УДК 517.929

И.Ю. Колпаков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В работе получены условия разрешимости краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом. Для получения условий разрешимости краевая задача записывается на соответствующем пространстве в виде одного квазилинейного операторного уравнения, к которому применяется теорема существования решения с условием на границе области. Краевая задача рассматривается в случае резонанса, т.е. когда линейный оператор из квазилинейного операторного уравнения не обратим. Подобного рода краевая задача встречается при моделировании динамики основных производственных фондов в односекторной экономике. В качестве применения основной теоремы получены условия разрешимости для частного случая краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение с отклоняющимся аргументом, резонанс, квазилинейное операторное уравнение, теорема существования.

I.Yu. Kolpakov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE EQUATION WITH A PERTURBED ARGUMENT

In work conditions of solvability of a boundary value problem for equation with a perturbed argument are received. For receiving conditions of solvability the boundary value problem write down on the corresponding space in the form of one quasilinear operator equation to which the theorem of existence of the solution with a condition on area border is applied. The boundary value problem is considered in case of a resonance that is when the linear operator from the quasilinear operator equation isn't reversible. The boundary value problem of this sort meets when modeling dynamics of the fixed business assets in one-sector economy. As application of the main theorem, conditions of resolvability for a special case of a boundary value problem for the equation with perturbed argument with constant coefficients are received.

Keywords: a boundary value problem, the equation with a perturbed argument, a resonance, a quasilinear operator equation, the existence theorem.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)x(h(t)) + f(t), \\ x(T) = k \cdot x(0), \; t \in [0;T], \end{cases} \tag{1}$$

где функция $h:[0;T] \to R^1$ измерима и $x(\xi) = 0$ при $\xi \notin [0;\mathrm{T}]$.

Введем в рассмотрение пространства функций: пространство $L_p[0;T]$ – банахово пространство функций $x:[0;T] \to R^1$, – измеримых по Лебегу и суммируемых в p-й степени; пространство $D_p[0;T]$ – банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0;T] \to R^1$ таких, что $\dot{x} \in L_p[0;T]$ с нормой $\|x\|_{D_P} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_P}$.

Краевую задачу (1) будем рассматривать, предполагая, что функции $p(t), q(t), f(t) \in L_p[0;T]$ и параметр k положителен. Под решением краевой задачи (1) понимается такой элемент пространства $D_p[0;T]$, который почти всюду на $[0;T]$ удовлетворяет уравнению и для которого выполнено краевое условие задачи (1).

Такая задача встречается в математических моделях экономической динамики в односекторной экономике [1–4]. При этом $x(t)$ обозначает изменение по времени основных производственных фондов, а краевое условие можно трактовать как задачу об k-кратном изменении фондов $x(t)$ к конечному моменту времени T.

Обозначим через X и Y пространства $X = \{x \in D_p[0;T] \,|\, x(T) = k \cdot x(0)\}$ и $Y = L_p[0;T]$ соответственно. Для удобства запишем задачу (1) на пространстве X в виде одного квазилинейного операторного уравнения:

$$Lx = Fx, \tag{2}$$

где операторы $L, F : X \to Y$ определены равенствами:

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) + p(t)x(t),$$

$$(Fx)(t) = q(t)x(h(t)) + f(t).$$

Отметим, что оператор L является нетеровым оператором.

Приведем вначале предварительные сведения и утверждения, которые понадобятся в последующем.

Краевую задачу (1) будем рассматривать в случае, когда линейный оператор L из операторного уравнения (2) не обратим, т.е. когда имеет место случай резонанса. В нашем случае резонанс определяется следующим значением параметра k краевой задачи:

$$k = e^{-\int_0^T p(s)\mathrm{d}s}.$$

Ядро и образ линейного оператора L обозначим через $\ker L$ и $R(L)$ соответственно.

Лемма 1. Ядро оператора L имеет вид

$$\ker L = \left\{ x \in X \;\middle|\; x(t) = c \cdot e^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s},\ c = \mathrm{const} \right\}.$$

Доказательство данного утверждения очевидно.

