Модальная логика $\mathbb{R}$ с модальностью неравенства

Кудинов Андрей
ИППИ РАН
kudinov@iitp.ru

Аннотация

Мы изучаем модальную логику с топологической модальностью и модальностью неравенства вещественной прямой $\mathbb{R}$ и показываем, что она финитно аппроксимируема и разрешима.

1. Введение

Топологическая семантика модальной логики исторически появилась раньше, чем более распространенная сейчас семантика Крипке. В топологических моделях модальность $\Box$ («необходимо») интерпретируется как канторовская операция внутренности, а двойственная к ней модальность $\Diamond$ («возможно») — как операция замыкания. Основы для такой интерпретации были заложены К. Куратовским [6], который предложил определять топологическое пространство с помощью операции замыкания. Аксиомы Куратовского соответствуют аксиомам хорошо известной модальной логики S4.

Топологическая семантика для связки $\Box$ может быть сформулирована эквивалентным образом: каждая пропозициональная формула интерпретируется как подмножество топологического пространства («множество точек, где формула считается истинной»). Тогда формула $\Box A$ истинна в точке x, если ϕ истинна в некоторой окрестности x.

Дж. Маккинси и А. Тарский [8] показали, что логика S4 полна в топологической семантике. Более того, S4 полна относительно любого сепарабельного, плотного в себе метрического пространства, в том числе относительно $\mathbb{R}$. Поэтому имеет смысл рассматривать различные расширения базового языка с одной модальностью. Одним из способов, который мы рассматриваем в этой работе, является добавление новой модальности $[\neq]$, выражающей «неравенство». С помомощью этой новой модальности становится возможным выразить такие свойства топологических пространств, как плотность в себе, первую аксиому отделимости T_1 и локальную n-компонентность (см. определение ниже). В работе [4] было показано, что топологическая логика с неравенством $\mathbb{R}$ не имеет конечной аксиоматики. В этой работе мы продолжаем изучение этой логики и доказываем, что эта логика финитно аппроксимируема в классе шкал Крипке, и с оценкой на контрмодель это дает разрешимость этой логики.

2. Основные понятия

В работе рассматриваются пропозициональные модальные логики с двумя модальностями. Формулы строятся из счетного множества пропозициональных переменных $\textsc{Prop}$, связок $\bot$ (ложь) и $\to$ и одноместных модальностей $\Box$ и $[\neq]$. Остальные логические связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$ выражаются через $\bot$ (ложь) и $\to$. Двойственные модальности $\Diamond$ и $\langle\neq\rangle$ выражаются следующим образом $\Diamond A \rightleftharpoons \neg\Box\neg A$, $\langle\neq\rangle A \rightleftharpoons \neg[\neq]\neg A$, также введем универсальную модальность $[\forall]A \rightleftharpoons [\neq]A \wedge A$.

Топологической моделью называется пара $M = (\mathfrak{X}, \theta)$, где $\mathfrak{X}$ — топологическое пространство, а функция $\theta : \textsc{Prop} \to 2^{\mathfrak{X}}$ — *оценка на* $\mathfrak{X}$. *Истинность формулы* A *в точке* $x \in \mathfrak{X}$ (обозначается $M, x \models A$) определяется, рекурсивно по построению формулы:

1) $M,x \models p \iff x \in \theta(p)$
2) $M,x \models A \to B \iff (M,x \models A \Rightarrow M,x \models B)$
3) $M,x \models \Box A \iff \exists U(x) \forall y \in U(x)\,(M,y \models A)$
4) $M,x \models [\neq]A \iff \forall y\,(y \neq x \Rightarrow M,y \models A)$

где $p \in \textsc{Prop}$, а $U(x)$ — окрестность точки x.

Шкалой Крипке F называется тройка (W, R, R_D), где $W \neq \varnothing$ и $R, R_D \subseteq W \times W$. *Модель Крипке на* F — это пара $M = (F, \theta)$, где $\theta : \textsc{Prop} \to 2^W$ — оценка на F. *Истинность формулы* A *в точке* x определяется также, как для топологической модели, за исключением следующих случаев:

3) $M,x \models \Box A \iff \forall y (xRy \Rightarrow M,y \models A)$
4) $M,x \models [\neq]A \iff \forall y (xR_D y \Rightarrow M,y \models A)$

Формула A *общезначима* в шкале F (обозначение: $F \models A$), если $\forall x \forall \theta (F, \theta, x \models A)$; аналогично для топологического пространства. Формула A называется выполнимой в модели M, если $M, x \models A$, для некоторой точки x. Формула A называется выполнимой в шкале (топологическом пространстве), если она выполнима в некоторой модели построенной на базе этой шкалы (пространства).

