4. Васин А. В. Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвходовых элементов // Дисс. ... канд. физико-математических наук. — Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2010.

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ФОРМУЛАМИ ФУНКЦИЙ ИЗ $P_{k,2}$, $k \geqslant 3$

Д. А. Дагаев (Москва)

В работе рассматривается задача о сложности реализации формулами функций многозначной логики из замкнутых классов определенного вида. Получен результат, обобщающий теоремы 1 и 2 из [1] на случай функций произвольной значности.

Сначала дадим необходимые определения (см. также работы [1–6]). Пусть $k \geqslant 2$. Множество всех функций k-значной логики будем обозначать через P_k, а множество всех функций k-значной логики, принимающих значения только из множества $\{0,1\}$, — через $P_{k,2}$. Пусть $G \subseteq P_k$. Обозначим через $[G]$ замкнутый класс, порожденный системой G, а через $G(n)$ — множество всех функций из G, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in [G]$, Φ — формула над G, реализующая функцию f, а $F \subseteq [G]$. Обозначим через $L(\Phi)$ число символов переменных и констант, входящих в формулу Φ (сложность формулы Φ), а через $L_G(F(n))$ — функцию Шеннона для множества F.

Будем говорить, что булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $< 0^\infty >$ (соответственно $< 1^\infty >$), если существует переменная x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant x_i$ (соответственно $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant x_i$). Далее будем придерживаться обозначений для замкнутых классов булевых функций из работы [5], а именно: S — множество всех самодвойственных функций; T_i — множество всех функций, сохраняющих константу i, $i = 0, 1$; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; O^∞ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 0^\infty >$; I^∞ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^\infty >$; K — множество всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенных переменных.

Пусть $i \in \{0,1\}$. Положим

$$L_i = L \cap T_i,\ M_i = M \cap T_i,\ U_i = U \cap T_i,\ C_i = C \cap T_i;$$

$$M_{01} = M_0 \cap M_1,\ L_{01} = L_0 \cap L_1,\ U_{01} = U_0 \cap U_1;$$

$$O_0^\infty = T_0 \cap O^\infty,\ I_1^\infty = T_1 \cap I^\infty;$$

$$MO^\infty = M \cap O^\infty,\ MI^\infty = M \cap I^\infty,\ MO_0^\infty = M \cap O_0^\infty,\ MI_1^\infty = M \cap I_1^\infty.$$

Определим отображение «проекция» (обозначение: pr_k) из множества $P_{k,2}$ в множество P_2, $k \geqslant 3$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,2}$. Проекцией функции f называется булева функция $pr_k f(x_1, \ldots, x_n)$, значение которой на произвольном наборе $\widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ определяется равенством $pr_k f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Проекцией $pr_k F$ множества функций $F \subseteq P_{k,2}$ называется множество $\bigcup\{pr_k f\}$, где объединение берется по всем функциям $f \in F$. Нетрудно показать, что для любого замкнутого класса $F \subseteq P_{k,2}$ множество $pr_k F$ является замкнутым классом булевых функций.

Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций. Для любого $k \geqslant 3$ положим

$$pr_k^{-1} B = \{f \in P_{k,2} |\ pr_k f \in B\}.$$

Легко видеть, что множество $pr_k^{-1} B$ является замкнутым классом. Более того, для любого замкнутого класса $F \subseteq P_{k,2}$, такого, что $pr_k F = B$, выполняется соотношение $F \subseteq pr_k^{-1} B$, поскольку множество $pr_k^{-1} B$ содержит все функции из $P_{k,2}$, проекция которых принадлежит множеству B. Класс $pr_k^{-1} B$ будем называть максимальным замкнутым классом. Таким образом, каждому замкнутому классу булевых функций соответствует ровно один максимальный класс функций из $P_{k,2}$, $k \geqslant 3$.

Известно (см. [6]), что при любом $k \geqslant 3$ максимальный замкнутый класс $pr_k^{-1} B$ является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда $U_{01} \subseteq B$.

Отметим некоторые известные результаты в задаче о сложности реализации функций k-значной логики формулами над конечными системами.

В задаче о сложности реализации булевых функций над конечными полными системами основополагающие результаты были получены О. Б. Лупановым, доказавшим [2–4], что для любой конечной полной системы булевых функций G выполняется соотношение

$$L_G(P_2(n)) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Задача о поведении функций Шеннона для множества всех булевых функций тесно связана с задачей о поведении функций Шеннона, соответствующих замкнутым классам булевых функций при реализации функций формулами в полных конечных базисах. Для всех замкнутых классов булевых функций, не содержащихся в множестве $S \cup L \cup K \cup D$, и любого конечного полного базиса асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона были получены А. Е. Андреевым [7].

Другая постановка задачи связана с вопросом о сложности реализации булевых функций из замкнутых классов, порожденных произвольными конечными системами. А. Б. Угольников доказал [5], что для любой конечной системы булевых функций G найдется константа $c = c(G)$, такая, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $[G]$ имеет место неравенство $L_G(f) \leqslant c^n$.

