Автоматика и телемеханика, № 3, 2011

Интеллектуальные системы управления

© 2011 г. М.В. БАЦЫН, канд. физ.-мат. наук,
В.А. КАЛЯГИН, д-р физ.-мат. наук
(Государственный университет – Высшая школа экономики, Нижегородский филиал)

АКСИОМАТИКА ИНДЕКСОВ ВЛИЯНИЯ В ЗАДАЧЕ ГОЛОСОВАНИЯ С КВОТОЙ

Предложена аксиоматика индексов влияния в задаче голосований с квотой. Ее основу составляют две аксиомы: аксиома аддитивности и аксиома диктатора. Установлено важное свойство: индекс влияния игрока может быть представлен в виде суммы вкладов коалиций, в которых он является ключевым. Вклады коалиций не зависят ни от весов участников, ни от квоты. Сформулированы и доказаны общая теорема о представлении индекса влияния, теорема о представлении индекса влияния анонимных участников.

1. Введение

Измерение влияния является эффективным инструментом анализа принятия решений. Широко используются классические способы измерения влияния с помощью индексов Банцафа и Шепли-Шубика [1, 2]. Особый интерес представляет аксиоматическое описание индексов влияния. Существующие аксиоматики построены в рамках теоретико-игровой модели простой игры [3, 4], которая задается списком выигрывающих коалиций. Индекс влияния рассматривается как вектор-функция, определенная на множестве всех простых игр. Основной задачей является аксиоматическое описание классических индексов влияния.

В настоящей работе предложена общая аксиоматика индекса влияния в задаче голосования с квотой. Задача голосования с квотой описывается заданием множества игроков N, их голосов ν_j, $j = 1, \ldots, n$ и квотой q для принятия решения. Набор $(\nu_1, \ldots, \nu_n; q)$ при фиксированном множестве N ($|N| = n$) называется **ситуацией голосования** [5]. Различным ситуациям соответствуют различные списки выигрывающих коалиций в модели простой игры. Аксиоматика формулируется на языке ситуаций голосования, что делает ее достаточно простой и прозрачной.

В основе предложенной аксиоматики лежит следующее положение: игрок имеет влияние в голосовании только в тех случаях, когда он является ключевым игроком в некоторой выигрывающей коалиции (выход игрока из коалиции делает ее проигрывающей). Это положение отражается в двух аксиомах: аксиоме аддитивности и аксиоме диктатора. На основе этих аксиом устанавливаются следующие фундаментальные особенности индексов влияния в задаче голосования:

1. Каждая выигрывающая коалиция, в которой игрок является ключевым, вносит в его индекс влияния вполне определенный вклад, не зависящий от ситуации голосования.

2. При дополнительном условии анонимности вклад каждой выигрывающей коалиции в индекс влияния любого игрока не зависит от этого игрока и от коалиции, а определяется только размером коалиции.

Эти особенности позволяют сформулировать и доказать общую теорему о представлении индекса влияния и теорему о представлении индекса влияния анонимных игроков. Предложенная в работе аксиоматика охватывает широкий класс индексов влияния, включающий индекс Банцафа, индекс Шепли–Шубика, индексы влияния, учитывающие предпочтения игроков [5].

2. Основные определения

Основной характеристикой участника голосования выступает его вес ν в голосовании, под которым обычно понимается принадлежащее ему число голосов (например, число голосов фракции в парламенте или число акций у акционера). В работе рассматриваются только голосования за принятие того или иного решения, в которых каждый участник может проголосовать только "да" (за принятие решения), или "нет" (против принятия решения). Решение считается принятым, если общий вес проголосовавших "за" превышает определенную квоту q ($\sum \nu_i > q$). Два наиболее распространенных значения q: 50% – простое большинство и 66% (иногда – 75%) – квалифицированное большинство [6].

В определении индекса влияния используются следующие понятия:

- Коалиция – некоторое множество игроков.
- Выигрывающая коалиция – коалиция, общий вес которой превышает квоту q.
- Проигрывающая коалиция – коалиция, общий вес которой не превышает квоты q.
- Ключевой игрок в коалиции – член коалиции, вместе с которым коалиция является выигрывающей, а без него становится проигрывающей.
- Значимая коалиция для игрока – коалиция, в которой данный игрок является ключевым.
- Болван (термин взят из бриджа) – игрок, не являющийся ключевым ни в одной коалиции. (Термин использовался впервые в [1].)

Будем обозначать через $\nu(S)$ общий вес коалиции S

$$\nu(S) = \sum_{i \in S} \nu_i.$$

Два наиболее известных и распространенных индекса влияния – это индекс Банцафа и индекс Шепли–Шубика. Для любого игрока можно определить набор коалиций, в которых он является ключевым. Индекс Банцафа для игрока i определяется формулой

$$\beta_i = \frac{b_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j},$$

где b_i – число различных коалиций, в которых игрок i является ключевым, а n – общее число игроков.

Индекс Шепли–Шубика для игрока i определяется формулой

$$\phi_i = \sum_S \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!},$$

где суммирование производится по всем коалициям S, в которых игрок i является ключевым, а $s = |S|$ – число игроков, входящих в коалицию S.

3. Общие аксиомы

Существующие подходы к описанию общих свойств индексов влияния основаны на теоретико-игровой модели простой игры [7]. Простая игра задается парой (N, u), где N – множество игроков, а u – функция выигрыша $u : 2^N \to \{0, 1\}$, которая определяет для любой коалиции игроков S, является ли коалиция выигрывающей ($u(S) = 1$), или нет ($u(S) = 0$). Эта функция должна обладать свойством монотонности

$$\forall S, T \subset N \quad S \subset T \;\;\Rightarrow\;\; u(S) \le u(T).$$

Множество всех выигрывающих коалиций в игре (N, u) обозначается через $W(u)$. Множество всех минимальных выигрывающих коалиций (удаление любого игрока делает такую коалицию проигрывающей) обозначается через $M(u)$. Индекс влияния определяется как вектор-функция $\vec{\Phi}(u)$.

Основные аксиомы индексов влияния были сформулированы в работе [3], новый взгляд на аксиоматику индексов влияния изложен в [4]. Основные аксиомы классических индексов влияния следующие:

Аксиома болвана. *Индекс влияния болвана в простой игре равен* 0.

Аксиома анонимности. *Для любой перестановки π множества N в простой игре (N, u) выполняется равенство*

$$\Phi_{\pi(i)}(u) = \Phi_i(\pi u), \quad \text{где} \quad \pi u(S) = u(\pi(S)).$$

Аксиома трансфера. *Для любых простых игр u и ω выполняется равенство*

$$\Phi(u) + \Phi(\omega) = \Phi(u \vee \omega) + \Phi(u \wedge \omega),$$
$$\textit{где} \quad (u \vee \omega)(S) = \max(u(S),\ \omega(S)), \quad (u \wedge \omega)(S) = \min(u(S),\ \omega(S)).$$

Аксиома трансфера отражает передачу влияния при объединении списков выигрывающих коалиций. Различные варианты аксиомы трансфера подробно рассмотрены в [4].