Лемма 2. Образ оператора L имеет вид

$$R(L) = \left\{ y \in Y \;\middle|\; \int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s = 0 \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на пространстве $X = \left\{ x \in D_p[0;T] \middle| \; x(T) = k \cdot x(0) \right\}$ уравнение

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) + p(t)x(t) = y(t).$$

Для того чтобы решения этого уравнения принадлежали пространству X, достаточно показать, что выполняется равенство

$$\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} (Lx)(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Действительно,

$$\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(\dot{x}(s)+p(s)x(s)\right)\mathrm{d}s=$$

$$=e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}x(s)\Bigg|_0^T-\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}p(s)x(s)\mathrm{d}s+$$

$$+\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}p(s)x(s)\mathrm{d}s=e^{\int_0^T p(\tau)\mathrm{d}\tau}k\cdot x(0)-x(0)=0.$$

Из нетеровости оператора L следует, что пространства X и Y представимы в виде прямой топологической суммы подпространств:

$$X=X_0\oplus\ker L,$$

$$Y=R(L)\oplus Y_0,$$

где подпространство $X_0=\left\{\, x\in X\middle|\, x(0)=0\right\}$.

Линейный оператор P, отображающий линейное пространство X на его подпространство X_1, называется *проектором*, если $P^2=P$ и он оставляет элементы X_1 без изменения, т.е. $Px_1=x_1$ для любого $x_1\in X_1$. Оператор $P^C=I-P$ также является проектором и называется *дополнительным* для P.

Проектор $P:X\to X$ на ядро оператора L определим следующим образом:

$$(Px)(t)=x(0)\cdot e^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s}.$$

Обозначим проектор на образ оператора L через $Q:Y\to Y$.

Лемма 3. Дополнительный проектор $Q^C:Y\to Y$ на образ оператора L имеет вид

$$\left(Q^c y\right)(t)=\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s\left(\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

Доказательство. Покажем, что оператор Q^c является проектором:

$$\left(Q^c\left(Q^c y\right)\right)(t)=\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(Q^c y\right)(s)\,\mathrm{d}s\left(\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right)^{-1}=$$

$$=\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s\left(\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right)^{-2}=\left(Q^c y\right)(t).$$

Далее, если $y\in R(L)$, то должны выполняться равенства $Qy=y$ и $Q^c y=0$. Действительно,

$$(Qy)(t)=\left(I-Q^c\right)y(t)=y(t)-\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s\left(\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\right)^{-1},$$

так как $y\in R(L)$, то с учетом Леммы 2

$$(Qy)(t)=y(t)-0\left(\int\limits_0^T e^{\int\limits_0^s p(\tau)d\tau}ds\right)^{-1}=y(t).$$

Оператор $K:R(L)\to X_0$ будем называть *обобщенно обратным* к оператору L, соответствующим проектору P на ядро $\ker L$, если он удовлетворяет равенствам [5, 6]:

$$LKy=y,\ \ \forall y\in R(L),$$

$$PKy = 0,\ \ \forall y \in R(L),$$

$$KLx = x - Px,\ \ \forall x \in X.$$

Лемма 4. Обобщенно обратный оператор K, соответствующий проектору P, имеет вид

$$(Ky)(t) = \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} y(s)\,ds$$

и справедлива оценка нормы оператора

$$\|K\|_{L_P \to D_P} \le 1 + \frac{a_1}{a_2}\sqrt[q]{T}\,\|p\|_{L_P},$$

где $a_1 = \operatorname{vrai\,sup} e^{\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}$, $a_2 = \operatorname{vrai\,inf} e^{\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Покажем, что оператор $(Ky)(t) = \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s$ удовлетворяет условиям определения обобщенно обратного оператора.