Пусть $F = (W, R)$ — шкала с одном отношением, в которой общезначима логика S4, тогда множество всех R-устойчивых подмножеств $T = \{U \subseteq W \mid R(U) \subseteq U\}$ является топологией[1]. Топологическое пространство (W, T) обозначается $Top(F)$. Более того, эта топология является *александровской*.

[1] В литературе встречается термин *правая топология*.

Если забыть про вторую модальность $[\neq]$, то в моделях построенных на базе F и на базе $Top(F)$ будут истинны одни и те же формулы.

Бимодальной логикой (или просто *логикой*) называется множество модальных формул, замкнутых относитеольно правил подстановки $\left(\frac{A(p_i)}{A(B)}\right)$, Modus Ponens $\left(\frac{A, A\to B}{B}\right)$ и двух следующих правил $\left(\frac{A}{\Box A}, \frac{A}{[\neq]A}\right)$, содержащая классические тавтологиии и следующие аксиомы

$$\Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q),$$
$$[\neq](p\to q)\to([\neq]p\to[\neq]q).$$

K_2 обозначает *минимальную бимодальную логику*.

Пусть L является логикой, тогда шкала F называется L-шкалой, если все формулы из L общезначимы в F.

Пусть L является логикой и Γ множеством формул, тогда $L+\Gamma$ обозначает минимальную модальную логику содержащую L и Γ. Для формулы A мы будем писать $L+A$ вместо $L+\{A\}$.

Мы также рассмотрим следующие дополнительные аксиомы

$$\begin{array}{ll}
(B_D) & p\to[\neq]\langle\neq\rangle p\\
(4_D^-) & (p\wedge[\neq]p)\to[\neq][\neq]p\\
(T_\Box) & \Box p\to p\\
(4_\Box) & \Box p\to\Box\Box p\\
(D_\Box) & [\forall]p\to\Box p\\
(AT_1) & [\neq]p\to[\neq]\Box p\\
(DS) & [\neq]p\to\Diamond p\\
(AC) & [\forall]\,(\Box p\vee\Box\neg p)\to[\forall]\,p\vee[\forall]\,\neg p\\
(AE_2) & [\neq]p\wedge\neg p\wedge\Box(p\to\bigvee_{i=1}^{3}\Box Q_i)\to\\
 & \quad\to\bigvee_{1\le i<j\le 3}\Box(p\to Q_i\vee Q_j)
\end{array}$$

где $Q_1=q_1\wedge q_2$, $Q_2=q_1\wedge\neg q_2$ и $Q_3=\neg q_1$

Введем обозначения для следующих логик

$$\mathsf{S4D}=\mathsf{K}_2+\{B_D,4_D^-,D_\Box,T_\Box,4_\Box\},$$
$$\mathsf{LC}_2=\mathsf{S4D}+\{AT_1,DS,AC,AE_2\}$$

Логикой класса $\mathscr{C}$ пространств (шкал Крипке) называется множество всех формул, общезначимых во всех пространствах (шкалах) из $\mathscr{C}$; обозначение — $L(\mathscr{C})$. *L-шкала* — это шкала F, такая что $\forall A\in L(F\models A)$.

Теорема 2.1 ([3]). *Логикой класса всех топологических пространств является* $\mathsf{S4D}$.

Напомним, что пространство *локально связно*, если любая окрестность любой точки содержит связную подокрестность. Локально связное T_1-пространство $\mathfrak{X}$ назовем *локально n-компонентным*, если любое связное открытое подмножество после удаления любой точки содержит не более n компонент связности.

Отметим свойства топологических пространств, соответствующие перечисленным выше аксиомам (см. [3]).

