и  $z$ , не меняются. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{[M M_1]} \mathbf{R} d\mathbf{r} &= \int_{[M M_1]} X dx + Y dy + Z dz = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} X(\tilde{x}, y, z) d\tilde{x} = X(\xi, y, z) \Delta x. \end{aligned}$$

Последнее выражение получено по теореме о среднем. Второй и третий члены обратились в нуль, так как  $dy = dz = 0$ .

Заметим, что при переходе от криволинейного к определенному интегралу мы фактически воспользовались следующей параметризацией отрезка  $[M M_1]$ :  $\tilde{x} \in [x, x + \Delta x]$ ,  $\tilde{y} = y + 0 \cdot \tilde{x}$ ,  $\tilde{z} = z + 0 \cdot \tilde{x}$ .

Теперь ясно, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{X(\xi, y, z) \Delta x}{\Delta x} = X(x, y, z),$$

так как

$$\xi \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} x.$$

Первое равенство доказано. Второе и третье доказываются аналогично. Теорема 3 доказана.

**Теорема 4.**  *$\Gamma \Rightarrow A$ , т.е. если существует числовая функция, градиент которой равен данному векторному полю, то ротация этого векторного поля равна нулю.*

**Доказательство.** По условию существует скалярное поле  $\Phi(x, y, z)$ , такое что

$$\mathbf{R} = \operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Рассмотрим ротацию:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{R} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \right) - \\ &- \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = \mathbf{i} \cdot 0 - \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 0 = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

так как смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Теорема 4 доказана.

Сравнение условий  $A$ ,  $B$ ,  $B'$ ,  $\Gamma$  показывает, что наиболее удобным для практики и, следовательно, предпочтительным при определении потенциального векторного поля является условие  $A$ .

**Определение** (потенциального векторного поля). *Векторное поле будем называть потенциальным, если его ротация равна нулю, т. е.  $\mathbf{R}$  потенциально, если  $\operatorname{rot} \mathbf{R} \equiv 0$ .*

Заметим сразу, что градиент любой функции представляет собой потенциальное векторное поле (см. доказательство теоремы 4).

**4.4.2. Потенциал векторного поля.** Понятие потенциала определяется лишь для потенциальных векторных полей.

**Определение.** Потенциалом потенциального векторного поля  $\mathbf{R}$  называется всякая функция  $\Phi$ , градиент которой равен данному векторному полю, т. е.

$$\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{R}.$$

**Формула потенциала.** Пусть векторное поле  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  потенциально. Существование его потенциала доказано в предыдущем пункте (см. теоремы 1, 2, 3):

$$\Phi = \int_{[M_0 M]} \mathbf{R} d\mathbf{r} = \int_{[M_0 M]} X dx + Y dy + Z dz.$$

Точка  $M_0$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  фиксирована, а точка  $M$  с координатами  $(x, y, z)$  свободна. Этот криволинейный интеграл не зависит от дуги, соединяющей точки  $M_0$  и  $M$ . Покажем, что потенциал выражается суммой трех определенных интегралов, для этого соединим  $M_0$  с  $M$  ломаной линией, составленной из трех направленных отрезков, параллельных координатным осям. Ее вершины обозначены  $M_1$  и  $M_2$  (см. рис. 93).

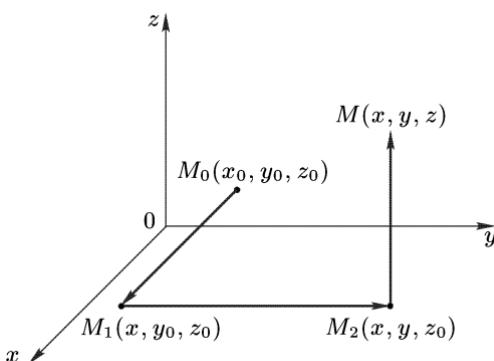


Рис. 93

Координаты точек  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M$  по порядку:  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x, y_0, z_0)$ ,  $(x, y, z_0)$ ,  $(x, y, z)$ . Потенциал, представленный циркуляцией векторного поля по этой ломаной, равен следующей

сумме трех интегралов II рода:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \int_{[M_0 M_1]} X \, dx + Y \, dy + Z \, dz + \\ &+ \int_{[M_1 M_2]} X \, dx + Y \, dy + Z \, dz + \int_{[M_2 M]} X \, dx + Y \, dy + Z \, dz.\end{aligned}$$

Путем перехода к определенным интегралам получается формула

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x X(\tilde{x}, y_0, z_0) \, d\tilde{x} + \int_{y_0}^y Y(x, \tilde{y}, z_0) \, d\tilde{y} + \int_{z_0}^z Z(x, y, \tilde{z}) \, d\tilde{z}.$$

**Замечание.** Любое потенциальное векторное поле имеет бесчисленное множество потенциалов. Пусть  $\Phi(x, y, z)$  — один из потенциалов векторного поля  $\mathbf{R}$ . Тогда, очевидно, сумма  $\Phi(x, y, z) + C$  при любом постоянном  $C$  — тоже потенциал поля. Таким образом,  $\Phi(x, y, z) + C$  при произвольном  $C$  представляет собой семейство потенциалов векторного поля  $\mathbf{R}$ .

**Пример 1.** Дано векторное поле  $\mathbf{R} = (3x^2 + yz)\mathbf{i} + (2y + xz)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ . Выясним, является ли поле потенциальным, и если да, то найдем его потенциал.

Вычислим ротацию векторного поля:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{R} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + yz & 2y + xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(2y + xz)\right) - \\ &- \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 + yz)\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2y + xz) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + yz)\right) = \\ &= \mathbf{i}(x - x) - \mathbf{j}(y - y) + \mathbf{k}(z - z) = 0.\end{aligned}$$

Зафиксируем точку  $M_0$  с координатами  $(0, 0, 0)$  и рассмотрим  $\Phi(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \int_0^x (3\tilde{x}^2 + 0 \cdot 0) d\tilde{x} + \int_0^y (2\tilde{y} + x \cdot 0) d\tilde{y} + \int_0^z xy d\tilde{z} = \\ &= \tilde{x}^3 \Big|_0^x + \tilde{y}^2 \Big|_0^y + xy\tilde{z} \Big|_0^z = x^3 + y^2 + xyz.\end{aligned}$$

*Потенциальное векторное поле на плоскости.* Пусть  $\mathbf{R} = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$ . Его ротация

$$\text{rot } \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( -\frac{\partial Y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left( -\frac{\partial X}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right).$$

Функции  $X$  и  $Y$  от  $z$  не зависят, поэтому  $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0$ . Следовательно, в нашем случае

$$\text{rot } \mathbf{R} = \mathbf{k} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

$$\text{rot } \mathbf{R} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Иными словами, равенство  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$  служит необходимым и достаточным условием потенциальности поля  $\mathbf{R} = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j}$ . При соблюдении этого условия потенциал  $\Phi(x, y)$  равен

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x X(\tilde{x}, y_0) d\tilde{x} + \int_{y_0}^y Y(x, \tilde{y}) d\tilde{y}.$$

Пример 2. Дано векторное поле  $\mathbf{R} = (2x + 3x^2y^3)\mathbf{i} + (3x^3y^2 + 4y^3)\mathbf{j}$ . Найти семейство потенциалов данного векторного поля.