Для этого сначала проверим выполнение первого равенства $LKy = y$, $\forall y \in R(L)$:

$$LKy = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s\right) + p(t)\int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s = y(t).$$

Выполнение второго равенства $PKy = 0$, $\forall y \in R(L)$ следует из равенства

$$PKy = \left.\left(\int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\,\mathrm{d}s\right)\right|_{t=0} \cdot e^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s} = 0 \cdot e^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s} = 0.$$

Проверим выполнение третьего равенства $KLx = x - Px$, $\forall x \in X$:

$$\left(Ky\right)\left(t\right) = \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} \left(\dot{x}(s) + p(s)x(s)\right)\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}x(t) + \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} p(s)x(s)\mathrm{d}s =$$

$$= e^{-\int_t^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} x(t) - e^{-\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} x(0) = x(t) - (Px)(t).$$

Найдем теперь оценку нормы оператора:

$$\left\|Ky\right\|_{D_P} = \left\| \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} y(s)\mathrm{d}s \right\|_{D_P} \le$$

$$\le 0 + \left(\int_0^T \left(\left|p(s)\right| \int_0^T e^{-\int_\upsilon^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} \left|y(\upsilon)\right|\mathrm{d}\upsilon \right)^p \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_0^T \left|y(s)\right|^p \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \left\|p\right\|_{L_P} \right) \left\|y\right\|_{L_P}.$$

Замечание. В нерезонансном случае, когда $k \ne e^{-\int_0^T p(s)\mathrm{d}s}$, существует обратный оператор L^{-1}, определенный равенством

$$\left(L^{-1}y\right)(t)=\frac{\int\limits_0^T e^{-\int\limits_s^T p(\tau)\mathrm{d}\tau}y(s)\,\mathrm{d}s}{k-e^{-\int\limits_0^T p(\tau)\mathrm{d}\tau}}e^{-\int\limits_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int\limits_0^t e^{-\int\limits_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Если возможно подобрать непрерывный оператор $T:X_0\to\ker L$ такой, что выполняется условие $F(I+T)(X_0)\subset R(L)$, то для решения вопроса о разрешимости уравнения (2), а следовательно, и задачи (1) можно воспользоваться теоремой существования с условием на границе области [7, 8].

Теорема 1. Пусть оператор L – нетеров, K – обобщенно обратный к L оператор и пусть существуют открытая ограниченная окрестность нуля $\Omega\subset X$ и непрерывный оператор $T:X_0\to\ker L$ такие, что выполнены условия:

1) $F(I+T)(X_0)\subset R(L)$,

2) из $\chi\in\partial\Omega_1$ $(\Omega_1=\Omega\cap X_0)$, $\lambda\in(0,1)\Rightarrow\chi\neq\lambda KF(I+T)\chi$.

Тогда существует решение уравнения $Lx=Fx$ в $\overline{\Omega}$.

Докажем сначала существование непрерывного оператора $T:X_0\to\ker L$, удовлетворяющего первому условию:

Лемма 5. Если $\int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s\neq 0$, то существует непрерывный оператор $T:X_0\to\ker L$, определяемый равенством

$$(Tx)(t)=-\frac{\int\limits_0^T e^{-\int\limits_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}\left(q(s)x(h(s))+f(s)\right)\mathrm{d}s}{\int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s},$$

такой что для любого фиксированного $f\in Y$ выполнено условие $F(I+T)(X_0)\subset R(L)$.

Доказательство. Найдем оператор $T: X_0 \to \ker L$ из условия $Q^C F(I+T)(X_0)=0$, откуда с учетом Леммы 3, получим:

$$\left(Q^C F(I+T)x\right)(t)=$$

$$=\frac{\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\Big(q(s)\big(x(h(s))+(Tx)(h(s))\big)+f(s)\Big)\mathrm{d}s}{\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s},$$

так как $T: X_0 \to \ker L$, то из леммы 1 следует, что $(Tx)(h(t)) = c\cdot e^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s}$ ($c=\mathrm{const}$),

$$\left(Q^C F(I+T)x\right)(t)=\frac{\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\big(q(s)x(h(s))+f(s)\big)\mathrm{d}s}{\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s}+\frac{c\int_0^T q(s)\mathrm{d}s}{\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s}=0.$$

Выражая c из последнего равенства и с учетом $(Tx)(t)=c\cdot e^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s}$, получим:

$$(Tx)(t)=-\frac{\int_0^T e^{-\int_s^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}\big(q(s)x(h(s))+f(s)\big)\mathrm{d}s}{\int_0^T q(s)\mathrm{d}s}.$$