В задаче о сложности реализации функций многозначной логики известные на данный момент результаты имеют меньшую общность, чем в случае булевых функций. Ряд авторов (см. [8, 9]) для некоторых конечных полных систем функций $G \subseteq P_k$, $k \geqslant 3$, показали справедливость соотношения

$$L_G(P_k(n)) \sim \frac{k^n}{\log_k n}.$$

Перейдем к известным результатам в задаче о сложности реализации функций из максимальных классов. В работе [10] для некоторой конечной порождающей системы класса $pr_3^{-1}L$ была получена асимптотически точная оценка для соответствующей функции Шеннона. В [1, 11] для каждого конечно-порожденного максимального класса функций из $P_{3,2}$ и некоторой его конечной порождающей системы были получены верхняя и нижняя асимптотические оценки для функций Шеннона.

Теорема 1 [1]. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Тогда существует конечная порождающая система G класса $pr_3^{-1}B$, такая, что*

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr_3^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{pr_3 G}(B(n)).$$

В качестве следствия из этой теоремы и известных результатов о сложности булевых функций для некоторых максимальных классов и некоторых их конечных порождающих систем была получена асимптотически точная оценка для соответствующих функций Шеннона.

Теорема 2 [1]. *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*
1) $L_{01} \subseteq B$;
2) $M_{01} \subseteq B$;
3) $B \in \{O^\infty, O_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$;
4) $U_{01} \subseteq B \subseteq K$;
5) $U_{01} \subseteq B \subseteq D$.
Тогда найдется конечная система $G \subseteq P_{3,2}$, такая, что $[G] = pr_3^{-1}B$ и

$$L_G(pr_3^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

В данной работе результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, получены для максимальных классов функций из $P_{k,2}$, $k \geqslant 3$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$, и пусть $k \geqslant 3$. Тогда существует конечная порождающая система G класса $pr_k^{-1}B$, такая, что*

$$\frac{k^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr_k^{-1}B(n)) \lesssim \frac{k^n}{\log_2 n} + L_{pr_k G}(B(n)).$$

Теорема 4. *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

1) $L_{01} \subseteq B$;
2) $M_{01} \subseteq B$;
3) $B \in \{O^\infty, O_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$;
4) $U_{01} \subseteq B \subseteq K$;
5) $U_{01} \subseteq B \subseteq D$.

Пусть $k \geqslant 3$. Тогда найдется конечная система $G \subseteq P_{k,2}$, такая, что $[G] = pr_k^{-1}B$ и

$$L_G(pr_k^{-1}B(n)) \sim \frac{k^n}{\log_2 n}.$$

Схема доказательства этих теорем аналогична схеме доказательства теорем 1 и 2 (см. [1]).

Автор выражает благодарность профессору А. Б. Угольникову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №11-01-00508, и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем».

Список литературы

1. Дагаев Д. А. О сложности функций из некоторых классов трехзначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2011. — № 3. — С. 60–63.
2. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. — 1960. — Вып. 3. — С. 61–80.
3. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. — 1963. — Вып. 10. — С. 63–97.
4. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем // М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. Угольников А. Б. О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 6. — С. 1341–1344.
6. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. —Berlin: Springer-Verlag, 2006.
7. Андреев А. Е. О синтезе функциональных сетей. Докт. диссертация. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1985.
8. Гашков С. Б. О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1991. — № 2. — С. 88–92.
9. Захарова Е. Ю. Реализация функций из P_k формулами // Математические заметки. — 1972. — Т. 11, вып. 1. — С. 99–108.

10. Дагаев Д. А. О сложности псевдолинейных функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2010. — № 2. — С. 53–56.
11. Дагаев Д. А. Реализация формулами функций из некоторых классов трехзначной логики // Мат-лы XVI Межд. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та. — 2011. — С. 136–138.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОРОЖДАЮЩИХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В КЛАССАХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

О. С. Дудакова (Москва)

Известно, что при $k \leq 7$ все предполные классы функций k-значной логики являются конечно-порожденными [1], а начиная с $k = 8$ существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса [2]; полного описания конечно-порожденных предполных классов монотонных функций к настоящему времени не получено. В работах автора [3]–[6] получен критерий конечной порожденности для предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два, а также условия существования конечных порождающих систем для ряда других семейств классов монотонных функций. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Пусть $\preccurlyeq$ — частичный порядок на множестве $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Положим $\mathcal{P} = (E_k, \preccurlyeq)$. Будем считать, что множество $\mathcal{P}$ имеет наименьший и наибольший элементы. Через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ будем обозначать класс всех монотонных функций над $\mathcal{P}$ (отметим, что класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является предполным [7]).

Функцию $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ будем называть *функцией выбора*, если для каждого набора $(i, a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{P}^{k+1}$ выполняется равенство

$$\lambda(i, a_1, \ldots, a_k) = a_i.$$

Легко видеть, что если замкнутый класс функций k-значной логики содержит все константы $1, 2, \ldots, k$ и функцию выбора, то он является конечно-порожденным. Отметим также, что если $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество, содержащее хотя бы одну цепь длины 2, то $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k) \notin \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.

Положим

$$\mathcal{P}_\lambda = \{(a, b_1, \ldots, b_k) \in \mathcal{P}^{k+1} \mid \text{ если } i \preccurlyeq j, \text{ то } b_i \preccurlyeq b_j\}.$$

Легко видеть, что функция λ монотонна на множестве $\mathcal{P}_\lambda$. Назовем *монотонной функцией выбора* функцию $\nu(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, совпадающую на множестве $\mathcal{P}_\lambda$ с функцией $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Нетрудно показать, что если