Для сравнения находим частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial y} (2x + 3x^2y^3) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^3y^2 + 4y^3) = 9x^2y^2.$$

Производные равны, следовательно, векторное поле  $\mathbf{R}$  потенциально. Пусть  $x_0 = y_0 = 0$ , тогда

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_0^x (2\tilde{x} + 3\tilde{x}^2 \cdot 0^3) d\tilde{x} + \int_0^y (3x^3\tilde{y}^2 + 4\tilde{y}^3) d\tilde{y} = \\ &= \tilde{x}^2 \Big|_0^x + (x^3\tilde{y}^3 + \tilde{y}^4) \Big|_0^y = x^2 + x^3y^3 + y^4.\end{aligned}$$

Отсюда семейство потенциалов данного векторного поля  $\mathbf{R}$  запишется следующим образом:

$$\Phi(x, y) + C = x^2 + x^3y^3 + y^4 + C.$$

**4.4.3. Интегрирование полных дифференциалов.** Задача об отыскании потенциала потенциального векторного поля в терминах математического анализа ставится следующим образом. Данная так называемая линейная дифференциальная форма:

$$\omega = X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz.$$

Во-первых, надлежит выяснить, является ли она полным дифференциалом какой-либо функции, и, во-вторых, если ответ окажется положительным, найти эту функцию, или, как еще говорят, проинтегрировать полный дифференциал.

Решение также состоит из двух частей. Сперва, например с помощью формулы ротации, составляются выражения:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Затем, если все эти разности окажутся равными нулю, определяется функция

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x X(\tilde{x}, y_0, z_0) d\tilde{x} + \int_{y_0}^y Y(x, \tilde{y}, z_0) d\tilde{y} + \int_{z_0}^z Z(x, y, \tilde{z}) d\tilde{z}$$

и формируется ответ:  $\Phi(x, y, z) + C$ , где  $C$  — произвольная константа.

*Уравнения в полных дифференциалах.* Так называются уравнения вида

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

при условии  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ .

Их общее решение с помощью формулы потенциала получается следующим образом:

$$\int_{x_0}^x X(\tilde{x}, y_0) d\tilde{x} + \int_{y_0}^y Y(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + C = 0.$$

Пример. Решим уравнение

$$(3x^2 + y \cos(xy)) dx + (4y^3 + x \cos(xy)) dy = 0.$$

Определяем и сравниваем частные производные:

$$(3x^2 + y \cos(xy))'_y = \cos(xy) - yx \sin(xy),$$

$$(4y^3 + x \cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy \sin(xy).$$

Производные совпадают, следовательно, мы имеем дело с уравнением в полных дифференциалах. Положим  $x_0 = y_0 = 0$  и определим функцию  $\Phi(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_0^x (3\tilde{x}^2 + 0 \cdot \cos(\tilde{x} \cdot 0)) d\tilde{x} + \int_0^y (4y^3 + x \cos(x\tilde{y})) d\tilde{y} = \\ &= \tilde{x}^3 \Big|_0^x + (\tilde{y}^4 + \sin(x\tilde{y})) \Big|_0^y = x^3 + y^4 + \sin(xy). \end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:  $x^3 + y^4 + \sin(xy) + C = 0$ .

## § 4.5. Соленоидальное векторное поле

**4.5.1. Понятие соленоидального векторного поля.** Сформулируем три условия, каждое из которых может служить определением соленоидального векторного поля.

*Условие A:* Дивергенция векторного поля тождественна нулю, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0.$$

*Условие B:* Поток векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, т. е.

$$\iint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = 0,$$

при условии, что эта поверхность ограничивает объемную область  $[V]$ , принадлежащую области определения поля.

*Условие B:* Существует векторное поле  $\Pi$ , ротация которого равна данному векторному полю  $\mathbf{R}$ , т. е. на заданной части пространства

$$\operatorname{rot} \Pi = \mathbf{R}.$$

Докажем эквивалентность этих условий.

$$\begin{matrix} A \\ \Leftrightarrow \\ B \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \nabla \\ \Leftrightarrow \\ B \end{matrix}$$

*Теорема 1.*  $A \Rightarrow B$ , т. е. если дивергенция векторного поля тождественна нулю, то поток этого поля через замкнутую кусочно гладкую поверхность равен нулю при условии, что поверхность служит границей тела, включенного в область определения поля.

*Доказательство.* Пусть  $[\sigma]$  — граница области  $[V]$ , содержащейся в области определения  $\mathbf{R}$ . По условию  $\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0$ . Отсюда по формуле Гаусса–Остроградского

$$\iint_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \iiint_{[V]} \operatorname{div} \mathbf{R} dx dy dz = \iiint_{[V]} 0 dx dy dz = 0.$$

Теорема доказана.

*Теорема 2.*  $B \Rightarrow A$ , т. е. если поток векторного поля через любую замкнутую поверхность, ограничивающую область, принадлежащую области определения векторного поля, равен нулю, то дивергенция этого поля тождественна нулю.

*Доказательство.* Приведем сначала следующее локальное свойство дивергенции, имеющее и самостоятельное значение. Пусть  $[V]$  — шар с достаточно малым радиусом  $\delta > 0$  и центром в произвольно фиксированной точке  $M$  с координатами  $(x, y, z)$ , и пусть  $[\sigma]$  — ориентированная граница этого шара. На основании

формулы Гаусса-Остроградского и теоремы о среднем имеем

$$\oint\limits_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \int\int\int_V \operatorname{div} \mathbf{R} dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{R}(M_1) V.$$

Здесь  $V$  — объем шара, а  $\operatorname{div} \mathbf{R}(M_1)$  — дивергенция в некоторой точке  $M_1 \in [V]$ . Отсюда

$$\operatorname{div} \mathbf{R}(M_1) = \frac{\oint\limits_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma}{V}.$$

При сжатии шара в точку получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{R}(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\oint\limits_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma}{V},$$

т. е. дивергенция векторного поля в точке представляет собой предел отношения потока этого поля через ориентированную границу шара с центром в данной точке к объему этого шара при условии, что радиус шара стремится к нулю.