Задача голосования с квотой имеет свои особенности в рамках теоретико-игровой модели простой игры. Как показывает следующий пример, объединение двух списков выигрывающих коалиций, соответствующих двум различным ситуациям голосования, может оказаться списком выигрывающих коалиций, не соответствующим никакой ситуации голосования.

Пример. Пусть в игре 1 игроков A, B и C выигрывающими коалициями являются: AB, BC, ABC. Такая игра является голосованием с квотой, например, если взять веса A, B, C соответственно 2, 6, 2 и квоту 7. Пусть в игре 2 выигрывающими коалициями будут: A, AB, AC, ABC. Эта игра тоже является голосованием с квотой, например, если взять веса A, B, C соответственно 6, 2, 2 и квоту 5. Объединением этих игр будет игра с выигрывающими коалициями: A, AB, AC, BC, ABC. Но такого голосования не существует, потому что для этого вес A должен быть больше квоты. Но тогда BC не может быть выигрывающей коалицией. Иначе итог голосования будет неоднозначен, если A проголосует "за", а B и C – "против".

Таким образом, естественной является задача описания общих свойств индексов влияния для задачи голосования с квотой на языке ситуаций голосования. В настоящей работе для описания индексов влияния в задаче голосования с квотой предлагается использовать две аксиомы: аксиому диктатора и аксиому аддитивности. Аксиома аддитивности сформулирована в терминах выигрывающих коалиций, в которых данный участник голосования является ключевым (значимые коалиции), и является аналогом общей аксиомы трансфера в модели простой игры. Для вывода общих свойств индексов влияния из двух основных аксиом будем исследовать структуру множества значимых коалиций для игрока в задаче голосования с квотой (теоремы 1 и 2). В результате получается общая теорема о представлении индекса влияния (теорема 6). Добавление к двум основным аксиомам аксиомы анонимности существенно упрощает представление индекса влияния (теорема 10).

3.1. Относительность индексов влияния

Индекс влияния – это относительная величина, т.е. смысл имеют не сами абсолютные значения индекса влияния, а отношение между ними. Иначе говоря, влияние игроков в следующих двух ситуациях одинаково: 1) три игрока A, B и C имеют индексы влияния Φ_A, Φ_B, Φ_C; 2) эти три игрока A, B и C имеют индексы влияния $k\Phi_A$, $k\Phi_B$, $k\Phi_C$.

Определение. Два индекса влияния Φ *и* Ψ ***эквивалентны*** *тогда и только тогда, когда для любой ситуации в голосовании* $(\nu_1, \ldots, \nu_n; q)$ *оба индекса дают игрокам одинаковые доли влияния (при этом абсолютные значения индексов могут отличаться):*

$$\forall i = \overline{1, n} \quad \frac{\Phi_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j} = \frac{\Psi_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Psi_j}.$$

3.2. Однозначность голосования

Свойство однозначности голосования. Если коалиция T *выигрывающая и ее подкоалиция* $S \subset T$ *тоже выигрывающая, тогда коалиция* $T \backslash S$ *должна быть проигрывающей:*

$$\forall S, T \;\; S \subset T, \, \nu(S) > q, \, \nu(T) > q \, \Rightarrow \, \boldsymbol{\nu}(T \backslash S) \leq q.$$

Это свойство представляет собой формулировку свойства супераддитивности простых игр на языке задачи голосования. Оно означает, что голоса игроков любой выигрывающей коалиции однозначно определяют результат голосования: если они проголосуют “за”, то решение будет принято, а если “против”, то решение будет отклонено.

Пример. Пусть 3 игрока A, B и C имеют веса 10, 10 и 10. Тогда квота $q = 9$ не обеспечивает однозначности голосования, так как в этом случае коалиция $T = ABC$ – выигрывающая коалиция, ее подкоалиция $S = AB$ – тоже выигрывающая, но и коалиция $T \backslash S = C$ – снова выигрывающая коалиция. Квота $q = 11$ будет обеспечивать однозначность голосования.

Если квота составляет больше 50% от суммы весов всех n игроков:

$$q > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \nu_i,$$

то свойство однозначности голосования выполняется. Приведенный пример показывает ($q = 11$), что это условие не является необходимым для однозначности голосования, хотя и является достаточным [8].

Во всех дальнейших рассуждениях и доказательствах будем считать, что свойство однозначности голосования выполняется.

Т е о р е м а 1. *Для любой коалиции, в которую входит данный игрок и хотя бы еще один другой игрок, всегда можно найти ситуацию, в которой эта коалиция будет единственной значимой коалицией для данного игрока:*

$$\forall S,\, i \in S,\, S \neq \{i\} \quad \exists\, (\nu_1, \ldots, \nu_n;\, q) : \begin{cases} \nu(S) > q \\ \nu(S) - \nu_i \leq q \end{cases}$$

$$и \quad \nexists T \neq S,\, i \in T \begin{cases} \nu(T) > q \\ \nu(T) - \nu_i \leq q. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем конструктивное доказательство этого утверждения. Обозначим коалицию, которая должна быть единственной значимой для игрока i, через S. И пусть в нее входит $k \geq 2$ игроков, а всего есть n игроков.

Выберем веса игроков и квоту следующим образом:

$$\begin{aligned} &\forall j \notin S \;\; \nu_j = 1, \\ &\nu_i = 1, \\ &\forall j \in S,\; j \neq i \quad \nu_j = n - k + 1, \\ &q = (k-1)(n-k+1) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Такая ситуация возможна, потому что она обладает свойством однозначности голосования (квота превышает половину суммарного веса игроков):

$$\begin{aligned} &q = (k-1)(n-k+1) + \frac{1}{2}, \\ &\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \nu_j = \frac{1}{2}\left(n - k + 1 + (k-1)(n-k+1)\right) = \frac{k}{2}(n-k+1), \\ &q = k(n-k+1) - \left(n - k + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{k}{2}(n-k+1) + \frac{k}{2}(n-k+1) - \left(n - k + \frac{1}{2}\right), \\ &q = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \nu_j + \left(\frac{k}{2} - 1\right)(n-k) + \frac{k-1}{2} > \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \nu_j, \quad \text{так как} \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Докажем, что в этой ситуации коалиция S действительно будет единственной значимой для игрока i. Коалиция S будет значимой для i, потому что

$$\begin{cases} \nu(S) = (k-1)(n-k+1) + 1 > q, \\ \nu(S) - \nu_i = (k-1)(n-k+1) < q. \end{cases}$$

Рассмотрим все остальные выигрывающие коалиции, включающие игрока i, и докажем, что ни одна из них не является значимой для него. Покажем, что любая выигрывающая коалиция T, включающая игрока i, должна содержать и всех остальных игроков из S. Допустим обратное: пусть один из этих игроков не входит в T. Максимально возможной такой коалицией будет коалиция из всех игроков, кроме одного из S. А ее вес будет равен

$$\nu(T) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j - (n-k+1) = (k-1)(n-k+1) < q.$$

Но этот вес меньше квоты и такая коалиция не может быть выигрывающей. Значит, любая выигрывающая коалиция T включает всех игроков из S. Кроме игроков из S коалиция T содержит хотя бы одного игрока $j \notin S$. Веса всех таких игроков равны 1, и вес игрока i тоже равен 1. Значит,

$$\nu(T) \geq \nu(S) + 1 \Rightarrow \nu(T) - \nu_i \geq \nu(S) + 1 - 1 > q.$$

Таким образом, игрок i не является ключевым в коалиции T и S – единственная его значимая коалиция.

