

УТОЧНЫЕ ЦИКЛЫ В ТИПИЧНЫХ БЫСТРО-МЕДЛЕННЫХ СИСТЕМАХ НА ТОРЕ*

И. В. ЩУРОВ

В типичных быстро-медленных системах на двумерном торе с единственным параметром при сколь угодно малом значении этого параметра существуют притягивающие уточные циклы. Это существенно отличает динамику на торе от динамики аналогичных систем на плоскости. Ранее это было показано для систем с выпуклой медленной кривой. В настоящей работе рассматриваются системы с невыпуклой медленной кривой. Получены верхняя и нижняя оценки на число уточных циклов. Построено открытое множество систем, обладающих заданным наперед числом притягивающих уточных циклов.

Оглавление

- § 1. Введение
- § 2. Основные результаты
- § 3. Отображение Пуанкаре: обзор доказательства
- § 4. Нормализация и оценки производных
- § 5. Оценка второй производной отображения Пуанкаре
- § 6. Максимальное число уточных циклов
- § 7. Нелинейные эффекты

§ 1. Введение

Рассмотрим быстро-медленную систему на торе:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0). \quad (1.1)$$

В таких системах проявляется новый эффект, не наблюдающийся у аналогичных систем на плоскости. Он связан с притягивающими замкнутыми решениями, являющимися утками [1, 2], которые проходят ограниченное снизу (при $\varepsilon \rightarrow 0$) расстояние вблизи неустойчивой части медленной поверхности.

Впервые этот эффект был описан Ю. С. Ильяшенко и Дж. Гукенхеймером в работе [3]. Было показано, что для некоторого конкретного семейства систем в отсутствие дополнительных параметров существует последовательность интервалов, накапливающаяся к нулю и такая, что для всякого ε из этих интервалов система обладает

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 10-01-00739-а).

парой циклов-уток, один из которых является притягивающим, а другой — отталкивающим, причем такая пара единственна. Это существенно отличает динамику на торе от динамики на плоскости, где уточные решения такого типа наблюдаются при наличии дополнительного параметра (см., например, [4]).

В дальнейшем это утверждение было обобщено на случай произвольной быстро-медленной системы на торе, обладающей выпуклой медленной кривой и удовлетворяющей некоторым условиям локальной типичности (см. [5]).

Настоящая работа продолжает указанные исследования и посвящена рассмотрению случая невыпуклой медленной кривой. Оказывается, в зависимости от формы медленной кривой и значений производной f'_x на ней можно наблюдать несколько пар устойчивых и неустойчивых уточных циклов для сколь угодно малого значения параметра. Их число не превосходит количества складок медленной кривой при проектировании вдоль направления быстрого движения. В то же время для любого заданного наперед числа k можно построить открытое множество систем, обладающих k парами уточных циклов для сколь угодно малого значения параметра ε .

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе приводятся необходимые определения и формулируются основные результаты работы.

2.1. Предварительная формулировка основного результата. В этом пункте мы строго сформулируем два результата, полученные в настоящей работе, минимизируя при этом количество предварительных построений. В пунктах 2.2 и 2.3 приводятся формулировки аналогичных, но более точных результатов.

Рассмотрим быстро-медленную систему на торе:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z}^2), \quad \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0), \quad (2.1)$$

где функции f и g достаточно гладкие для выполнения всех дальнейших утверждений. На протяжении всей работы мы будем считать, что скорость медленного движения отделена от нуля (для определенности, $g > 0$) и поднятие медленной кривой $M := \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$ на накрывающую координатную плоскость принадлежит внутренности квадрата $\{|x| < \pi, |y| < \pi\}$. Мы также потребуем, чтобы для любой точки $(x, y) \in M$, отличной от точек складок, выполнялось неравенство $f'_x(x, y, 0) \neq 0$. Эти условия задают открытое множество в пространстве всех быстро-медленных систем на торе. Без ограничения общности можно считать, что $f(x, 0, 0) > 0$ (вне внутренности медленной поверхности быстрое движение направлено в положительном направлении). Поскольку нас интересуют только фазовые кривые системы (2.1), но не их параметризация, мы можем разделить векторное поле системы на g и без ограничения общности считать, что $g \equiv 1$.