Таким образом, в нашем случае

$$\operatorname{div} \mathbf{R}(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{0}{V} = 0.$$

Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.**  *$B \Rightarrow A$ , т. е. если существует векторное поле, ротация которого равна данному векторному полю, то дивергенция данного векторного поля равна нулю.*

**Доказательство.** Пусть в пространстве определено векторное поле  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ , а также имеется векторное поле

$$\boldsymbol{\Pi} = \Pi_x \mathbf{i} + \Pi_y \mathbf{j} + \Pi_z \mathbf{k},$$

причем  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{R}$ . Докажем, что  $\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0$ . Для этого рассмотрим равенство

$$X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Pi_x & \Pi_y & \Pi_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{R} &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Pi_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Pi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

В этом выражении, как видим, первый и четвертый, второй и пятый, а также третий и шестой члены взаимно уничтожаются. Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0.$$

Теорема 3 доказана.

**Теорема 4.**  $A \Rightarrow B$ , т. е. если дивергенция векторного поля тождественна нулю, то найдется новое векторное поле, ротация которого совпадает с данным векторным полем.

В качестве доказательства приводится конкретный способ решения следующей задачи.

Дано векторное поле  $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ , удовлетворяющее условию  $\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0$ . Требуется найти векторное поле  $\mathbf{\Pi} = \Pi_x\mathbf{i} + \Pi_y\mathbf{j} + \Pi_z\mathbf{k}$ , такое что ротация  $\mathbf{\Pi}$  равна  $\mathbf{R}$ . Иными словами, ставится задача найти функции  $\Pi_x$ ,  $\Pi_y$ ,  $\Pi_z$  трех аргументов  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , удовлетворяющие условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} = X, \\ \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} = Y, \\ \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} = Z. \end{array} \right.$$

Попытаемся найти решение с нулевой третьей координатой. Иными словами, положив  $\Pi_z = 0$ , будем искать  $\Pi_x$ ,  $\Pi_y$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \Pi_y}{\partial z} = X, \\ \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} = Y, \\ \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} = Z. \end{array} \right.$$

Первым двум уравнениям, очевидно, удовлетворяют функции

$$\Pi_y = - \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + u(x, y), \quad \Pi_x = \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z} + v(x, y).$$

Теперь укажем конкретные  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , с которыми эти выражения удовлетворяют и последнему уравнению последней системы, для чего положим  $v(x, y) \equiv 0$ , а  $u(x, y)$  найдем из равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( - \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + u(x, y) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z} = Z.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z} + Z.$$

Формально правая часть зависит от трех переменных  $x, y, z$ , поэтому равенство пока следует считать условным.

Проясняет ситуацию следующее наблюдение:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z} + Z \right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 0.$$

Здесь мы воспользовались свойством интеграла с переменным верхним пределом и, разумеется, условием теоремы 4:  $\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0$ .

Итак, установлено, что интересующее нас выражение не зависит от переменной  $z$ , что позволяет получить конкретное выражение  $u(x, y)$ :

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z} + Z \right) dx.$$

Задача решена и теорема 4 доказана, так как функции

$$\Pi_x = \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z}, \quad \Pi_z \equiv 0,$$

$$\Pi_y = - \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z} + Z \right) dx$$

определяют векторное поле  $\mathbf{\Pi} = \Pi_x \mathbf{i} + \Pi_y \mathbf{j} + \Pi_z \mathbf{k}$ , обладающее свойством  $\operatorname{rot} \mathbf{\Pi} = \mathbf{R}$ .

*Общий вывод.* Условия  $A$ ,  $B$ ,  $B$  попарно эквивалентны. Как наиболее удобное в определении понятия соленоидального векторного поля задействуем условие  $A$ .

**Определение.** Векторное поле будем называть *соленоидальным* или *несжимаемым*, если его дивергенция тождественна нулю.

#### 4.5.2. Векторный потенциал векторного поля.

**Определение.** *Векторным потенциалом векторного поля*  $\mathbf{R}$  называется всякое векторное поле  $\mathbf{\Pi}$ , удовлетворяющее условию  $\operatorname{rot} \mathbf{\Pi} = \mathbf{R}$ .

Теорема 4 п. 4.5.1 утверждает, что соленоидальное векторное поле имеет векторный потенциал, а ее доказательство представляет собой конкретный способ его вычисления. Представим еще раз соответствующий порядок действий, который проиллюстрируем примером.

Пример.

$$\mathbf{R} = -z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}.$$

Здесь  $X(x, y, z) = -z$ ,  $Y(x, y, z) = x$ ,  $Z(x, y, z) = y$ . Вычислим дивергенцию:

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z} = 0 + 0 + 0 \equiv 0.$$

Следовательно, данное векторное поле  $\mathbf{R}$  несжимаемо, и мы можем вычислить его векторный потенциал:  $\mathbf{\Pi} = \Pi_x \mathbf{i} + \Pi_y \mathbf{j}$ .

$$\Pi_x = \int_{z_0}^z Y(x, y, \tilde{z}) \, d\tilde{z}.$$

Можно сказать, что  $\Pi_x$  получается интегрированием заданного выражения  $Y(x, y, z) = x$  по переменной  $z$  и при временно

фиксированных  $x$  и  $y$ . В итоговый результат константа интегрирования не включается, т. е.

$$\int x \, dz = xz + C \Rightarrow \Pi_x = xz, \quad \Pi_y = - \int_{z_0}^z X(x, y, \tilde{z}) \, d\tilde{z} + u(x, y).$$

Первое слагаемое вычисляется аналогично, т. е. заданное выражение  $-X(x, y, z) = -(-z) = z$  интегрируется по переменной  $z$  (две другие переменные, если бы они явно присутствовали, в процессе интегрирования считались бы постоянными). Итак,

$$\int z \, dz = \frac{z^2}{2} + C.$$

Слагаемое  $C$  в расчет не берется. Таким образом, при  $z_0 = 0$  имеем

$$-\int_0^z X \, d\tilde{z} = \frac{z^2}{2}.$$

Вычислим второе слагаемое. В доказательстве теоремы 4 п. 4.5.1 оно представлено в виде

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z X \, d\tilde{z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z Y \, d\tilde{z} + Z \right) \, dx.$$

Выпишем подынтегральное выражение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{z^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (xz) + y = 0 + 0 + y.$$

Интегрированием по  $x$  при фиксированном  $y$  получаем:  $u(x, y) = xy$ . И в этом случае произвольная константа не прибавляется. Таким образом,

$$\Pi_y = \frac{z^2}{2} + xy.$$

$$\text{В итоге имеем } \mathbf{\Pi} = xz\mathbf{i} + \left( \frac{z^2}{2} + xy \right) \mathbf{j} + \operatorname{grad} \Phi,$$

где  $\Phi$  — произвольная функция трех переменных с непрерывными частными производными.