Пример. Построим ситуацию для голосования восьми игроков A, B, C, D, E, F, G, H, в которой игрок A будет ключевым только в коалиции $ABCDE$ (из 5 игроков). Для этого надо положить веса A, F, G, H равными 1, веса B, C, D, E равными $8 - 5 + 1 = 4$, а квоту равной $4 \cdot 4 + 0{,}5 = 16{,}5$.

Теорема 2. Для любой ситуации, в которой игрок является ключевым в некотором непустом множестве коалиций W, всегда существует такая коалиция $\omega \in W$, что можно найти другую ситуацию, в которой этот игрок будет ключевым в тех же коалициях, кроме ω.

Доказательство. Пусть игрок i входит в коалиции $\omega_1, \ldots, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_{k+m}$, $\omega_{k+m+1}, \ldots, \omega_l$, упорядоченные по весу:

$$\begin{aligned}
&\nu(\omega_1) \leq \ldots \leq \nu(\omega_k) \leq q < \nu(\omega_{k+1}) \leq \ldots \leq \nu(\omega_{k+m}) \leq \\
&\leq q + \nu_i < \nu(\omega_{k+m+1}) \leq \ldots \leq \nu(\omega_l) \Leftrightarrow \nu(\omega_1 \backslash \{i\}) \leq \ldots \leq \nu(\omega_k \backslash \{i\}) \leq \\
&\leq q - \nu_i < \nu(\omega_{k+1} \backslash \{i\}) \leq \ldots \leq \nu(\omega_{k+m} \backslash \{i\}) \leq \\
&\leq q < \nu(\omega_{k+m+1} \backslash \{i\}) \leq \ldots \leq \nu(\omega_l \backslash \{i\}).
\end{aligned}$$

Здесь коалиции $\omega_1, \ldots, \omega_k$ являются проигрывающими, коалиции $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_{k+m}$ – значимыми для игрока i и коалиции $\omega_{k+m+1}, \ldots, \omega_l$ – выигрывающими, но не значимыми для i.

Докажем, что можно так изменить квоту и веса игроков, чтобы игрок i остался ключевым во всех коалициях, кроме ω_{k+1}. Для этого положим квоту равной: $q' = q + \Delta$, а веса всех игроков, кроме входящих в коалицию ω_{k+1}, увеличим на некоторую маленькую величину Δ_0:

$$\begin{aligned}
&\forall j \in \omega_{k+1} \quad \nu'_j = \nu_j, \\
&\forall j \notin \omega_{k+1} \quad \nu'_j = \nu_j + \Delta_0.
\end{aligned}$$

Необходимо получить следующие веса коалиций:

$$\begin{aligned}
&\max\left(\nu'(\omega_1 \backslash \{i\}), \ldots, \nu'(\omega_k \backslash \{i\})\right) \leq \nu(\omega_{k+1} \backslash \{i\}) = \\
&= q' - \nu'_i < \min\left(\nu'(\omega_{k+2} \backslash \{i\}), \ldots, \nu'(\omega_{k+m} \backslash \{i\})\right) \leq \\
&\leq \max\left(\nu'(\omega_{k+2} \backslash \{i\}), \ldots, \nu'(\omega_{k+m} \backslash \{i\})\right) \leq q' = \\
&= q + \Delta < \min\left(\nu'(\omega_{k+m+1} \backslash \{i\}), \ldots, \nu'(\omega_l \backslash \{i\})\right).
\end{aligned}$$

Поскольку был увеличен вес каждого игрока на Δ_0, кроме входящих в коалицию ω_{k+1}, то вес каждой коалиции увеличится на величину $t\Delta_0$, где t – это число игроков, входящих в эту коалицию, у которых вес был увеличен, $1 \leq t < n$ (n – число всех игроков). Поэтому

$$\begin{aligned}
&\forall j,\ \omega_j \subset \omega_{k+1} \Rightarrow \nu'(\omega_j) = \nu(\omega_j),\\
&\forall j,\ \omega_j \not\subset \omega_{k+1} \Rightarrow \nu(\omega_j) + \Delta_0 \le \nu'(\omega_j) < \nu(\omega_j) + n\Delta_0,\\
&\max(\nu'(\omega_1\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_k\backslash\{i\})) < \max(\nu(\omega_1\backslash\{i\}),\ldots,\nu(\omega_k\backslash\{i\})) + n\Delta_0 =\\
&= \nu(\omega_k\backslash\{i\}) + n\Delta_0,\\
&\min(\nu'(\omega_{k+2}\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_{k+m}\backslash\{i\})) \ge \min(\nu(\omega_{k+2}\backslash\{i\}),\ldots,\nu(\omega_{k+m}\backslash\{i\})) + \Delta_0 =\\
&= \nu(\omega_{k+2}\backslash\{i\}) + \Delta_0 > \nu(\omega_{k+1}\backslash\{i\}),\\
&\max(\nu'(\omega_{k+2}\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_{k+m}\backslash\{i\})) < \max(\nu(\omega_{k+2}\backslash\{i\}),\ldots,\nu(\omega_{k+m}\backslash\{i\})) + n\Delta_0 =\\
&= \nu(\omega_{k+m}\backslash\{i\}) + n\Delta_0 \le q + n\Delta_0,\\
&\min(\nu'(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_l\backslash\{i\})) \ge \min(\nu(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}),\ldots,\nu(\omega_l\backslash\{i\})) + \Delta_0 =\\
&= \nu(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}) + \Delta_0.
\end{aligned}$$

Тогда чтобы получить нужные веса коалиций, достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \nu(\omega_k\backslash\{i\}) + n\Delta_0 \le \nu(\omega_{k+1}\backslash\{i\}),\\ q + n\Delta_0 \le q + \Delta,\\ \nu(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}) + \Delta_0 > q + \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_0 \le \dfrac{\nu(\omega_{k+1}\backslash\{i\}) - \nu(\omega_k\backslash\{i\})}{n},\\ \Delta_0 \le \dfrac{\Delta}{n},\\ \Delta < \nu(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}) - q + \Delta_0\,. \end{cases}$$

Так как $\nu(\omega_{k+1}\backslash\{i\}) > \nu(\omega_k\backslash\{i\})$, а $\nu(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}) > q$, то эта система имеет множество решений. Вот, например, одно из них:

$$\begin{cases} \Delta = \nu(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}) - q,\\ \Delta_0 = \min\left(\dfrac{\Delta}{n}, \dfrac{\nu(\omega_{k+1}\backslash\{i\}) - \nu(\omega_k\backslash\{i\})}{n}\right). \end{cases}$$