Нас будут интересовать *уточные решения*, т. е. решения, проходящие при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ на определенном от нуля расстоянии вблизи неустойчивой части медленной кривой. Точное определение будет дано ниже (см. определение 2.4 в следующем пункте). Основной целью является анализ *уточных циклов*, совершающих один оборот вдоль оси y .

Теорема 2.1 (оценка сверху на число уточных циклов). *Типичная система вида (2.1) обладает следующим свойством. На оси ε существует накапливающаяся к нулю последовательность интервалов, такая что для всякого ε принадлежащего какому-либо из этих интервалов, система обладает притягивающими замкнутыми уточными решениями (уточными циклами), совершающими один оборот вдоль оси y . Бассейн притяжения каждого из этих циклов (на всем торе) имеет равномерно ограниченную снизу меру. Их количество не превосходит половины от количества точек срыва (т. е. точек кривой M , в которых касательная к M вертикальна).*

Теорема 2.1 является следствием более точной и сильной теоремы 2.5, сформулированной в следующем пункте, вместе с предложением 2.6. Она дает оценку сверху на число уточных циклов типичной системы. Для случая, когда M является выпуклой кривой (точнее, содержит ровно две точки срыва), теорема была доказана в [5]. В настоящей работе рассматривается случай невыпуклой медленной кривой M .

Теорема 2.2 (точная оценка). *Существует открытое множество систем, для которых достигается верхняя оценка на число уточных циклов, приведенная в теореме 2.1: число уточных циклов равно числу складок на медленной кривой.*

Теорема 2.2 доказана в параграфе 6. В пункте 2.3 сформулирован частный результат такого типа в простейшем невыпуклом случае: для этого случая сформулированы явные необходимые и достаточные условия существования максимального числа притягивающих уточных циклов, и тем самым явно описано открытое множество систем, фигурирующее в данной теореме.

2.2. Общий случай: оценка сверху на число уточных циклов. Нам потребуется наложить дополнительные требования на систему (2.1): исключить из рассмотрения системы, удовлетворяющие конечному числу условий типа равенства, которые будут формулироваться по тексту статьи. В частности, всюду в дальнейшем мы будем требовать выполнения дополнительного условия невырожденности: все точки складок медленной кривой M невырождены:

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial x^2} \right|_G \neq 0, \quad \left. \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial y} \right|_G \neq 0 \quad (2.2)$$

для всякой точки складки G кривой M . Мы также требуем, чтобы все точки складок имели различные y -координаты:

$$y(G_1) \neq y(G_2). \quad (2.3)$$

По ходу доказательства результатов нам потребуется наложить на систему еще два условия невырожденности такого же типа, формулировка которых требует дополнительных построений (см. (5.4) и (5.17)).

Определение 2.3. Точка складки G медленной кривой M называется точкой прямого (обратного) срыва, если в ее малой окрестности участок медленной кривой располагается слева (справа) от G .

Обозначим через G^\pm крайнюю левую ($-$) и крайнюю правую ($+$) точки срыва (они определены однозначно в силу условий невырожденности (2.2) и (2.3)).

Пусть J^+ — некоторый фиксированный отрезок, трансверсальный к неустойчивой части медленной кривой M , близкий к точке обратного срыва G^+ (см. рис. 1) и не пересекающий устойчивую часть медленной кривой. Его точное расположение будет определено ниже (см. с. 208).

Определение 2.4. Траектория называется *точной*, если она пересекает J^+ .

Траектория, стартующая с J^+ , в обратном времени быстро притягивается к медленной кривой и почти все расстояние до точки срыва проходит вблизи неустойчивой части медленной кривой. Таким образом, формальное определение 2.4 соответствует эвристическому описанию уточных решений, приведенному в пункте 2.1.

На рис. 1 изображен простейший случай невыпуклой медленной кривой. Рассмотрим траекторию, проходящую вблизи отталкивающей дуги медленной кривой DG^- . Обратим время: при этом дуга DG^- становится притягивающей, и траектория движется влево вблизи этой дуги вплоть до *обратного срыва* вблизи D , после чего притягивается к участку G^+F , снова двигаясь влево вплоть до точки срыва G^+ . Следовательно, она пересекает отрезок J^+ , и тем самым будет точной в смысле приведенного определения. В более сложных случаях траектория, проходящая вблизи какой-либо неустойчивой дуги медленной кривой, в обратном времени может претерпевать серию обратных срывов, после которых пересечет J^+ .