Проверим полученный результат:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & \frac{z^2}{2} + xy & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z^2}{2} + xy \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z} (xz) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z^2}{2} + xy \right) \mathbf{k} = \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, поставленная задача решена.

#### 4.5.3. Трубчатое строение соленоидального векторного поля.

Введем понятие векторной линии. Векторной линией в векторном поле будем называть всякую линию, в каждой точке которой вектор поля является вектором касательной к этой линии.

Векторные линии еще называют линиями тока. С их помощью определяется понятие векторной трубки.

Векторной трубкой векторного поля называется множество всех векторных линий, пересекающих некий контур  $[L]$ . Вообразим, что на него натянута поверхность  $[\sigma]$ . Назовем ее сечением трубки. Будем считать, что поверхность  $[\sigma]$  ориентирована, т. е. на ней задана сторона, определяемая полем единичной нормали  $\mathbf{v}^0$ . Можно сказать, что вектор  $\mathbf{v}^0$  ориентирует и саму трубку, т. е. задает в трубке определенное направление.

Свойство векторных трубок несжимаемого векторного поля выражает следующая теорема.

**Теорема.** Поток векторного поля через сечение трубки в заданном направлении при переходе к другому сечению не меняется.

**Доказательство.** Рассматривается трубка с заданным в ней направлением и два ее непересекающихся сечения  $[\sigma]$  и  $[\sigma_1]$ . Они ограничивают соответствующий отрезок трубки, который обозначим  $[\sigma_6]$  (здесь  $[\sigma_6]$  означает боковую поверхность трубки). Отрезок трубки вместе с боковыми сечениями образует замкнутую поверхность, которую обозначим  $[\sigma_n]$  — полная поверхность. Ее внешней стороне соответствует направленное наружу векторное поле  $\mathbf{N}^0$ . Без ущерба для общности наших рассуждений будем полагать, что на поверхности  $[\sigma]$  векторы  $\mathbf{N}^0$  и  $\mathbf{v}^0$  противоположны, т. е.  $\mathbf{N}^0 = -\mathbf{v}^0$ , следовательно, на

сечении  $[\sigma_1]$  они сонаправлены. Добавим, что на  $[\sigma_6]$  векторы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{N}^0$  ортогональны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю (см. рис. 94). Равный нулю поток векторного поля  $\mathbf{R}$  через полную поверхность  $[\sigma_n]$  выражается суммой

$$\int\int_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{N}^0) d\sigma + \int\int_{[\sigma_1]} (\mathbf{R}, \mathbf{N}^0) d\sigma + \int\int_{[\sigma_6]} (\mathbf{R}, \mathbf{N}^0) d\sigma = 0.$$

Отсюда

$$-\int\int_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma + \int\int_{[\sigma_1]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma + \int\int_{[\sigma_6]} 0 \cdot d\sigma = 0.$$

Следовательно,

$$\int\int_{[\sigma_1]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma = \int\int_{[\sigma]} (\mathbf{R}, \mathbf{v}^0) d\sigma.$$

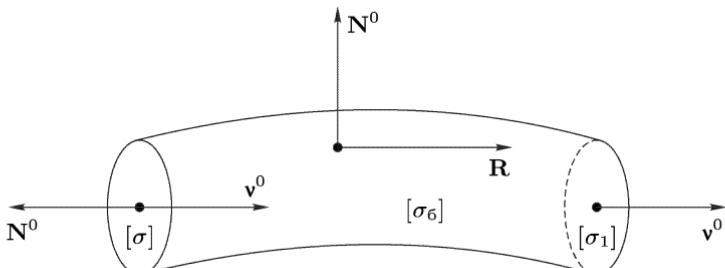


Рис. 94

Мы использовали символ  $\mathbf{v}^0$  для обозначения согласованных с направлением трубки полей единичной нормали на обоих сечениях. При соответственно ориентированных сечениях  $[\sigma]$  и  $[\sigma_1]$  результат представляется следующим образом:

$$\int\int_{[\sigma]} \mathbf{R} d\sigma = \int\int_{[\sigma_1]} \mathbf{R} d\sigma.$$

Теорема доказана.

## § 4.6. Задания для упражнений

1. Дайте определение криволинейной интегральной суммы.
2. Дайте определение криволинейного интеграла I рода.
3. Опишите метод вычисления криволинейного интеграла I рода.
4. Дайте определение циркуляции векторного поля. Опишите процедуру ее вычисления.
5. Опишите понятие криволинейного интеграла II рода.
6. Дайте определение поверхностного интеграла I рода. Опишите метод его вычисления.
7. Определите поток векторного поля через поверхность.
8. Напишите формулы для расчета потока векторного поля через поверхность (с обоснованием).
9. Опишите понятие поверхностного интеграла II рода.
10. Определите дивергенцию векторного поля.
11. Сформулируйте и докажите теорему Гаусса–Остроградского.
12. Выведите формулу Грина.
13. Дайте определение ротации векторного поля.
14. Приведите обоснование формулы Стокса.
15. Сформулируйте 4 свойства потенциального векторного поля.
16. Определите потенциал потенциального векторного поля.
17. Сформулируйте 3 свойства соленоидального векторного поля.
18. Определите векторный потенциал соленоидального векторного поля.

*Вычислите криволинейные интегралы I рода.*

19.  $\int\limits_{[L]} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$ , где  $[L]$  — первый виток конической винтовой линии  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$ .
20.  $\int\limits_{[L]} (5z - xy) ds$ , где  $[L]$  — часть дуги  $x = 3t$ ,  $y = 3t^2$ ,  $z = 2t^3$  с концами  $O(0; 0; 0)$  и  $A(3; 3; 2)$ .