При таком изменении квоты и весов игроков получим то, что требовалось:

$$\begin{aligned}
&\max(\nu'(\omega_1\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_k\backslash\{i\})) \le \nu(\omega_{k+1}\backslash\{i\}) = q' - \nu'_i <\\
&< \min(\nu'(\omega_{k+2}\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_{k+m}\backslash\{i\})) \le\\
&\le \max(\nu'(\omega_{k+2}\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_{k+m}\backslash\{i\})) \le\\
&\le q' = q + \Delta < \min(\nu'(\omega_{k+m+1}\backslash\{i\}),\ldots,\nu'(\omega_l\backslash\{i\})) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \max(\nu'(\omega_1),\ldots,\nu'(\omega_k)) \le \nu(\omega_{k+1}) =\\
&= q' < \min(\nu'(\omega_{k+2}),\ldots,\nu'(\omega_{k+m})) \le\\
&\le \max(\nu'(\omega_{k+2}),\ldots,\nu'(\omega_{k+m})) \le q' + \nu'_i < \min(\nu'(\omega_{k+m+1}),\ldots,\nu'(\omega_l))\,.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что игрок i остался ключевым во всех коалициях, кроме ω_{k+1}.

3.4. Аксиома диктатора

Определение. *Для заданной ситуации голосования диктатором называется игрок, вес которого превышает квоту.*

Аксиома диктатора. *Если в ситуации голосования имеется диктатор, то его влияние положительно*, $\Phi > 0$.

Игрок реально влияет на исход голосования, только когда он ключевой. Чем больше случаев, в которых игрок является ключевым, тем больше должно быть его влияние.

Далее в аксиоме рассматривается абсолютное (ненормированное) значение влияния.

А к с и о м а а д д и т и в н о с т и. *Если в ситуации 1 игрок A – ключевой в некотором множестве коалиций W^1, в ситуации 2 A – ключевой в множестве коалиций W^2, а в ситуации 3 A – ключевой в множестве коалиций $W^3 = W^1 \cup W^2$ и множества коалиций W^1 и W^2 не пересекаются ($W^1 \cap W^2 = \varnothing$), то влияние A в ситуации 3 равно сумме его влияний в первых двух, т.е.*

$$\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A).$$

Рассмотрим пример с тремя игроками A, B и C, имеющими веса 34, 33 и 33. Найдем влияние игрока A в трех ситуациях, различающихся квотой q. Пусть в 1-й ситуации $q = 51$, во 2-й $q = 75$ и в 3-й $q = 67$. Выпишем все коалиции, в которых A – ключевой игрок в рассматриваемых трех ситуациях: 1) AB, AC; 2) ABC; 3) AB, AC, ABC. По аксиоме аддитивности получаем: $\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A)$. Ненормированные индексы Банцафа $\beta_i = b_i$ и Шепли–Шубика $\phi_i = \sum\limits_{i \in S} (s-1)!(n-s)!$ удовлетворяют этой аксиоме:

$$\beta^1(A) = 2, \quad \beta^2(A) = 1, \quad \beta^3(A) = 3 = \beta^1(A) + \beta^2(A),$$
$$\phi^1(A) = 2, \quad \phi^2(A) = 2, \quad \phi^3(A) = 4 = \phi^1(A) + \phi^2(A).$$

А вот индекс влияния, зависящий только от веса игрока, например $\Phi(A) = \nu_A$, не будет удовлетворять аксиоме аддитивности, и приведенный пример доказывает это. Для такого индекса в данном примере получаем

$$\Phi^1(A) = \Phi^2(A) = \Phi^3(A) = 34.$$

Из аксиом диктатора и аддитивности далее выводятся свойство монотонности индекса влияния, свойство отсутствия влияния, свойство равенства влияний, свойство диктатора и общая теорема о представлении.

3.5.1. Свойство отсутствия влияния.

Т е о р е м а 3. *При выполнении аксиомы аддитивности, если игрок не является ключевым ни в одной коалиции, то его индекс влияния равен* 0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим обратное: пусть индекс влияния игрока A в ситуации 1, в которой он не является ключевым ни в одной коалиции, равен некоторому числу $\Phi^1(A) > 0$. Рассмотрим ситуацию 2, в которой A является ключевым только в одной коалиции ω и имеет индекс влияния $\Phi^2(A)$. По теореме 1 такая ситуация существует.

Тогда по аксиоме аддитивности в ситуации 3, полностью совпадающей с ситуацией 2 (поскольку в ситуации 1 множество коалиций, где A – ключевой, пусто), индекс влияния A должен равняться сумме: $\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A) > \Phi^2(A)$. Но так как ситуация 3 полностью совпадает с ситуацией 2, то и индексы влияния в этих ситуациях должны совпадать: $\Phi^3(A) = \Phi^2(A)$. Значит, исходное предположение неверно, и $\Phi^1(A) = 0$.

3.5.2. Свойство диктатора.

Т е о р е м а 4. *Если выполнены аксиомы диктатора и аддитивности, то диктатору принадлежит 100% влияния в голосовании (все остальные игроки не имеют влияния).*

Доказательство. Обозначим вес диктатора через V. Так как по определению V больше квоты q, то по свойству однозначности голосования суммарный вес всех остальных игроков не превосходит q. Рассмотрим любого такого игрока i и докажем, что он не будет ключевым ни в одной выигрывающей коалиции, т.е.

$$\forall \omega \;\; i \in \omega, \;\; \nu(\omega) > q \quad \Rightarrow \quad \nu(\omega) - \nu_i > q.$$

В любую выигрывающую коалицию должен входить диктатор, так как в противном случае ее вес не превзойдет q, даже если в нее войдут все остальные игроки. Но тогда

$$\nu(\omega) \geq \nu_i + V \quad \Rightarrow \quad \nu(\omega) - \nu_i \geq V > q,$$

т.е. любой игрок i не является ключевым ни в какой коалиции.

По свойству отсутствия влияния (теорема 3) влияние всех игроков, кроме диктатора, равно 0. А по аксиоме диктатора влияние диктатора ненулевое. Таким образом, диктатору принадлежат все 100% влияния в голосовании.

3.5.3 Свойство равенства влияния.

Теорема 5. *При выполнении аксиом диктатора и аддитивности, если в двух различных ситуациях 1 и 2 игрок A является ключевым в одном и том же множестве коалиций: $W^1 = W^2$, то его индекс влияния в обеих ситуациях одинаков: $\Phi^1(A) = \Phi^2(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим ситуацию 0, в которой A не является ключевым ни в одной коалиции. Согласно свойству отсутствия влияния его индекс влияния равен 0: $\Phi^0(A) = 0$. Так как множество коалиций, где A – ключевой, в ситуации 0 пусто: $W^0 = \phi$, то множество коалиций, где A – ключевой, в ситуации 2 фактически равно $W^2 = W^1 \cup W^0$. По аксиоме аддитивности получаем: $\Phi^2(A) = \Phi^1(A) + \Phi^0(A) = \Phi^1(A)$.