(DS)	плотность в себе
(AT_1)	T_1-пространство
(AE_2)	локальная 2-компонентность
(AC)	связность

Так как вещественная прямая $\mathbb{R}$ удовлетворяет всем этим свойствам, то $L(\mathbb{R})\supseteq\mathsf{LC}_2$. Однако в работе [4] было показано, что $L(\mathbb{R})\neq\mathsf{LC}_2$, и более того, доказана теорема

Теорема 2.2. *Логика $L(\mathbb{R})$ не является аксиоматизируемой формулами, использующими только n переменных, для любого n.*

В частности $L(\mathbb{R})$ не является конечноаксиоматизируемой.

Для $\mathsf{S4D}$-шкалы F, пусть $\widehat{R}\leftrightharpoons R\circ R^{-1}$; $\widetilde{R}$ — транзитивное замыкание $\widehat{R}$, тогда $\widetilde{R}$ — эквивалентность. Шкала F — *связная*, если $\forall x\forall y(x\widetilde{R}y)$. $R^*\leftrightharpoons\widetilde{R\big|_{W^-}}$, где $W^-\leftrightharpoons\{w\in W\mid wR_Dw\}$. F *локально 2-компонентна*, если каждая $R(x)$ пересекает не более двух R^*-классов.

Известно, что в $\mathsf{S4D}$-шкале отношение R рефлексивно и транзитивно, а рефлексивное замыкание R_D — эквивалентность.

В этой работе мы продолжаем изучать логику $L(\mathbb{R})$ и для этого оказывается эффективным использовать шкалы Крипке этой логике. Перечислим свойства шкал Крипке, соответствующие перечисленным выше аксиомам (см. [3]).

(DS)	$\forall x(R(x)\cap R_D(x)\neq\varnothing)$
(AT_1)	$\forall x(\neg xR_Dx\Rightarrow\neg\exists y(yRx\ \&\ y\neq x))$
(AE_2)	локальная 2-компонентность
(AC)	связность

Определение 1. $F=(W,R,R_D)$ — $\mathsf{S4D}$-шкала, $\mathfrak{X}$ — пространство. Сюръективная функция $f:\mathfrak{X}\to F$ называется *cdp-морфизмом,* (обозначение $f:\mathfrak{X}\xrightarrow{D}F$) если для любого $w\in W$: (1) $\mathbf{C}f^{-1}(w)=f^{-1}(R^{-1}(w))$, (2) если $\neg wR_Dw$, то $f^{-1}(w)$ одноэлементно ($\mathbf{C}$ — оператор замыкания в топологическом пространстве $\mathfrak{X}$).

Лемма 2.3. *[3] Если $f:\mathfrak{X}\xrightarrow{D}F$ и F — конечная* **S4D***-шкала, то $L(\mathfrak{X})\subseteq L(F)$.*

3. Финитная аппроксимируемость

В этой статье *графом* Γ мы будем называть одномерный клеточный комплекс (другой — термин *мультиграф*), т. е. $\Gamma=(V,E,\varepsilon)$, где V — множество *вершин*, E — множество *ребер*, $\varepsilon:E\to\{\{v_1,v_2\}\mid v_1,v_2\in V\}$. Элементы $\varepsilon(e)$ называются *концами e*. *Путь в графе* $\Gamma=(V,E,\varepsilon)$ — это кортеж $P=(v_0e_1v_1\dots e_nv_n)$, где $\varepsilon(e_i)=\{v_{i-1},v_i\}$ для всех $i=1,\dots,n$. Путь в графе называется *эйлеровым*, если он содержащит все его ребра в точности по одному разу.

$F = (W, R, R_D)$ — LC_2-шкала. Построим граф $\Gamma(F) = (V, W^\circ, \varepsilon)$. $W^\circ = \{w \mid \neg w R_D w\}$, $W^- = W - W^\circ$ $V = W^-/R^*$, $\varepsilon(x) = \{[w] \in V \mid [w] \cap R(x) \neq \varnothing\}$. Т.к. $F \models DS \wedge AE_2$, то $\varepsilon(x)$ одно- или двухэлементное множество.

Лемма 3.1. *Если F — конечная LC_2-шкала и $f : \mathbb{R} \xrightarrow{D} F$, тогда и только тогда, когда в $\Gamma(F)$ есть эйлеров путь.*

Доказательство слева направо подробно рассмотренно в [4].