Рассмотрим невырожденную систему вида (2.1) с $2N$ точками срыва.

Теорема 2.5. *Существует положительное число $k \leq N$, последовательность непересекающихся отрезков $R_n := [\alpha_n, \beta_n]$ и набор из k последовательностей непересекающихся непустых интервалов $C_n^i \subset R_n, i = 1, \dots, k$, таких что выполняются следующие свойства (см. рис. 2):*

1. $|R_n| = O(e^{-Cn})$.
2. $\alpha_n = O(1/n)$.
3. Для малых ε , не принадлежащих объединению R_n , система обладает ровно двумя гиперболическими периодическими траекториями — устойчивой и неустойчивой, причем неустойчивая является уткой.
4. Для малых ε из C_n^i у системы есть ровно i пар гиперболических периодических траекторий (устойчивая и неустойчивая), все периодические траектории являются утками.
5. Для любых малых $\varepsilon > 0$ общее число предельных циклов, делающих 1 оборот вдоль оси y , не превосходит $2k$.

Предложение 2.6. *Для всякого $\varepsilon \in C_n^i$ мера бассейна притяжения (отталкивания) каждого уточного цикла равномерно отделена от нуля.*

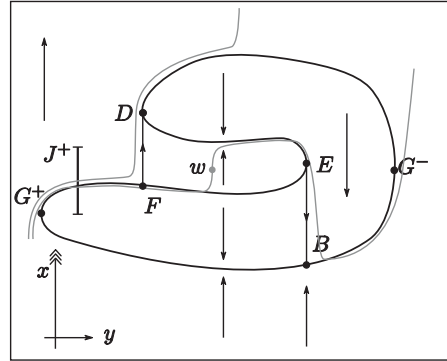


Рис. 1. Простейший невыпуклый случай: 4 точки срыва. E и G^- — точки прямого срыва, G^+ и D — обратного. Тройной стрелкой показано направление быстрого движения

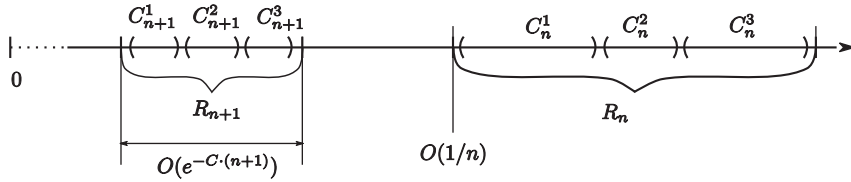


Рис. 2. Области на луче $\varepsilon > 0$

Число k зависит от формы медленной кривой M и значений интегралов функции f'_x по специальным наборам дуг медленной кривой и вычисляется явным образом по системе.

2.3. Оценка снизу на число уточных циклов. Рассмотрим систему вида (2.1), обладающую четырьмя складками: две из них будут точками прямого срыва и две — обратного. Согласно теореме 2.5, она обладает не более чем двумя парами уточных циклов. В этом пункте мы сформулируем явные условия, при которых система обладает *в точности* двумя парами уточных циклов (или, что то же самое, двумя притягивающими уточными циклами).

Рассмотрим случай, изображенный на рис. 1. Другие случаи взаимного расположения точек срыва рассматриваются аналогично.

Введем обозначение:

$$\Phi(U) = \int_U f'_x|_{(x(y),y,0)} dy, \tag{2.4}$$

где U — некоторая дуга медленной кривой M , $x = x(y)$ задает график этой дуги. Выпуская две близкие траектории из окрестности начала этой дуги и интегрируя уравнение в вариациях для них, нетрудно видеть, что данный интеграл определяет скорость «сближения» (или «разбегания») траекторий за время движения вблизи дуги. Он отрицателен, если U является притягивающей дугой, и положителен, если U отталкивает.

Теорема 2.7. Пусть невырожденная система вида (2.1) соответствует рис. 1 и выполняются дополнительные соотношения, называемые «условиями балансировки»:

1. $\Phi(G^+E) + \Phi(BG^-) > 0$.
2. $\Phi(G^+F) + \Phi(DE) + \Phi(BG^-) < 0$.

Тогда в теореме 2.5 число k пар уточных циклов максимально и равно $N = 2$.