3.5.4. Общая теорема о представлении.

Теорема 6. *При выполнении аксиом диктатора и аддитивности индекс влияния игрока A, ключевого в коалициях $\omega_1, \ldots, \omega_k$, не зависит от ситуации, а зависит только от набора ключевых коалиций и равен $C_A(\omega_1) + \ldots + C_A(\omega_k)$, где $C_A(\omega) \not\equiv 0$ – функция, определяющая вклад коалиции ω в индекс влияния ее ключевого игрока A.*

Доказательство. В соответствии со свойством равенства влияний в любой ситуации 1 (независимо от весов игроков и квоты), в которой A является ключевым только в одной коалиции ω_i, он будет иметь один и тот же индекс влияния $\Phi^1(A)$. Т.е. этот индекс не зависит от весов игроков и квоты, а зависит только от игрока и от коалиции ω_i, в которой он ключевой. Тогда этот индекс равен значению некоторой функции $C_A(\omega_i) \geq 0$. Это значение неотрицательно, потому что индекс влияния не может быть отрицательным.

Замечание. По теореме 1 такая ситуация 1 существует для любой коалиции ω, кроме $\omega = \{A\}$. Случай $\omega = \{A\}$ означает, что A – диктатор, так как его вес превышает квоту. Этот случай полностью описывается свойством диктатора (теорема 4). Это свойство показывает, что абсолютная величина влияния диктатора не важна. Важно только то, что его влияние ненулевое. Поэтому если A – диктатор, то можно положить его влияние равным $C_A(\{A\}) + C_A(\{AB\}) + \ldots + C_A(\{AB\ldots\})$. Так как в эту сумму входят вклады всех возможных коалиций, включающих A, и $C_A(\omega) \not\equiv 0$, то эта сумма ненулевая. Таким образом, для случая, когда игрок является диктатором, данная теорема выполняется.

Пусть коалиции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ упорядочены по возрастанию весов. По теореме 2 существует ситуация 2, в которой A будет ключевым во всех тех же коалициях, кроме первой: $\omega_2, \ldots, \omega_k$. Тогда по аксиоме аддитивности индекс влияния A равен:

$$\Phi(A) = C_A(\omega_1) + \Phi^2(A),$$

где $\Phi^2(A)$ – индекс влияния A во 2-й ситуации. Далее по теореме 2 снова существует ситуация 3, в которой A будет ключевым в коалициях $\omega_3, \ldots, \omega_k$, и по аксиоме аддитивности

$$\Phi^2(A) = C_A(\omega_2) + \Phi^3(A).$$

И так далее до последней коалиции, для которой получаем

$$\Phi^{k-1}(A) = C_A(\omega_{k-1}) + \Phi^k(A),$$

где $\Phi^k(A)$ – индекс влияния A в ситуации, в которой A – ключевой только в коалиции ω_k. Значит, $\Phi^k(A) = C_A(\omega_k)$. Складывая все слагаемые, имеем:

$$\Phi(A) = C_A(\omega_1) + C_A(\omega_2) + \ldots + C_A(\omega_k).$$

3.5.5. Свойство монотонности.

Теорема 7. *При выполнении аксиом диктатора и аддитивности, если две ситуации 1 и 2 отличаются только тем, что вес игрока A в ситуации 2 больше, чем в ситуации 1: $\nu_A^2 > \nu_A^1$, то и его влияние во 2-й ситуации будет не меньше, чем в 1-й: $\Phi^2(A) \geq \Phi^1(A)$.*

Доказательство. Обозначим набор всех коалиций, в которых игрок A является ключевым в ситуации 1, через W_1, а в ситуации 2 – через W_2. Докажем, что $W_1 \subset W_2$. Рассмотрим некоторую коалицию $\omega \in W_1$. В этой коалиции игрок A является ключевым в 1-й ситуации, что означает, что ω – выигрывающая коалиция, а $\omega \backslash A$ – проигрывающая.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\omega\backslash A} \nu_i < q, \\ \sum\limits_{i\in\omega\backslash A} \nu_i + \nu_A^1 \geq q. \end{cases}$$

Вес игрока во 2-й ситуации больше

$$\nu_A^2 > \nu_A^1 \ \Rightarrow \ \sum_{i\in\omega\backslash A} \nu_i + \nu_A^2 > \sum_{i\in\omega\backslash A} \nu_i + \nu_A^1 \geq q.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in\omega\backslash A} \nu_i < q, \\ \sum\limits_{i\in\omega\backslash A} \nu_i + \nu_A^2 \geq q. \end{cases}$$

Т.е. и в ситуации 2 ω – выигрывающая коалиция, а $\omega \backslash A$ – проигрывающая. Значит, A – ключевой игрок коалиции ω и во 2-й ситуации. Получили

$$\forall \omega \in W_1 \ \Rightarrow \ \omega \in W_2.$$

Значит, $W_1 \subset W_2$, и тогда либо $W_2 = W_1$ и $\Phi^2(A) = \Phi^1(A)$, либо $W_2 = W_1 \cup$ $\cup \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Из общей теоремы о представлении имеем:

$$\Phi^2(A) = \Phi^1(A) + C_A(\omega_1) + \ldots + C_A(\omega_k) \geq \Phi^1(A).$$

Индексы влияния анонимных игроков должны зависеть только от квоты и весов игроков. Таким образом, игроки становятся в каком-то смысле обезличенными и два игрока, имеющие одинаковый вес, фактически, ничем не отличаются друг от друга. Любая перестановка весов игроков вызывает такую же перестановку их индексов влияния.

Аксиома анонимности. Если две ситуации 1 и 2 отличаются друг от друга, только тем, что веса двух игроков A и B поменялись местами: $\nu_A^2 = \nu_B^1$, $\nu_B^2 = \nu_A^1$, то и индексы влияния этих игроков поменяются местами: $\Phi^2(A) = \Phi^1(B)$, $\Phi^2(B) = \Phi^1(A)$.

Из этой аксиомы следуют свойства независимости вклада коалиции и зависимости вклада коалиции от размера.

3.6.1. Свойство независимости вклада коалиции.

Теорема 8. При выполнении аксиом диктатора, аддитивности и анонимности вклад коалиции в индекс влияния ее ключевого игрока не зависит от этого игрока и его веса. Другими словами, если игроки A и B ключевые в некоторой коалиции ω, то ее вклады в их индексы влияния равны, т.е.: $C_A(\omega) = C_B(\omega) = C(\omega)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, в котором A и B – ключевые игроки, только в одной коалиции ω. Тогда по общей теореме о представлении $\Phi(A) = C_A(\omega)$, $\Phi(B) = C_B(\omega)$.

Теперь поменяем веса игроков A и B: $\nu'_A = \nu_B$, $\nu'_B = \nu_A$. По аксиоме анонимности их индексы влияния тоже поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B) = C_B(\omega)$, $\Phi'(B) = \Phi(A) = C_A(\omega)$.