Чтобы доказать эту лемму справа налево нужно построить cdp-морфизм $f : \mathbb{R} \xrightarrow{D} F$, исходя из того, что в $\Gamma(F)$ есть эйлеров путь. Конструкция этого морфизма строится аналогично морфизму, который строится в [5, Теорема 3.16], но с заметными отличиями. К сожалению, формат этой работы не позволяет разместить полное доказательство.

Пусть $\mathscr{C}_E$ — класс всех конечных LC_2-шкал, таких что в $\Gamma(F)$ есть эйлеров путь, и $L_E = L(\mathscr{C}_E)$.

Из лемм 3.1 и 2.3 следует, что $L(\mathbb{R}) \subseteq L_E$. Более того

Теорема 3.2. *Логики $L(\mathbb{R})$ и L_E совпадают.*

Опишем план доказательства этой теоремы.

Пусть формула $A \notin L(\mathbb{R})$, тогда существует оценка Θ на $\mathbb{R}$ и точка x, такие что $M, x \not\models A$ $(M = (\mathbb{R}, \Theta))$ или, что тоже самое, $\mathbb{R}, \Theta, x \models \neg A$. Мы построим по модели $(\mathbb{R}, \Theta)$ конечную LC_2-модель $N = (F, \theta)$, такую что $\Gamma(F)$ имеет эйлеров путь и $M, w \models \neg A$. Для этого мы воспользуемся несколько модернизированным методом эпифильтрации (см. [11]) и адаптируем его к топологическим моделям.

Пусть Φ — множество всех подформул формулы $\neg A$. Все следующие определения можно обобщить на любую топологическую модель, но мы для определенности будем рассматривать модель $(\mathbb{R}, \Theta)$.

$$\Phi_x = \{A \in \Phi \mid \mathbb{R}, \Theta, x \models A\}$$

Определим отношение $\sim_\Phi$ на $\mathbb{R}$ следующим образом

$$x \sim_\Phi y \iff \Phi_x = \Phi_y.$$

Пусть $\sim \subseteq \sim_\Phi$ — некоторое отношение на $\mathbb{R}$ и $[x]$ обозначает класс эквивалентности точки x по $\sim$. *Топофильтрацией* топологической модели M через отношение $\sim$ будем называть модель $N = (W, R, \theta)$, такую что

$$\begin{array}{rcll} W & = & \mathbb{R}/\sim & \\ [x] \in \eta(p) & \Leftrightarrow & x \in \theta(p) & (1) \\ x\mathbf{C}[y] & \Rightarrow & [x]R[y] & (2) \\ [x]R[y] & \Rightarrow & \forall \Diamond A \in \Phi(M, y \models A \Rightarrow M, x \models \Diamond A) & (3) \end{array}$$

Лемма 3.3. *Пусть $(\mathbb{R}, \Theta)$ — топологичская модель, Φ — множество формул, замкнутое относительно взятия подформулы, $\sim$ — отношение эквивалентности, т.ч. $\sim \subseteq \sim_\Phi$ и $\sim$ имеет конечное число классов эквивалентности. Пусть $M = (F, \theta)$ — топофильтрация $(\mathbb{R}, \Theta)$ через $\sim$. Тогда для любых $x \in \mathbb{R}$ и $A \in \Phi$*

$$\mathbb{R}, \Theta, x \models A \iff F, \theta, [x] \models A. \tag{4}$$

Доказательство. Доказываем по индукции по построению формулы. База индукции выполнятется благодаря (1).

Единственный не тривиальный случай, когда $A = \Diamond B$.

$$\begin{aligned} & x \models \Diamond B \Longrightarrow x \in \mathbf{C}(\Theta(B)) \Longrightarrow x \in \mathbf{C}(\bigcup\{[y] \mid B \in \Phi_y\}) \\ & \Longrightarrow \exists y\,(y \models B \,\&\, x \in \mathbf{C}[y]) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \exists y\,(y \models B \,\&\, [x]R[y]) \\ & \overset{\text{инд}}{\Longrightarrow} \exists y\,([y] \models B \,\&\, [x]R[y]) \Longrightarrow [x] \models \Diamond B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [x] \models \Diamond B \Longrightarrow \exists [y]\,([y] \models B \,\&\, [x]R[y]) \\ & \overset{\text{инд}}{\Longrightarrow} \exists y\,(y \models B \,\&\, [x]R[y])) \\ & \Longrightarrow \exists y\,(B \in \Phi_y \,\&\, [x]R[y])) \\ & \overset{(3)}{\Longrightarrow} \exists y\,(B \in \Phi_y \,\&\, \Diamond B \in \Phi_x) \\ & \Longrightarrow x \models \Diamond B \qquad \square \end{aligned}$$