Для применения теоремы 1 остается проверить выполнение второго условия. Это условие в нашем случае для пересечения $\Omega_1 = S_R(0)\cap X_0$ ($S_R(0)\subset X$ – открытый шар с центром в нуле и радиусом R) принимает вид: из $\chi\in\partial\Omega_1$, $\|\chi\|_{D_P}=R$, $\lambda\in(0;1)$ следует

$$\chi(t) \neq \lambda \int_0^t e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} \times$$

$$\times \left(q(s) \left(\chi(h(s)) - \frac{\int_0^T e^{-\int_v^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} \big(q(v)\chi(h(v)) + f(v) \big)\mathrm{d}v}{\int_0^T q(v)\mathrm{d}v} \right) + f(s) \right) \mathrm{d}s. \quad (3)$$

Покажем, что существует шар $S_R(0)$, на котором выполняется условие 2. С учетом леммы 4 оценим норму правой части (3):

$$\|KF(I+T)\chi\|_{D_P} \leq \|K\|_{L_P \to D_P} \cdot \big\| q(t)\big(\chi(h(t)) + (T\chi)(h(t))\big) + f(t) \big\|_{L_P} \leq$$

$$\leq \|K\|_{L_P \to D_P} \left(\|q(t)\chi(h(t))\|_{L_P} + \|q(t)(T\chi)(h(t))\|_{L_P} + \|f(t)\|_{L_P} \right),$$

так как $|\chi(h(t))| \leq \alpha \|\chi\|_{D_P}$, $\alpha = \max\left\{1; \sqrt[q]{T}\right\}$ и учитывая лемму 5, получим

$$\leq \|K\|_{L_P \to D_P} \times$$

$$\times \left(\|q\|_{L_P} \alpha \|\chi\|_{D_P} + \frac{\int_0^T e^{\int_0^s p(\tau)\mathrm{d}\tau} \left| q(s)\chi(h(s)) + f(s) \right| \mathrm{d}s}{\left| \int_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right|} \left\| \frac{q(t)}{e^{\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}} \right\|_{L_P} + \|f\|_{L_P} \right) \leq$$

$$\leq \|K\|_{L_P \to D_P} \left(\|q\|_{L_P} \alpha \|\chi\|_{D_P} + \frac{a_1 \int_0^T |q(s)|\,\mathrm{d}s\,\alpha \|\chi\|_{D_P} + \int_0^T |f(s)|\,\mathrm{d}s}{a_2 \left| \int_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right|} \|q\|_{L_P} + \|f\|_{L_P} \right).$$

Применяя неравенство Гельдера для второго слагаемого в скобках, получим

$$\le \|K\|_{L_P \to D_P} \left(\|q\|_{L_P} \alpha \|\chi\|_{D_P} + \frac{a_1 \sqrt[q]{T} \left(\|q\|_{L_P} \alpha \|\chi\|_{D_P} + \|f\|_{L_P} \right)}{a_2 \left| \int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right|} \|q\|_{L_P} + \|f\|_{L_P} \right) \le$$

$$\le \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|p\|_{L_P} \right) \left(1 + \frac{\frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|q\|_{L_P}}{\left| \int\limits_0^T q(s)\,ds \right|} \right) \left(\|q\|_{L_P} \alpha \|\chi\|_{D_P} + \|f\|_{L_P} \right),$$

где $a_1 = \operatorname{vrai\,sup} e^{\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}$, $a_2 = \operatorname{vrai\,inf} e^{\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}$.