21.  $\int\limits_{[L]} y^2 ds$ , где  $[L]$  — одна арка циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  
 $y = a(1 - \cos t)$ .
22.  $\int\limits_{[L]} xy ds$ , где  $[L]$  — отрезок прямой между точками  
 $A(0; 3; -4)$  и  $B(1; -1; 5)$ .
23.  $\int\limits_{[L]} \frac{ds}{x - y}$ , где  $[L]$  — отрезок прямой между точками  $A(0; -2)$  и  $B(4; 0)$ .
24.  $\int\limits_{[L]} (x + y) ds$ , где  $[L]$  — треугольный контур с вершинами  
 $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ .
25.  $\int\limits_{[L]} xy ds$ , где  $[L]$  — прямоугольный контур с вершинами  
 $O(0; 0)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(4; 2)$  и  $D(0; 2)$ .
26.  $\int\limits_{[L]} (y - x) ds$ , где  $[L]$  — дуга кубической параболы  $y = x^3$   
 между точками  $A(1; 1)$  и  $B(2; 8)$ .
27.  $\int\limits_{[L]} x^2 y ds$ , где  $[L]$  — дуга окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  
 лежащая в I четверти.
28.  $\int\limits_{[L]} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ , где  $[L]$  — меньшая дуга окружности  $r = a$ ,  
 ограниченная лучами  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .
29.  $\int\limits_{[L]} \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , где  $[L]$  — окружность  $x^2 + y^2 = 4x$ .
30.  $\int\limits_{[L]} \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$ , где  $[L]$  — первый виток винтовой линии  
 $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ .
31.  $\int\limits_{[L]} (x^{4/3} + y^{4/3}) ds$ , где  $[L]$  — астроида  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

32.  $\int\limits_{[L]} xy \, ds$ , где  $[L]$  — часть эллипса  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , лежащая в I четверти.

*Вычислите массу дуги кривой.*

33. Найдите массу участка кривой  $y = \ln x$  между точками с абсциссами  $x_1 = \sqrt{3}$  и  $x_2 = 2\sqrt{2}$ , если ее плотность  $\gamma(x, y)$  в каждой точке равна  $x^2$ .

34. Найдите массу дуги полуокружности  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ), если плотность дуги в каждой точке равна ординате этой точки.

35. Вычислите массу первого витка винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ , плотность которой в каждой точке равна расстоянию от начала координат до этой точки.

*Вычислите криволинейные интегралы II рода.*

36.  $\int\limits_{[L]} x \, dx + y \, dy + (x + y - 1) \, dz$ , где  $[L]$  — направленный отрезок прямой от точки  $A(1; 1; 1)$  до точки  $B(2; 3; 4)$ .

37.  $\int\limits_{[L]} 2xy \, dx + x^2 \, dy$ , где  $[L]$  — дуга параболы  $y^2 = x$  от точки  $O(0; 0)$  до точки  $B(1; 1)$ .

38.  $\int\limits_{[L]} (y^2 - z^2) \, dx + 2yz \, dy - x^2 \, dz$ , где  $[L]$  — кривая  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  от точки  $A$ , определяемой параметром  $t_1 = 0$ , до точки  $B$ , определяемой параметром  $t_2 = 1$ .

39.  $\int\limits_{[L]} yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz$ , где  $[L]$  — дуга винтовой линии  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $z = \frac{at}{2\pi}$ , где  $t$  меняется от 0 до  $2\pi$ .

40.  $\int\limits_{[L]} (x+y) \, dx + (x-y) \, dy$ , где  $[L]$  — эллипс, ориентированный против хода часовой стрелки.

41.  $\int\limits_{[L]} (2a-y) dx - (a-y) dy$ , где  $[L]$  — арка циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,

$y = a(1 - \cos t)$  от точки  $A$ , определяемой параметром  $t_1 = 0$ , до точки  $B$ , определяемой параметром  $t_2 = 2\pi$ .

42.  $\int\limits_{[L]} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , где  $[L]$  — часть кривой Вивиани

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

$(z \geq 0, a > 0)$ , пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси  $Ox$ .

*Вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R}$ .*

43. Определите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = x^2\mathbf{i} + \sqrt{xy}\mathbf{j}$  по дуге окружности  $x^2 + y^2 = 4$  от точки  $B(2; 0)$  до точки  $C(0; 2)$ .

44. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$  по дуге параболы  $x = y^2$  от точки  $O(0; 0)$  до точки  $A(4; 2)$ .

45. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = (x + 3y + 2z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$  по треугольнику с вершинами  $M(2; 0; 0)$ ,  $N(0; 3; 0)$ ,  $P(0; 0; 1)$ . Направление задано указанным порядком вершин.

46. Найдите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  по астроиде  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ . Направление обхода положительное.

*Вычислите поверхностные интегралы I рода.*

47.  $\iint\limits_{[\sigma]} (z + 2x + \frac{4}{3}y) d\sigma$ , где  $[\sigma]$  — часть плоскости  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} +$

$+ \frac{z}{4} = 1$  в I октанте.

48.  $\iint\limits_{[\sigma]} y d\sigma$ , где  $[\sigma]$  — полусфера  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

49.  $\iint\limits_{[\sigma]} (x^2 + y^2) d\sigma$ , где  $[\sigma]$  — часть конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

отсеченная плоскостью  $z = 1$ .

50.  $\int \int_{[\sigma]} x \, d\sigma$ , где  $[\sigma]$  — часть цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 4$ , отсеченная плоскостями  $z = 0$  и  $z = 1$ .

51.  $\int \int_{[\sigma]} xyz \, d\sigma$ , где  $[\sigma]$  — часть параболоида  $z = x^2 + y^2$ , отсеченная плоскостью  $z = 1$ .

52.  $\int \int_{[\sigma]} (xy + yz + zx) \, d\sigma$ , где  $[\sigma]$  — часть конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанная цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$ .

53.  $\int \int_{[\sigma]} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d\sigma$ , где  $[\sigma]$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

*Вычислите массу и координаты центра масс поверхности.*

54. Найдите массу полусферы  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , если плотность в каждой точке  $\gamma = z$ .

55. Вычислите массу параболической оболочки  $x^2 + y^2 = 2z$ ,  $z \leq 1$ , если плотность в каждой точке  $\gamma = z$ .

56. Найдите координаты центра масс однородной параболической оболочки  $2z = 4 - x^2 - y^2$ , расположенной над плоскостью  $Oxy$ .

*Вычислите поверхностные интегралы II рода.*

57. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  через часть плоскости  $\frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$ , расположенную в I октанте ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ). Нормаль образует острый угол с осью  $Oz$ .

58. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R} = (2z - x)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$  через часть плоскости  $x + 4y + z - 4 = 0$  в I октанте. Нормаль образует острый угол с осью  $Oz$ .

59.  $\int \int_{[\sigma]} xz \, dx dy + xy \, dy dz + yz \, dx dz$ , где  $[\sigma]$  — внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

60. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$  через боковую поверхность цилиндра  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Нормаль внешняя.

61. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z - y)\mathbf{k}$  через верхнюю половину сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  снизу вверх.

62. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R} = xyz\mathbf{i} - x^2z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  через коническую поверхность  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 2$  изнутри наружу.

63. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k}$  через поверхность параболоида  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$  снизу вверх.

$$64. \int\int_{[\sigma]} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy, \text{ где } [\sigma] \text{ — внеш-}$$

няя сторона конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

$$65. \int\int_{[\sigma]} yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz, \text{ где } [\sigma] \text{ — внешняя сторона}$$

части тела, ограниченной цилиндром  $x^2 + y^2 = 9$ , плоскостями  $z = 0$ ,  $z = 1$  и расположенного в I октанте.

$$66. \int\int_{[\sigma]} x^2 y^2 z dx dy, \text{ где } [\sigma] \text{ — верхняя сторона полусфера } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

*Вычислите дивергенцию векторного поля  $\mathbf{R}$ .*

$$67. \mathbf{R} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

$$68. \mathbf{R} = e^x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j} + zy\mathbf{k}.$$

$$69. \mathbf{R} = x^3\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + \cos x \cdot z\mathbf{k}.$$

$$70. \mathbf{R} = (x - y - 5)\mathbf{i} + (\cos x + y)\mathbf{j} + (e^{x^2} + z)\mathbf{k}.$$

*Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R}$  через замкнутую поверхность  $[\sigma]$ . Рекомендуем воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского.*

71. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{R} = xyz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$  через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Нормаль внешняя.

72. Определите поток векторного поля  $\mathbf{R} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$  через сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = x$  изнутри наружу.

73. Найдите поток векторного поля  $\mathbf{R} = (y + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (y^2 + 2z^2)\mathbf{k}$  через поверхность, ограниченную параболоидом  $z = 1 - x^2 - y^2$  и плоскостью  $z = 0$ . Нормаль внешняя.

74. Найдите поток векторного поля  $\mathbf{R} = (xz^2 + \sin y)\mathbf{i} + (x^2y + e^z)\mathbf{j} + (zy^2 + \sin x)\mathbf{k}$  через поверхность, ограниченную полусферой  $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$  и плоскостью  $y = 0$ . Нормаль внешняя.

*Вычислите циркуляцию векторного поля по замкнутому контуру  $[L]$ . Рекомендуем воспользоваться формулой Стокса.*

75. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (2y^2 + z^2)\mathbf{k}$  по контуру треугольника  $A(0; 0; 5), B(1; 0; 0), C(0; 1; 0)$ . Направление обхода положительное.

76. Найдите работу силы  $\mathbf{F} = (x^2 + yz)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$  по контуру треугольника  $A(0; 0; 2), B(1; 0; 0), C(0; 1; 0)$ . Направление обхода положительное.

77. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = (z^2 + 1)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (3xz + 5x + y^3)\mathbf{k}$  по эллипсу

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Направление обхода положительное.

78. Определите работу силы  $\mathbf{F} = (1 - 2y^3)\mathbf{i} + 2x^3\mathbf{j} + (y^3 - x^3 + z^3)\mathbf{k}$  по эллипсу

$$\begin{cases} x + y + z = 7, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$$

Направление обхода положительное.

79. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = xz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + x^3y\mathbf{k}$  по окружности

$$\begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Направление обхода положительное.

80. Найдите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{R} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$  по окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Направление обхода положительное.

Убедитесь в потенциальности векторного поля  $\mathbf{R}$  и найдите его скалярный потенциал.

81.  $\mathbf{R} = e^z(\mathbf{i} + \mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}).$

82.  $\mathbf{R} = -\left(\frac{x}{z}\right)^2\mathbf{i} + \frac{1}{z^2}\mathbf{j} + \left(2\frac{z}{x} - \frac{2y}{z^3}\right)\mathbf{k}.$

83.  $\mathbf{R} = -\frac{z}{(x - y)^2}\mathbf{i} + \frac{z}{(x - y)^2}\mathbf{j} + \frac{1}{x - y}\mathbf{k}.$

84.  $\mathbf{R} = \frac{1}{z}\mathbf{i} - \frac{3}{z}\mathbf{j} + \frac{3y - x}{z^2}\mathbf{k}.$

85.  $\mathbf{R} = -\frac{2}{(xyz)^2}\left(\frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\mathbf{j} + \frac{1}{z}\mathbf{k}\right).$

86.  $\mathbf{R} = \frac{y}{2 - z}\mathbf{i} + \frac{x}{2 - z}\mathbf{j} + \frac{xy}{(2 - z)^2}\mathbf{k}.$

87.  $\mathbf{R} = e^{x^2+y^2}(2xz\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + \mathbf{k}).$

88.  $\mathbf{R} = -\frac{1}{xy^2z^2}\left(\frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{2}{y}\mathbf{j} + \frac{2}{z}\mathbf{k}\right).$

Найдите функцию  $\Phi$  по полному дифференциальному  $d\Phi$ .

89.  $d\Phi = (2xyz + yz^2)dx + xz(x + z)dy + (x^2y + 2xyz)dz.$

90.  $d\Phi = \frac{2x}{z}dx - \frac{3}{z}dy - \frac{x^2 - 3y}{z^2}dz.$

91.  $d\Phi = \frac{1}{x^2}((y - \cos z)dx - xdy - x\sin zdz).$

92.  $d\Phi = (2xy + z^2)dx + (2yz + x^2)dy + (y^2 + 2xz)dz.$

Убедитесь в соленоидальности векторного поля  $\mathbf{R}$  и найдите его векторный потенциал.