Минимальную фильтрацию можно определить явно следующим образом

$$\begin{array}{rcl} F & = & (W, R) \\ W & = & \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\} \\ [x]R[y] & \iff & \exists x'(x' \sim x \,\&\, x' \in \mathbf{C}[y]) \\ [x] \in \theta(p) & \iff & p \in \Phi_x \end{array}$$

Но в случае минимальной фильтрации отношение R может оказаться нетранзитивным, в то время как рефлексивность R очевидна. Нам же необходимо, чтобы R была транзитивным. Для этого мы заменим отношение R в шкале F на его транзитивное замыкание R^*.

Лемма 3.4. *Модель $M^* = (F^*, \theta)$, где $F^* = (W, R^*)$ является топофильтрацией $(\mathbb{R}, \Theta)$ через $\sim$.*

Доказательство. Пусть

$$[x]R[y] \text{ и } [y]R[z]$$

Покажем, что для любой формулы $\Diamond B \in \Phi$, если $B \in \Phi_x$, то $\Diamond B \in \Phi_z$.

По определению

$$\exists y' \in [y](y' \in \mathbf{C}[z]) \,\&\, B \in \Phi_z,$$

тогда

$$y' \models \Diamond B \Longrightarrow \Diamond B \in \Phi_y.$$

Аналогичным образом можем показать, что

$$\exists z'(z' \models \Diamond\Diamond B).$$

Т.к. $\mathsf{S4} \vdash \Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$, то $z' \models \Diamond B$. Следовательно, $\Diamond B \in \Phi_z$.

Таким образом мы доказали, что xR^2z, поэтому для любой формулы $\Diamond B \in \Phi$ if $B \in \Phi_z$, и занчит $\Diamond B \in \Phi_x$. Это рассуждение продолжается по индукции на любую степень R. □

Расширим понятие топофильтрации на топологические модели с неравенством:

Определение 2. Пусть $(\mathbb{R},\Theta)$ — топологическая модель, Φ — множество формул, замкнутое относительно подформул, и $\sim \subseteq \sim_\Phi$ отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$. Определим топофильтрацию с неравенством через $\sim$, как модель Крипке $M = (F,\theta)$, где $F = (W,R,R_D)$, такая что (W,R,θ) — топофильтрация $(\mathbb{R},\Theta)$ через $\sim$ и

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad [x]R_D[y] \tag{5}$$

$$[x]R_D[x] \quad \Leftrightarrow \quad |[x]| > 1 \tag{6}$$

Определим множество точек, различимых с помощью Φ:

$$D = \{x \mid \Phi_x = \{x\}\} \tag{7}$$

Множество D конечно, поэтому мы можем пронумеровать все точки в нем $D = \{a_1,\ldots,a_n\}$. Эти точки разбивают $\mathbb{R}$ на $n+1$ интервалов U_0, U_1, $\ldots$, U_n.

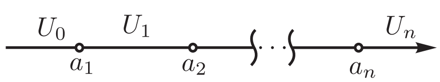

Рис. 1. Разбиение прямой.

Определим отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$ следующим образом

$$x \sim y \iff \Phi_x = \Phi_y \text{ и } \exists i(x,y \in U_i). \tag{8}$$

Очевидно, что $\sim \subseteq \sim_\Phi$.

$$\begin{array}{rcl}
W & = & \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\} \\
{[x]R^\circ[y]} & \iff & \exists x' \in [x](x' \in \mathbf{C}[y]) \\
R & = & \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \underbrace{R^\circ \circ \ldots \circ R^\circ}_{j} \\
{[x]R_D[y]} & \iff & \exists x' \in [x] \exists y' \in [y](x' \neq y') \\
F & = & (W,R,R_D) \\
{[x]} \in \theta(p) & \iff & p \in \Phi_x \\
M = (F,\theta) & &
\end{array}$$

Лемма 3.5. *Модель M, определенная выше является топофильтрацией $(\mathbb{R},\Theta)$ с неравенством.*

Доказательство. Все условия, кроме условий для R_D были проверены в лемме 3.4.

