О СОПРЯЖЕННОСТИ ПЕРЕКЛАДЫВАНИЙ ДВУХ ОТКРЫТЫХ ИНТЕРВАЛОВ ОКРУЖНОСТИ БЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Т. В. Медведев

Пусть на окружности S^1 заданы два множества из k точек каждое: $X_F=\{x_1, x_2, \ldots, z_k\}$ и $Y_F=\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, и пусть отображение $F: (S^1\setminus X_F \to (S^1\setminus Y_F)$ есть гомеоморфизм. На множестве $X_F(Y_F)$ отображение F (F^{-1}) доопределяется по непрерывности и образ точки $x_1\in X_F$ $(y_1\in Y_F)$ при отображении F (F^{-1}) есть одна или две точки. Такое отображение мы назовем *перекладыванием* k отрезков. Обозначим через V класс перекладываний для двух $(k=2)$ отрезков такой, что преобразования этого класса не имеют периодических точек и не являются гомеоморфизмами. Пусть множество $X_F=\{a, b\}$. Обозначим через J обход окружности и через (a, b) и (b, a) открытые дуги, обход вдоль которых согласован с направлением обхода J.

Каждое преобразование $F\in V$ обладает свойством, что для одного интервала, например для (a, b), оно сохраняет ориентацию, а для другого, в данном случае для (b, a), меняет ориентацию. Обозначим через $f=F|_{(a, b)}$ ограничение F на (a, b) и через g — ограничение F на (b, a).

Лемма 1. *При отображении* $F\in V$ *для любого* k *выполняется* $F^{1c}((b, a))\cap(b, a)=\varnothing$.

Следствие. (b, a) — *интервал, целиком состоящий из блуждающих точек отображения* F.

Из леммы 1 вытекает, что, так как (b, a) входит в некоторый интервал, состоящий из блуждающих точек, отображение концов которого определено отображением f, f можно продолжить внутрь него так, чтобы получившееся отображение f' было гомеоморфизмом окружности на себя и для любого $x\in(a, b)$ выполнялось $f'(x)=f(x)$. Для гомеоморфизма f' можно определить число вращения $t(f')$. Несмотря на известную произвольность определения отображения f', у f' нет периодических точек, так как их не было у отображения F. Поэтому $t(f')$ иррационально [1]. Более того, $t(f')$ не зависит от способа продолжения F до гомеоморфизма. Поэтому естественно назвать число вращения $t(f')$ гомеоморфизма f' также числом вращения отображения F и обозначить $t(F)$.

Множество точек D, предельных для траекторий, совпадающее в данном случае с минимальным множеством отображения F, в случае иррационального t может быть либо всюду плотно, либо нигде не плотно [1]. Для нашего отображения реализуется второй случай, так как у нас имеется интервал (b, a), целиком состоящий из блуждающих точек. Согласно [2], существует канторовская функция p: $S^1\to S^1$; задающееся ею отображение является гомеоморфизмом на множестве I и переводит каждый интервал, целиком состоящий из блуждающих точек, вместе с его концами в одну точку, причем свою для каждого интервала. Индуцируемый p гомеоморфизм является жестким поворотом окружности на постоянный угол. Здесь введены следующие обозначения $I=S^1\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [c_i, d_i]$, $D=S^1\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (c_i, d_i)$ и $K=D\setminus I$, где (c_i, d_i), $i=1, 2, \ldots$, — интервалы, состоящие из блуждающих точек (их счетное число в силу нигде не плотности множества D), и $[c_i, d_i]\cap[c_j, d_j]=\varnothing$ при $i\neq j$.

Обозначим через $A(F)$ — образ блуждающих точек отображения F при отображении p, если $t(F)<1/2$, или при отображении $h\circ p$, если $t(F)>1/2$, где h — меняющее ориентацию и сохраняющее расстояние отображение S^1 на себя. Аналогично обозначим через $B(F)$ образ точек $F^k((b, a))$ при отображении p или $h\circ p$ соответственно для $t(F)<1/2$ или $t(F)>1/2$. Введем также индекс отображения $i(F)\in\{0, 1, 2, 3\}$. Если точки a и b являются блуждающими, определим $i(F)=0$, если b — блуждающая, а a — нет, определим $i(F)=1$ при $t(F)<1/2$ и $i(F)=2$ при $t(F)>1/2$; если точка a —

блуждающая, а b – нет, то положим $i(F)=2$ при $t(F)<1/2$ и $i(F)=1$ при $t(F)>1/2$, и наконец, $i(F)=3$, если обе точки a и b являются неблуждающими.

Теорема 1. *Чтобы два отображения F_1 и F_2 из класса V были топологически сопряжены, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $t(F_1)=t(F_2)$ *либо* $t(F_1)=1-t(F_2)$;

2) $i(F_1)=i(F_2)$;

3) *множества* $A(F_1)$ *и* $A(F_2)$, *а также* $B(F_1)$ *и* $B(F_2)$ *совмещаются поворотом* u.

Замечание. В случае одного блуждающего интервала достаточно выполнения условий 1–2 теоремы.

[1] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику.– М.: Мир, 1975. [2] Markley N. G. // Proc. Lond. Math. Soc.– 1970.– V. 20.– P. 688–698. [3] Арансон С. Х., Жужома Е. Б. // Изв. вузов. Математика.– 1976.– № 5.– С. 104–107.

Поступило в Правление общества
4 марта 1992 г.