Следовательно, если

$$\left(1 + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|p\|_{L_P} \right) \left(1 + \frac{\frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|q\|_{L_P}}{\left| \int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right|} \right) \left(\|q\|_{L_P} \alpha \|\chi\|_{D_P} + \|f\|_{L_P} \right) \le \|\chi\|_{D_P},$$

то для $\lambda \in (0;1)$ справедливо неравенство (3). Из вышесказанного следует, что существует шар $S_R(0)$ с радиусом

$$R = \frac{\left(1 + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|p\|_{L_P} \right) \left(\left| \int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right| + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|q\|_{L_P} \right) \|f\|_{L_P}}{\left| \int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right| - \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|p\|_{L_P} \right) \left(\left| \int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right| + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|q\|_{L_P} \right) \alpha \|q\|_{L_P}},$$

на котором выполнено второе условие теоремы 1, если

$$\left| \int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right| - \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|p\|_{L_P} \right) \left(\left| \int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \right| + \frac{a_1}{a_2} \sqrt[q]{T} \|q\|_{L_P} \right) \alpha \|q\|_{L_P} > 0.$$

Если данное неравенство разрешить относительно $\|q\|_{L_P}$, то оно примет вид

$$\|q\|_{L_P} < \sqrt{q_0^2 + \frac{2q_0}{\alpha p_0}} - q_0,$$

где $p_0 = 1 + \frac{a_1}{a_2}\sqrt[q]{T}\,\|p\|_{L_P}$, $q_0 = \dfrac{\left|\int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s\right|}{2\frac{a_1}{a_2}\sqrt[q]{T}}$.

Таким образом, условия разрешимости задачи (1) примут вид:

Теорема 2. Пусть $1 \le p < +\infty$ и выполнены условия:

1) $\int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s \ne 0$;

2) $\|q\|_{L_P} < \sqrt{q_0^2 + \frac{2q_0}{\alpha p_0}} - q_0$;

тогда существует решение краевой задачи (1) в шаре $\overline{S_R(0)} \subset D_p[0;T]$ с радиусом $R = p_0\left(1 + \frac{\|q\|_{L_P}}{2q_0}\right)\|f\|_{L_P}\left(1 - \alpha p_0\left(1 + \frac{\|q\|_{L_P}}{2q_0}\right)\|q\|_{L_P}\right)^{-1}$ (где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha = \max\left\{1; \sqrt[q]{T}\right\}$, $a_1 = \operatorname{vrai\,sup} e^{\int\limits_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}$, $a_2 = \operatorname{vrai\,inf} e^{\int\limits_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}$, $p_0 = 1 + \frac{a_1}{a_2}\sqrt[q]{T}\,\|p\|_{L_P}$, $q_0 = \dfrac{\left|\int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s\right|}{2\frac{a_1}{a_2}\sqrt[q]{T}}$).

В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \beta x(t) = \gamma x(h(t)) + f(t) \\ x(T) = k \cdot x(0),\ t \in [0;T], \end{cases} \tag{4}$$

где $\beta, \gamma > 0,\ x(t) \in D_2[0;T]\,(T > 1)$.

Вычислим константы, через которые записано условие разрешимости краевой задачи в теореме 2:

$$\alpha = \max\left\{1; \sqrt[q]{T}\right\} = \sqrt{T},\ \ a_1 = vrai\sup e^{\int\limits_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} = e^{\beta T},$$

$$a_2 = \mathrm{vrai}\inf e^{\int\limits_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau} = 1,$$

$$\|p\|_{L_2} = \beta\sqrt{T},\ \ p_0 = 1 + \frac{a_1}{a_2}\sqrt[q]{T}\,\|p\|_{L_2} = 1 + \beta T e^{\beta T},\ \ \|q\|_{L_2} = \gamma\sqrt{T},$$

$$q_0 = \frac{\left|\int\limits_0^T q(s)\,\mathrm{d}s\right|}{2\dfrac{a_1}{a_2}\sqrt{T}} = \frac{\gamma\sqrt{T}}{2e^{\beta T}}.$$

Условие разрешимости краевой задачи имеет вид

$$\|q\|_{L_2} < \sqrt{q_0^2 + \frac{2q_0}{\alpha p_0}} - q_0 = \frac{2}{\alpha p_0\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{\alpha p_0 q_0}} + 1\right)}.$$

Подставим найденные значения констант в это условие

$$\sqrt{T}\gamma < \frac{2}{\sqrt{T}\left(1 + \beta T e^{\beta T}\right)\left(\sqrt{1 + \dfrac{2\cdot 2e^{\beta T}}{\sqrt{T}\left(1 + \beta T e^{\beta T}\right)\sqrt{T}\gamma}} + 1\right)},$$