Если $x \neq y$, то $[x]R_D[y]$ по определению. Если $|[x]| = 1$, то $x \in D$ и $\neg[x]R_D[x]$. □

Лемма 3.6. *Пусть $M = (F,R,R_D,\theta)$ — топофильтрация $(\mathbb{R},\Theta)$ с неравенством через $\sim$, U — связное открытое подмножество $\mathbb{R}$ (интервал) и $V = \{[y] \mid y \in U\}$. Тогда для любого разбиения $V = V_1 \sqcup V_2$ найдутся две точки y_1 и y_2, такие, что $[y_1] \in V_1$, $[y_2] \in V_2$ и $[y_1]R[y_2]$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие множества

$$U_1 = \{y \in U \mid [y] \in V_1\}, \qquad U_2 = \{y \in U \mid [y] \in V_2\}.$$

Эти два множества не могут быть открытыми одновременно, т.к. в этом случае множетво U не было бы связным. Предположим, что U_1 не открыто, тогда

$$\mathbf{C}U_2 \cap U_1 \neq \varnothing.$$

Пусть $y_1 \in U_1$ и $y_1 \in \mathbf{C}U_2$, тогда для некоторогоy_2 inU_2 $y_1 \in \mathbf{C}[y_2]$. Т.к. M — топофильтрация, то $[y_1]R[y_2]$. □

Лемма 3.7. $F \models \mathsf{LC}_2$

Доказательство. Проверим общезначимость всех аксиом LC_2:

(**DS**) Допустим, что $R_D([x]) \cap R([x]) = \varnothing$. Тогда $\neg[x]R_D[x]$, $[x] = \{x\}$ и $R([x]) = [x]$. Следовательно, $x \in \mathbf{C}\{x\}$. Пришли к противоречию, т.к. $\mathbb{R}$.плотно в себе.

($\mathbf{AT_1}$) Пусть $[x] = \{x\}$ и $\neg[x]R_D[x]$, $[y] \neq [x]$ и $[y]R[x]$. По построению M это значит, что

$$[y]R[y_1]R\ldots R[y_p]R[x],\ [y_p] \neq [x]$$

Следовательно, $[y_p] \ni y' \in \mathbf{C}\{x\}$. Но, $\mathbf{C}\{x\} = \{x\}$. Пришли к противоречию, т.к. $[y_p] \neq [x]$.

(**AC**) $\mathbb{R}$, как топологическое пространство, связно. Пусть F не связно, тогда

$$\begin{array}{l}
W = V_1 \sqcup V_2 \\
V_1 = R^{-1}(V_1) \\
V_2 = R^{-1}(V_2)
\end{array}$$

Рассмотрим $U_i = \{y \mid [y] \in V_i\}$ для $i = 1,2$. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ и, поскольку $\mathbb{R}$ связно, то (без потери общности) существует x, т.ч. $x \in U_1 \cup \mathbf{C}U_2$. Поскольку V_2 конечно, то

$$x \in Cf\bigcup\{[y] \mid [y] \in V_2\} \Longrightarrow \exists [y'](x \in \mathbf{C}[y']) \Longrightarrow [x]R[y']$$

Последнее противоречит тому, что $V_2 = R^{-1}(V_2)$.

($\mathbf{AE_2}$) Пусть $[x] = \{x\}$, $\neg[x]R_D[x]$ и $\dot{V} = R_D([x]) \cup R([x])$ имеет три компоненты связности, т.е. существуют V_1, V_2 и V_3, т.ч.

$$\dot{V} = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$$

Рассмотрим множество связных окрестностей

$$U_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right), \quad \text{для } i \in \mathbb{N}$$

Для произвольного y, т.ч. $[y] \in R([x])$ x — предельная для $[y]$ и, если $[y] \notin R([x])$, то x не является предельной для $[y]$. Следовательно, существует k, т.ч. $\{[y] \mid y \in U_k\} = R([x])$.

$$U_i = \{y \in U_k \mid [y] \in V_i\} \text{ for } i = 1, 2, 3.$$

Поэтому

$$U_k - \{x\} = \dot{U} = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3$$

Поскольку, $\dot{U}$ состоит из двух связных открытых подмножеств, то без потери общности можно предположить, что существует $z \in U_1$, т.ч. $z \in \mathbf{C}(U_2 \cup U_3)$. Действительно, если множество $\mathbf{C}U_1$ не пересекается с $U_2 \cup U_3$, то последнее множество открыто. Аналогичное можно заключить для всех трех множеств, из этого следует, что для любого i множество U_i открыто, что противоречит тому, что $\mathbb{R}$ локально 2-компонентно..