93.  $\mathbf{R} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$

94.  $\mathbf{R} = -z\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}.$

95.  $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$

96.  $\mathbf{R} = (2y - 3xy^2z^2)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y^2z^3\mathbf{k}.$

97.  $\mathbf{R} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}.$

## Ответы к заданиям для упражнений

### Глава 1

16.  $\frac{T}{\pi} \cos \varphi_0$ . 17.  $7\frac{2}{3}$ . 18.  $5 - 5\sqrt[5]{16}$ . 19.  $e - \sqrt{e}$ . 20.  $7 + 2 \ln 2$ .  
21.  $10\frac{2}{3}$ . 22.  $\frac{\pi a^2}{4}$ . 23.  $\frac{\pi}{2} - 1$ . 24.  $\frac{\pi(9 - 4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ . 25. 1.  
26.  $\frac{e^\pi - 2}{5}$ . 27.  $\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$ . 28.  $\frac{\pi}{4}$ . 29.  $\ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}$ . 30.  $\frac{\pi}{6}$ .  
31.  $\frac{\pi}{2\omega}$ . 32.  $\frac{2(\sqrt{8} - 1)}{3}$ . 33.  $\frac{8}{15}$ . 34.  $\frac{848}{105}$ . 35.  $1 - \frac{2}{e}$ . 36.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 - \sqrt{3})$ . 37.  $6 - 2e$ . 38.  $3 - e$ . 39.  $5\frac{1}{3}$ . 40.  $2\pi + \frac{4}{3}$ ;  $6\pi - \frac{4}{3}$ . 41.  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ .  
42.  $\frac{3\pi a^2}{8}$ . 43.  $4\pi - 3\sqrt{3}$ . 44.  $3\pi a^2$ . 45.  $1\frac{1}{3}$ . 46.  $S_1 = S_3 = \pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3 - 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$ ;  $S_2 = 2(\pi - S_1)$ . 47.  $2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) + 4$ .  
48.  $\ln 3 - \frac{1}{2}$ . 49.  $\frac{2}{3}(10\sqrt{10} - 1)$ . 50.  $\frac{a\pi}{32} \left( 3\sqrt{16 + 9\pi^2} - \sqrt{16 + \pi^2} \right) + \frac{a}{2} \ln \frac{3\pi + \sqrt{16 + 9\pi^2}}{\pi + \sqrt{16 + \pi^2}}$ . 51.  $2\pi$ . 52.  $\frac{\pi^2 R}{2}$ . 53.  $6a$ . 54.  $\sqrt{4\pi^2 a^2 + 1}$ .  
55.  $2(\sqrt{17} + \ln(4 + \sqrt{17})) + \pi\sqrt{2}$ . 56.  $\frac{3\pi}{4}$ . 57.  $-4$ . 58.  $2 + \frac{1}{e}$ .  
59. Не существует. 60.  $\frac{1}{2}$ . 61.  $2\frac{1}{3}$ . 62. Не существует. 63. 0. 64. Не существует. 65.  $\pi$ .

### Глава 2

16.  $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ . 17.  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ .  
18.  $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy$ . 19.  $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}/4}^{\sqrt{1-x^2}/4} f(x, y) dy$ .

$$\begin{aligned}
 & 20. \int_{-2}^2 dx \int_{-3\sqrt{1-x^2/4}}^{3\sqrt{1-x^2/4}} f(x, y) dy. \quad 21. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x, y) dy. \\
 & 22. \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy + \\
 & + \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy. \quad 23. \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \\
 & + \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy.
 \end{aligned}$$

24. Область  $[S]$  ограничена прямыми  $x = -2$ ,  $y = x$  и гиперболой  $y = 1/x$ .

25. Область  $[S]$  ограничена прямыми  $y = -1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  и кривой  $y = \ln x$ .

$$26. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx. \quad 27. \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx.$$

$$28. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$29. \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^1 f(x, y) dx + \int_3^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx.$$

$$30. \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_1^{\sqrt{y-1}} f(x, y) dx. \quad 31. \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

$$32. \int_{-4}^{-1} dx \int_{\sqrt{-x}}^2 f(x, y) dy + \int_{-1}^3 dx \int_1^2 f(x, y) dy.$$

33.  $\int_0^{2\sqrt{2}} dy \int_{-1}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx + \int_{2\sqrt{2}}^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx.$

34.  $\int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y) dx + \int_1^{e^2} dy \int_{\ln y}^2 f(x, y) dx.$

35.  $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^1 f(x, y) dx.$

36.  $\int_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} dy \int_1^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y) dx.$

37.  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$

38.  $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx. \quad 39. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$

40.  $(e - 1)^2.$  41.  $-\frac{\pi}{16}.$  42.  $21\frac{85}{256}$  43.  $2\pi.$  44.  $4\frac{4}{15}.$  45.  $-9\frac{239}{243}.$

46.  $-2\frac{94}{169}.$  47. 3. 48.  $13\frac{13}{15}.$  49.  $1\frac{3}{5}.$  50.  $6\frac{2}{3}.$

51.  $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$

52.  $\int_0^{\operatorname{arctg} 1/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr +$   
 $+ \int_{\operatorname{arctg} 1/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$

53.  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$  54.  $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R f(r^2) r dr.$
55.  $\frac{1}{6}\pi a^3.$  56.  $\pi e^2(3e^2 - 1).$  57.  $\frac{1}{3}\pi R^3.$  58.  $\frac{8\pi\sqrt{2}}{9}.$  59.  $27\frac{35}{48}.$
60.  $3\frac{1}{6}.$  61. 1. 62.  $6(4\pi - 3\sqrt{3}).$  63. 36. 64.  $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.$  65.  $\frac{1}{4}(2\pi + 3\sqrt{3}).$  66.  $3\pi + 6.$  67.  $186\frac{2}{3}.$  68.  $\frac{48\sqrt{6}}{5}.$  69.  $53\frac{1}{3}.$  70.  $22\pi.$  71. 16.
72.  $\frac{\pi}{6}.$  73. 12. 74.  $\frac{81\pi}{32}.$  75. 45. 76.  $\frac{a^3}{3} \left(2\pi - \frac{8}{3}\right).$  77.  $\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 1).$
78.  $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1).$  79.  $\frac{16}{3}(2\sqrt{2} - 1).$  80.  $8\pi - 16.$  81.  $8\pi.$  82.  $2\pi a^2.$
83.  $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$  84.  $\pi\sqrt{2}.$  85.  $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1).$