откуда

$$\gamma\left(\sqrt{1 + \frac{4e^{\beta T}}{\left(1 + \beta T e^{\beta T}\right)T\gamma}} + 1\right) < \frac{2}{T\left(1 + \beta T e^{\beta T}\right)}.$$

Разрешая данное неравенство относительно γ, получим

$$\gamma < \frac{1}{T\left(1+\beta T e^{\beta T}\right)\left(1+e^{\beta T}\right)}.$$

Таким образом, если выполнено данное неравенство, то краевая задача (4) разрешима для любой правой части $f(t) \in L_2[0;T]$.

Библиографический список

1. Корбинский Н.Е., Кузмин В.И. Точность экономико-математических моделей. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 256 с.

2. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений / Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2003. – 306 с.

3. Симонов П.М. Исследование устойчивости решений некоторых динамических моделей микро- и макроэкономики // Вестник Перм. ун-та. Математика. Информатика. Механика. – Пермь, 2003. – С. 88–93.

4. Симонов П.М. Об одном методе исследования динамических моделей экономики // Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и биотехнологий: сб. тр. VI Всерос. науч. конф. – Киров, 2011. – С. 347–353.

5. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Топологические нетеровы операторы: обобщенная непрерывность и аддитивное представление // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 3–7.

6. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 14–23.

7. Колпаков И.Ю. О разрешимости квазилинейных операторных уравнений с необратимой линейной частью / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2003. – 9 с.

8. Колпаков И.Ю. Квазилинейные операторные уравнения в банаховых пространствах // Математика. Механика. Информатика: тез. докл. Всерос. науч. конф. – Челябинск, 2006. – С. 163–162.

References

1. Korbinskij N.E., Kuzmin V.I. Tochnost' jekonomiko-matematicheskih modelej [Accuracy of economic-mathematical models]. Moscow: Finansy i statistika, 1981, 256 p.

2. Maksimov V.P. Voprosy obshhej teorii funkcional'no-differencial'nykh uravnenij [The questions general theory of functional and differential equation]. Perm, 2003, 306 p.

3. Simonov P.M. Issledovanie ustojchivosti reshenij nekotorykh dinamicheskikh modelej mikro- i makrojekonomiki [The research of solutions stability some dynamic models micro and macroeconomics]. *Vestnik Permskogo universitetata. Matematika. Informatika. Mekhanika*, 2003, pp. 88–93.

4. Simonov P.M. Ob odnom metode issledovanija dinamicheskikh modelej jekonomiki [About one method of research dynamic economy models]. *Sbornik trudov VI Vserossijskoj nauchnoj konferencii "Matematicheskoe modelirovanie razvivajushhejsja jekonomiki, jekologii i biotehnologij"*. Kirov, 2011, pp. 347–353.

5. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. Topologicheskie neterovy operatory: obobshhennaja nepreryvnost' i additivnoe predstavlenie [Topological Noether operators: the generalized continuity and additive representation]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1994, no. 6, pp. 3–7.

6. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. Ob odnoj skheme issledovanija na razreshimost' rezonansnykh kraevykh zadach [About one scheme of research the solvability of resonance boundary value task]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1996, no. 11, pp. 14–23.

7. Kolpakov I.Yu. O razreshimosti kvazilinejnykh operatornykh uravnenij s neobratimoj linejnoj chast'ju [About resolvability of the quasilinear operator equations with irreversible linear part]. Perm, 2003, 9 p.

8. Kolpakov I.Ju. Kvazilinejnye operatornye uravnenija v banakhovykh prostranstvakh [The quasilinear operator equations in banakhovy spaces]. *Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferencii "Matematika. Mekhanika. Informatika*". Cheljabinsk, 2006, pp. 163–162.

Получено 26.09.2013

Об авторах

Колпаков Илья Юрьевич (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kolpakov.ilia@mail.ru).

About the authors

Kolpakov Ilia Ur'yevich (Perm, Russia) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of High Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: kolpakov.ilia@mail.ru).