Множество $V_2 \cup V_3$ конечно, поэтому

$$z \in \mathbf{C}(U_2 \cup U_3) = \mathbf{C}\left(\bigcup_{[y] \in V_2 \cup V_3} [y]\right) \Longrightarrow \exists [t] \in V_2 \cup V_3 (z \in \mathbf{C}[t]).$$

Следовательно, $[z]R[t]$, что протворечит тому, что $[z]$ и $[t]$ принадлежат разным компонентам связности множества $\dot{V}$. $\square$

Лемма 3.8. $\Gamma(F)$ *имеет эйлеров путь.*

Доказательство. Возьмем множестов D из (7) и множества U_i, как на рис. 1.

$$V_i = \{[y] \mid y \in U_i\}$$

Для любого i V_i связное множество. Действительно, по лемме 3.6 существует путь, соединяющий все точки в V_i. Поэтому множества V_i образуют вершины, a_i образуют ребра в графе $\Gamma(F)$. Т.е. этот граф фактически линейный и, поэтому имеет эйлеров путь. $\square$

Завершим доказательство теоремы 3.2. Как уже было сказано нам, нужно построить конечную модель M, в которой опровергается формула $A \notin L(\mathbb{R})$, а ее шкала F является LC_2-шкалой и $\Gamma(F)$ имеет эйлеров путь. Такая модель получается при топофильтрации. Формула A опровергается в этой модели по лемме о фильтрации, а необходимые свойства шкалы F обеспечиваются леммами 3.7 и 3.8. Поэтому, $A \notin L_E$.

Следствие 3.9. *Логика $L(\mathbb{R})$ разрешима.*

Доказательство. Из конструкции топофильтрации можно оценить сверху размер максимальной контрмодели для формулы A, как 2^{2n}, где $n = |\Phi|$, а Φ множество всех подформул формулы $\neg A$. Таким образом, чтобы определить принадлежит ли формула A логике $L(\mathbb{R})$ достаточно проверить выполнимость $\neg A$ на всех шкалах из $\mathscr{C}_E$ мощности не более, чем 2^{2n}. $\square$

Список литературы

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema. *Modal Logic.* Cambridge University Press, 2001.

[2] A. Kudinov *Difference modality in topological spaces.* Algebraic and Topological Methods in Non-classical Logics II, Abstracts, Barcelona, 2005, 50-51.

[3] A. Kudinov *Topological Modal Logics with Difference Modality.* Advances in Modal Logic, V.6, College Publications, London, 2006, 319-332.

[4] А.В. Кудинов. *О топологической модальной логике $\mathbb{R}$ с неравенством*, УМН, 2008, 63:1(379), 163–164

[5] А.В. Кудинов *Топологические модальные логики с модальностью неравенства* Диссертация на соискание ученой степени к. ф.–м. н., Москва, 2008.

[6] К. Куратовский. *Топология.* Том 1. Издательство «Мир», Москва, 1966

[7] Л.Л.Максимова, Д.П.Скворцов, В.Б.Шехтман, *Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева* Доклады АН СССР, т.245, N 5, 1979, 1051-1054

[8] J. C. C. McKinsey, A. Tarski. *The algebra of topology.* Annals of Mathematics, 45(1):141–191, 1944.

[9] I. Shapirovsky, V. Shehtman *Modal Logics of Regions and Minkowski Spacetime.* Journal of Logic and Computation, 2005, 15, 559-579.

[10] V. Shehtman *"Everywhere" and "Here".* Journal of Applied Non-classical Logics, v.9 (1999), No 2/3, 369-380.

[11] V. Shehtman *A new version of the filtration method* Advances in Modal Logic, V.5, College Publications, London, 2004.