### Глава 3

10. 6. 11.  $\frac{a^{11}}{110}.$  12.  $\frac{16}{315}.$  13.  $\frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right).$  14.  $e - 2.$  15.  $13\frac{1}{2}.$  16.  $\frac{13\pi}{4}.$
17. 8. 18.  $\frac{\pi}{8}.$  19.  $\frac{3}{35}.$  20.  $\int_1^5 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr.$
21.  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2}^5 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$
22.  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r^2-4}^{(4-r \cos \varphi - r \sin \varphi)/4} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$
23.  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr \int_0^5 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$  24.  $\frac{\pi}{15}.$  25.  $\frac{\pi}{2}.$
26.  $\frac{16\pi}{3}.$  27.  $\frac{3\pi}{2}.$  28.  $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$  30.  $\frac{4\pi R^5}{15}.$  31.  $\frac{4\pi}{15} (R^5 - r^5).$  32.  $\frac{\pi}{8}.$
33.  $26\frac{2}{3}\pi.$  34.  $\frac{7\pi}{12}.$  35.  $\frac{1}{3}\pi (b^3 - a^3) (2 - \sqrt{2}).$  36.  $\frac{4\pi R^5}{15}.$  37.  $\frac{2}{15}.$
38.  $112\pi.$  39.  $\frac{\pi}{8}.$  40.  $6\pi.$

## Глава 4

19.  $\frac{2\sqrt{2}}{3} ((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1)$ . 20.  $\frac{7}{4}$ . 21.  $\frac{256}{15}a^3$ . 22.  $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ .
23.  $\sqrt{5}\ln 2$ . 24.  $1 + \sqrt{2}$ . 25. 24. 26.  $\frac{1}{54}(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}) - \frac{1}{12}\left(12\sqrt{145} - 3\sqrt{10} + \ln\frac{12 + \sqrt{145}}{3 + \sqrt{10}}\right)$ . 27.  $\frac{R^4}{3}$ . 28.  $\frac{\pi}{4}ae^a$ .
29. 32. 30.  $\sqrt{2}\arctg 2\pi$ . 31.  $4a^{7/3}$ . 32.  $7\frac{3}{5}$ . 33.  $6\frac{1}{3}$ . 34. 2.
35.  $\sqrt{2}\left(\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)\right)$ . 36. 13. 37.  $\frac{1}{12}$ .
38.  $\frac{1}{35}$ . 39. 0. 40. 0. 41.  $\pi a^2$ . 42.  $-\frac{\pi a^3}{4}$ . 43.  $\frac{8}{15}(3\sqrt{2} - 5)$ .
44.  $7\frac{1}{3}$ . 45. -5. 46.  $\frac{3\pi a^2}{4}$ . 47.  $4\sqrt{61}$ . 48. 0. 49.  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ . 50. 0.
51.  $\frac{125\sqrt{5} - 1}{420}$ . 52.  $\frac{64\sqrt{2}}{15}$ . 53.  $4\pi$ . 54.  $\pi$ . 55.  $\frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$ .
56.  $C\left(0, 0, \frac{307 - 15\sqrt{5}}{310}\right)$ . 57. 4. 58.  $42\frac{2}{3}$ . 59.  $\frac{1}{8}$ . 60.  $16\pi$ . 61.  $54\pi$ .
62.  $-12\pi$ . 63.  $\frac{\pi}{2}$ . 64. 0. 65.  $18 + \frac{9\pi}{8}$ . 66.  $\frac{2\pi}{105}$ . 67.  $2(x + y + z)$ .
68.  $e^x - \sin y + y$ . 69.  $3x^2 + z + \cos x$ . 70. 3. 71.  $\frac{1}{120}$ . 72.  $\frac{\pi}{5}$ . 73.  $\pi$ .
74.  $\frac{2\pi}{5}$ . 75.  $\frac{5}{2}$ . 76.  $-\frac{1}{3}$ . 77.  $-5\pi$ . 78.  $\frac{81\pi}{2}$ . 79.  $4\sqrt{2}\pi$ . 80. 0. 81.  $(x + y)e^z$ . 82.  $\frac{z^2}{x} + \frac{y}{z^2}$ . 83.  $\frac{z}{x - y}$ . 84.  $\frac{x - 3y}{z}$ . 85.  $\frac{1}{(xyz)^2}$ . 86.  $\frac{xy}{2 - z}$ .
87.  $ze^{x^2+y^2}$ . 88.  $\frac{1}{xy^2z^2}$ . 89.  $x^2yz + xyz^2 + C$ . 90.  $\frac{x^2 - 3y}{z} + C$ .
91.  $\frac{1}{x}(\cos z - y) + C$ . 92.  $x^2y + z^2x + y^2z + C$ . 93.  $(y + z)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + \text{grad } \Phi$ . 94.  $\left(-xz - \frac{y^2}{2}\right)\mathbf{i} + \frac{z^2}{2}\mathbf{j} + \text{grad } \Phi$ . 95.  $2yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \text{grad } \Phi$ .
96.  $(-2xz)\mathbf{i} + (xy^2z^3 - 2yz)\mathbf{j} + \text{grad } \Phi$ . 97.  $yz\left(x^2 - \frac{1}{3}z^2\right)\mathbf{i} + xz\left(y^2 - \frac{1}{3}z^2\right)\mathbf{j} + \text{grad } \Phi$ .

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	6
Г л а в а 1. Определенный интеграл . . . . .	27
§ 1.1. Интегрируемая функция и ее определенный интеграл .	27
§ 1.2. Вычисление определенных интегралов . . . . .	45
§ 1.3. Некоторые геометрические приложения определенного интеграла . . . . .	55
§ 1.4. Несобственные интегралы . . . . .	65
§ 1.5. Задания для упражнений . . . . .	76
Г л а в а 2. Двойной интеграл . . . . .	81
§ 2.1. Интегрируемость и двойной интеграл функции двух переменных . . . . .	81
§ 2.2. Вычисление двойных интегралов . . . . .	100
§ 2.3. Геометрические приложения двойного интеграла . . . . .	132
§ 2.4. Задания для упражнений . . . . .	149
Г л а в а 3. Тройной интеграл . . . . .	155
§ 3.1. Определение и вычисление тройного интеграла . . . . .	155
§ 3.2. Преобразование тройного интеграла к новым переменным интегрирования . . . . .	163
§ 3.3. Некоторые приложения тройного интеграла . . . . .	181
§ 3.4. Задания для упражнений . . . . .	186
Г л а в а 4. Элементы теории поля . . . . .	192
§ 4.1. Криволинейные интегралы . . . . .	193
§ 4.2. Поверхностные интегралы . . . . .	202
§ 4.3. Дивергенция и ротация векторного поля . . . . .	217
§ 4.4. Потенциальное векторное поле . . . . .	225
§ 4.5. Соленоидальное векторное поле . . . . .	234
§ 4.6. Задания для упражнений . . . . .	243
Ответы к заданиям для упражнений . . . . .	251