Теперь докажем, что после изменения весов игроки A и B остались ключевыми только в коалиции ω. Ясно, что от того, что A и B поменялись весами, вес ν_ω коалиции ω, в которую они оба входят, не изменился. A был ключевым в ω, следовательно: $\nu_\omega - \nu_A \le q$, $\nu'_B = \nu_A \Rightarrow \nu_\omega - \nu'_B \le q$. Значит, B после изменения весов остался ключевым в ω. Аналогично B был ключевым в ω: $\nu_\omega - \nu_B \le q$, $\nu'_A = \nu_B \Rightarrow \nu_\omega - \nu'_A \le q$. Т.е. и A после изменения весов тоже остался ключевым в ω.

Осталось доказать, что после изменения весов не могло появиться другой коалиции, в которой A или B стал бы ключевым. Предположим обратное: существует коалиция $\omega^* \ne \omega$, в которой A стал ключевым:

$$\exists \omega^* \ne \omega \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*} > q, \\ \nu_{\omega^*} - \nu'_A \le q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*\setminus A} + \nu'_A > q, \\ \nu_{\omega^*\setminus A} \le q. \end{cases}$$

Если $B \notin \omega^*$, то так как $\nu'_A = \nu_B$, получаем:

$$\begin{cases} \nu_{\omega^*\setminus A} + \nu_B > q, \\ \nu_{\omega^*\setminus A} \le q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*\setminus A\cup B} > q, \\ \nu_{\omega^*\setminus A} \le q. \end{cases}$$

Т.е. B был ключевым до изменения весов в коалиции $\omega^*\setminus A \cup B$. Эта коалиция не может совпадать с ω, так как в нее не входит игрок A. Но B был ключевым только в ω, а значит, предположение $B \notin \omega^*$ неверно.

Рассмотрим случай $B \in \omega^*$. Имеем:

$$\begin{cases} \nu_{\omega^*} > q, \\ \nu_{\omega^*} - \nu'_A \le q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*} > q, \\ \nu_{\omega^*} - \nu_B \le q. \end{cases}$$

Это означает, что B был ключевым в коалиции $\omega^* \ne \omega$ до изменения весов. Снова получили противоречие, и значит, исходное предположение, что существует коалиция $\omega^* \ne \omega$, в которой A стал ключевым после изменения весов, неверно. Аналогично доказывается соответствующее утверждение и для игрока B.

Таким образом, A и B остались ключевыми только в одной коалиции ω. Тогда по общей теореме о представлении их индексы влияния стали $\Phi'(A) = C_A(\omega)$, $\Phi'(B) = C_B(\omega)$. Но, как было получено выше, $\Phi'(A) = C_B(\omega)$, $\Phi'(B) = C_A(\omega)$. Следовательно, $C_A(\omega) = C_B(\omega)$. Так как $\forall A, B \in \omega$, $C_A(\omega) = C_B(\omega)$, то можно этот вклад коалиции ω в индексы влияния ее ключевых игроков обозначить просто как $C(\omega)$.

3.6.2. Свойство зависимости вклада коалиции от размера.

Теорема 9. *При выполнении аксиом диктатора, аддитивности и анонимности любые коалиции с одинаковым числом их участников дают одинаковый вклад в индексы влияния своих ключевых игроков:* $\forall v, \omega,\ |v| = |\omega| = k \Rightarrow C(v) = C(\omega) = C(k)$.

Доказательство. Пусть есть некоторая проигрывающая коалиция ω, которую игроки A и B делают выигрывающей. Т.е. игрок A является ключевым в коалиции $\omega \cup A$, а B – в коалиции $\omega \cup B$. Пусть также нет других таких коалиций, т.е. A и B – ключевые только в одной коалиции. По общей теореме о представлении и свойству независимости вклада коалиции индексы влияния этих игроков равны: $\Phi_A = C(\omega \cup A)$, $\Phi_B = C(\omega \cup B)$.

Теперь поменяем веса игроков A и B местами: $\nu'_A = \nu_B$, $\nu'_B = \nu_A$. По аксиоме анонимности их индексы влияния тоже поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B) = C(\omega \cup B)$, $\Phi'(B) = \Phi(A) = C(\omega \cup A)$.

A был ключевым игроком в коалиции $\omega \cup A$. Это означает:

$$\begin{cases} \nu_\omega \le q, \\ \nu_\omega + \nu_A > q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_\omega \le q, \\ \nu_\omega + \nu'_B > q. \end{cases}$$

Значит, B остался ключевым в коалиции $\omega \cup B$. Других коалиций, где A был ключевым, нет:

$$\forall v \ne \omega \left[\begin{array}{l} \nu_v > q, \\ \nu_v + \nu_A \le q \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \nu_v > q, \\ \nu_v + \nu'_B \le q. \end{array} \right.$$

Значит, B не мог стать ключевым ни в одной коалиции, кроме $\omega \cup B$. Аналогично получается, что A остался ключевым только в коалиции $\omega \cup A$ после изменения весов. По общей теореме о представлении и свойству независимости вклада коалиции индексы влияния A и B стали: $\Phi'(A) = C(\omega \cup A)$, $\Phi'(B) = C(\omega \cup B)$. Но выше было получено: $\Phi'(A) = C(\omega \cup B)$, $\Phi'(B) = C(\omega \cup A)$. Значит, $C(\omega \cup A) = C(\omega \cup B)$.

Этот результат означает, что в любой коалиции ω' можно любого входящего в нее игрока A ($\omega' = \omega \cup A$) заменить на другого игрока B и от этого вклад этой коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков не изменится: $C(\omega') = C(\omega' \setminus A \cup B)$. Тогда для любых двух коалиций v и ω с одинаковым числом участников можно всех игроков из v заменить на игроков ω и $C(v)$ от этого не изменится. Т.е. $C(v) = C(\omega)$.

Отсюда, фактически, следует, что вклад коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков зависит только от числа членов этой коалиции. Тогда вклад любой коалиции ω из k игроков ($|\omega| = k$) можно обозначить просто как $C(k)$.

3.7. Теорема о представлении при выполнении аксиомы анонимности

Индекс влияния, удовлетворяющий аксиомам диктатора, аддитивности и анонимности, может быть представлен в виде $\Phi(A) = \sum\limits_S C(s)$, где $s = |S|$, S – значимая для игрока A коалиция. Функция $C(s) \not\equiv 0$ – это вклад коалиции из s игроков в индексы влияния ее ключевых участников. Обратное утверждение тоже верно: индекс влияния, имеющий вид $\Phi(A) = \sum\limits_S C(s)$, $C(s) \not\equiv 0$, удовлетворяет аксиомам диктатора, аддитивности и анонимности. Для доказательства соответствующей теоремы сначала будут доказаны две леммы.

Лемма 1. *Пусть игрок A – ключевой в коалициях $\omega_1^A, \dots, \omega_m^A$ и пусть веса игроков A и B поменяли местами: $\nu'_A = \nu_B$, $\nu'_B = \nu_A$. Тогда после замены весов B будет ключевым только в коалициях ${\omega'}_1^B, \dots, {\omega'}_m^B$, где*

$$ {\omega'}_i^B = \begin{cases} \omega_i^A, & \textit{если} \quad B \in \omega_i^A, \\ \big(\omega_i^A \backslash A\big) \cup B, & \textit{если} \quad B \notin \omega_i^A. \end{cases} $$

Например, если A был ключевым в коалициях ABE и AC, то после замены весов B будет ключевым в коалициях ABE и BC.

Доказательство. То, что A был ключевым игроком в коалициях $\omega_1^A, \dots, \omega_m^A$ до замены весов, означает:

$$ \forall i = \overline{1, m} \quad \begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q, \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu_A \le q. \end{cases} $$

То, что других коалиций, где A – ключевой, нет, означает:

$$ (1) \qquad \forall \omega \;\; \forall i = \overline{1, m} \quad \omega \cup A \ne \omega_i^A \left[\begin{array}{l} \nu_\omega + \nu_A \le q, \\ \nu_\omega > q. \end{array} \right. $$

Рассмотрим одну из коалиций ω_i^A, в которой A был ключевым до замены весов и докажем, что после замены весов B стал ключевым в

$$ {\omega'}_i^B = \begin{cases} \omega_i^A, & \text{если} \quad B \in \omega_i^A, \\ \big(\omega_i^A \backslash A\big) \cup B, & \text{если} \quad B \notin \omega_i^A. \end{cases} $$

Рассмотрим 2 случая: $B \in \omega_i^A$ и $B \notin \omega_i^A$.

1. Для $B \in \omega_i^A$ имеем:

$$ \begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q, \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu_A \le q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q, \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu'_B \le q. \end{cases} $$

Значит, после замены весов B стал ключевым в ω_i^A и, следовательно, ${\omega'}_i^B = \omega_i^A$.

2. Для $B \notin \omega_i^A$ имеем:

$$ \begin{cases} \nu_{\omega_i^A} > q, \\ \nu_{\omega_i^A} - \nu_A \le q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega_i^A \backslash A} + \nu_A > q, \\ \nu_{\omega_i^A \backslash A} \le q \end{cases} \Leftrightarrow $$

$$ \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega_i^A \backslash A} + \nu'_B > q, \\ \nu_{\omega_i^A \backslash A} + \nu'_B - \nu'_B \le q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{(\omega_i^A \backslash A) \cup B} > q, \\ \nu_{(\omega_i^A \backslash A) \cup B} - \nu'_B \le q. \end{cases} $$

Т.е. B стал ключевым в $\big(\omega_i^A \backslash A\big) \cup B$, и ${\omega'}_i^B = \big(\omega_i^A \backslash A\big) \cup B$. Таким образом, после замены весов B стал ключевым в коалициях ${\omega'}_1^B, \dots, {\omega'}_m^B$, где

$$ {\omega'}_i^B = \begin{cases} \omega_i^A, & \text{если} \quad B \in \omega_i^A, \\ \big(\omega_i^A \backslash A\big) \cup B, & \text{если} \quad B \notin \omega_i^A. \end{cases} $$

Теперь докажем, что нет других коалиций, отличных от ${\omega'}_1^B, \dots, {\omega'}_m^B$, в которых бы B стал ключевым. Допустим обратное: пусть существует коалиция: $\exists \omega \;\; B \in \omega$

$\forall i = \overline{1,m}\ \ \omega \neq {\omega'}_i^B$, в которой B стал ключевым:

$$\begin{cases} \nu_\omega > q, \\ \nu_\omega - \nu'_B \leq q. \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая: $A \in \omega$ и $A \notin \omega$.

1. В случае $A \in \omega$ для тех i, при которых ${\omega'}_i^B = \left(\omega_i^A \backslash A\right) \cup B$ (при $B \notin \omega_i^A$), условие $\omega \neq {\omega'}_i^B$ выполняется автоматически, потому что $A \in \omega$, но $A \notin {\omega'}_i^B = \left(\omega_i^A \backslash A\right) \cup B$. Для таких i $\ \omega \neq \omega_i^A$, так как $B \in \omega$, но $B \notin \omega_i^A$. Для остальных значений i $\ {\omega'}_i^B = \omega_i^A$, и так как по предположению $\omega \neq {\omega'}_i^B$, то $\omega \neq \omega_i^A$. Тогда справедливо следующее утверждение:

$$\exists \omega \ \ A \in \omega \qquad \forall i = \overline{1,m}\ \ \omega \neq \omega_i^A \quad \begin{cases} \nu_\omega > q, \\ \nu_\omega - \nu'_B \leq q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_\omega > q, \\ \nu_\omega - \nu'_B \leq q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega \backslash A} + \nu_A > q, \\ \nu_{\omega \backslash A} \leq q. \end{cases}$$

Обозначив $\omega^* = \omega \backslash A$, имеем:

$$\exists \omega^* \ \ \forall i = \overline{1,m} \ \ \ \omega^* \cup A \neq \omega_i^A \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*} + \nu_A > q, \\ \nu_{\omega^*} \leq q. \end{cases}$$

Это противоречит условию (1) леммы, по которому нет коалиций, отличных от $\omega_1^A, \ldots, \omega_m^A$, в которых A был бы ключевым игроком до замены весов.

2. В случае $A \notin \omega$ для тех i, при которых ${\omega'}_i^B = \omega_i^A$ (при $B \in \omega_i^A$), условие $\omega \neq {\omega'}_i^B$ выполняется автоматически, потому что $A \in {\omega'}_i^B = \omega_i^A$, но $A \notin \omega$. Для таких i $(\omega \cup A) \backslash B \neq \omega_i^A$, так как $B \in \omega_i^A$, но $B \notin (\omega \cup A) \backslash B$. Для остальных значений i $\ {\omega'}_i^B = \left(\omega_i^A \backslash A\right) \cup B$, и так как по предположению $\omega \neq {\omega'}_i^B = \left(\omega_i^A \backslash A\right) \cup B$, то $(\omega \cup A) \backslash B \neq \omega_i^A$. В результате имеем:

$$\exists \omega \ \ A \notin \omega \ \ \forall i = \overline{1,m} \ \ (\omega \cup A) \backslash B \neq \omega_i^A \quad \begin{cases} \nu_\omega > q, \\ \nu_\omega - \nu'_B \leq q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_\omega > q, \\ \nu_\omega - \nu'_B \leq q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega \backslash B} + \nu'_B > q, \\ \nu_{\omega \backslash B} \leq q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_{\omega \backslash B} + \nu_A > q, \\ \nu_{\omega \backslash B} \leq q. \end{cases}$$

Обозначая $\omega^* = \omega \backslash B$, получаем:

$$\exists \omega^* \ \ \forall i = \overline{1,m} \ \ \ \omega^* \cup A \neq \omega_i^A \quad \begin{cases} \nu_{\omega^*} + \nu_A > q, \\ \nu_{\omega^*} \leq q. \end{cases}$$

Это снова противоречит условию (1). В итоге предположение о том, что существует коалиция, отличная от ${\omega'}_1^B, \ldots, {\omega'}_m^B$, в которой B был бы ключевым после замены весов, оказалось неверным. Значит, B стал ключевым только в коалициях ${\omega'}_1^B, \ldots, {\omega'}_m^B$, где

$${\omega'}_i^B = \begin{cases} \omega_i^A, & \text{если} \ \ B \in \omega_i^A, \\ \left(\omega_i^A \backslash A\right) \cup B, & \text{если} \ \ B \notin \omega_i^A. \end{cases}$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть игрок A – ключевой в m коалициях и число участников каждой из этих коалиций равно $s_1, \ldots, s_m$, а игрок B – ключевой в k коалициях с числом участников $t_1, \ldots, t_k$. Пусть веса игроков A и B поменяли местами: $\nu'_A = \nu_B$,*

$\nu'_B = \nu_A$. *Тогда после замены весов B будет ключевым в m коалициях с размерами $s_1, \ldots, s_m$, а A будет ключевым в k коалициях с размерами $t_1, \ldots, t_k$.*

Доказательство. Доказательство следует из леммы 1. Ясно что $\left|\omega'^B_i\right| = \left|\omega^A_i\right| = s_i$, так как $\omega'^B_i = \omega^A_i$ либо $\omega'^B_i = \left(\omega^A_i \backslash A\right) \cup B$. Игроки A и B ничем не отличаются друг от друга, поэтому то же самое справедливо для коалиций, в которых A станет ключевым: $\left|\omega'^A_i\right| = \left|\omega^B_i\right| = t_i$.

Теорема 10. Индекс влияния игрока A может быть представлен в виде $\Phi(A) = \sum\limits_S C(s), C(s) \not\equiv 0$ (суммирование выполняется по всем значимым для A коалициям S, $s = |S|$) тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы диктатора, аддитивности и анонимности.

Доказательство. Для доказательства необходимости будет использована лемма 2, для доказательства достаточности – общая теорема о представлении и свойство зависимости вклада коалиции от размера.

Необходимость. Докажем справедливость аксиомы диктатора. Диктатор является ключевым игроком во всех возможных коалициях, включающих его. Число различных коалиций из s игроков, включающих диктатора, равно $\binom{n-1}{s-1}$, поэтому его индекс влияния равен

$$\Phi(A) = \sum_{s=1}^{n} \binom{n-1}{s-1} C(s) > 0, \quad C(s) \not\equiv 0.$$

Значит, аксиома диктатора выполняется.

Докажем справедливость аксиомы аддитивности. Пусть в ситуации 1 игрок A – ключевой в множестве коалиций $W^1 = \{S_1, \ldots, S_m\}$, в ситуации 2 игрок A – ключевой в множестве коалиций $W^2 = \{S_{m+1}, \ldots, S_k\}$ и в ситуации 3 игрок A – ключевой в множестве $W^3 = W^1 \cup W^2 = \{S_1, \ldots, S_k\}$. Пусть размер коалиции S_i равен s_i. Докажем, что индекс влияния в 3-й ситуации равен сумме индексов в 1-й и 2-й ситуациях: $\Phi^3(A) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A)$,

$$\begin{aligned}
&\Phi^1(A) = C(s_1) + \ldots + C(s_m),\\
&\Phi^2(A) = C(s_{m+1}) + \ldots + C(s_k),\\
&\Phi^3(A) = C(s_1) + \ldots + C(s_k) = \Phi^1(A) + \Phi^2(A).
\end{aligned}$$

Теперь докажем справедливость аксиомы анонимности. Пусть веса двух игроков A и B поменялись местами: $\nu'_A = \nu_B$, $\nu'_B = \nu_A$. Докажем, что и индексы влияния этих игроков поменяются местами: $\Phi'(A) = \Phi(B)$, $\Phi'(B) = \Phi(A)$. Пусть размеры коалиций, в которых A был ключевым до замены весов, равны $s_1, \ldots, s_m$, а в которых B был ключевым – $t_1, \ldots, t_k$. Тогда их индексы влияния были

$$\begin{aligned}
&\Phi(A) = C(s_1) + \ldots + C(s_m),\\
&\Phi(B) = C(t_1) + \ldots + C(t_k).
\end{aligned}$$

По лемме 2 после замены весов A стал ключевым в коалициях с размерами $t_1, \ldots, t_k$, а B – в коалициях с размерами $s_1, \ldots, s_m$. Т.е. их индексы влияния стали

$$\begin{aligned}
&\Phi'(A) = C(t_1) + \ldots + C(t_k),\\
&\Phi'(B) = C(s_1) + \ldots + C(s_m).
\end{aligned}$$

Таким образом, индексы влияния игроков поменялись местами: $\Phi'(A) = \Phi(B)$, $\Phi'(B) = \Phi(A)$.

Достаточность. Как было показано выше, из аксиом диктатора, аддитивности и анонимности следуют общая теорема о представлении и свойство зависимости вклада коалиции от размера. Согласно общей теореме о представлении индекс влияния игрока A, ключевого в коалициях $\omega_1, \ldots, \omega_k$, равен:

$$\Phi(A) = C_A(\omega_1) + \ldots + C_A(\omega_k) = \sum_S C_A(S).$$

По свойству зависимости вклада коалиции от размера

$$C_A(S) = C(s), \quad \text{где} \quad s = |S|\,.$$

Таким образом, индекс влияния имеет вид

$$\Phi(A) = \sum_S C(s),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Для индекса Банцафа функция вклада коалиции имеет вид $C(s) = 1$, для индекса Шепли–Шубика $C(s) = (s-1)!(n-s)!$. Имеют смысл и другие варианты представления $C(s)$, например $C(s) = s$ и $C(s) = 1/s$. В первом случае вклад коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков прямо пропорционален размеру коалиции. Во втором случае вклад коалиции в индексы влияния ее ключевых игроков обратно пропорционален размеру этой коалиции.

4. Заключение

В работе рассмотрен общий подход к определению индексов влияния в задаче голосования с квотой. Показано, что влияние каждого участника определяется суммой вкладов выигрывающих коалиций, в которых роль участника является ключевой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shapley L.S., Shubik M.* A method for Evaluting the Distribution of Power in a Committee System // Amer. Polit. Sci. Rev. 1954. V. 48. P. 787–792.
2. *Banzhaf J.F.* Weighted Voting Doesn' t Work: A Mathematical Analysis // Rutgers Law Rev. 1965. V. 19. P. 317–343.
3. *Dubey P., Shapley L.S.* Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index // Math. Oper. Res. 1979. V. 4. P. 99–131.
4. *Laruelle A., Valenciano F.* Shapley-Shubik and Banzhaf Indicies Revisited // Math. Oper. Res. 2000. V. 26. P. 89–104.
5. *Алескеров Ф.Т.* Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций // ДАН. 2007. Т. 414. С. 594–597.
6. *Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: ВШЭ, 2006.
7. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.
8. *Friedman J., McGrath L., Parker C.* Achievable hierarchies in voting games // Theory and Decision. 2006. V. 61. P. 305–318.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 05.10.2009