§ 3. Отображение Пуанкаре: обзор доказательства

3.1. Панорама доказательства. В этом пункте мы на описательном уровне приводим рассуждения, с помощью которых доказывается основной результат, и указываем ссылки на соответствующие места в работе.

Мы будем следовать основным идеям работы [3]. Ключевым инструментом дальнейшего анализа является отображение Пуанкаре P_ε с трансверсали $\Gamma := \{y = -\pi\}$ на себя вдоль фазовых кривых (2.1). В силу условия $g \equiv 1$, указанное отображение является всюду определенным диффеоморфизмом окружности. Его периодические

(в частности, неподвижные) точки соответствуют периодическим траекториям системы. Обозначим график отображения P_ε через γ_ε . Неподвижные точки отображения Пуанкаре соответствуют точкам пересечения графика с диагональю $\mathcal{D} := \{y = x\}$.

Практически во всех точках окружности-прообраза (за исключением малой дуги) отображение P_ε имеет производную, близкую к 0, т. е. сильно сжимает. В то же время оставшаяся малая дуга под действием P_ε сильно растягивается, и ее образом является почти вся окружность; в точках этой дуги производная отображения Пуанкаре может быть очень велика.

Геометрически это соответствует тому, что график γ_ε содержится в объединении двух узких полос: вертикальной и горизонтальной, см. рис. 5. Ширина полос экспоненциально мала вместе с ε (лемма 3.1). Полосы строятся таким образом, что все точки графика, лежащие в вертикальной полосе, соответствуют уточненным решениям системы.

Вне прямоугольника, являющегося пересечением полос, наклон графика либо очень мал (график проходит почти горизонтально), либо очень велик (график почти вертикален). Тем самым точки графика γ_ε , в которых производная P_ε равна 1 (мы будем называть их *нейтральными*), могут находиться только внутри указанного прямоугольника. Нейтральные точки разбивают график γ_ε на несколько дуг, на каждой из которых вторая производная отображения Пуанкаре сохраняет свой знак. Геометрически это означает, что в указанном прямоугольнике график имеет вид «лесенки» со ступеньками разной ширины и высоты (лемма 3.6).

Максимальное количество точек пересечения диагонали \mathcal{D} с графиком γ_ε оценивается сверху через число нейтральных точек (теорема Ролля). Когда \mathcal{D} проходит через очередную нейтральную точку, происходит либо рождение, либо уничтожение очередной пары уточненных циклов: их общее максимальное число зависит от взаимного расположения нейтральных точек (ширины и высоты «ступенек»).

Информация о производных отображения Пуанкаре, необходимая для анализа нейтральных точек, получается из следующих геометрических соображений. Рассмотрим *базовую полосу* в фазовом пространстве, ограниченную вертикальными окружностями, проходящими через крайнюю правую и крайнюю левую точки срыва, и содержащую медленную кривую M .

Любая траектория, проходящая через фиксированную точку этой полосы $w \notin M$, в прямом времени попадает на устойчивый участок медленной кривой, проходит вправо вдоль этого участка до точки срыва, претерпевает срыв, после чего либо выходит из базовой полосы, либо попадает на другой устойчивый участок и движется вдоль него до следующей точки срыва, после чего процесс повторяется вплоть до выхода из полосы. В обратном времени траектория попадает на неустойчивый участок медленной кривой, движется влево вдоль него до точки обратного срыва, претерпевает обратный срыв и либо выходит из базовой полосы, либо попадает на другой неустойчивый участок и т. д., вплоть до выхода из полосы. Таким образом, траектория проходит вблизи некоторых дуг устойчивых и неустойчивых участков медленной кривой (см. рис. 1 и построение в пункте 5.2).

В точке w происходит переключение, называемое «уточным срывом»: левее нее траектория движется вблизи устойчивых участков, а правее — вблизи неустойчивых. При движении вблизи устойчивых (неустойчивых) участков накапливается сбли-

жение (разбегание) траекторий. Производная отображения Пуанкаре определяется суммой интегралов $\int f'_x(x, y, 0) dy$ (ср. с (2.4)) по указанным дугам (см. лемму 5.4, а также обозначение, введенное в (5.3)).

Рассмотрим траекторию, проходящую через точку $(x, -\pi) \in \Gamma$. Она претерпевает не более чем один «точный срыв». В зависимости от его направления (вниз или вверх) при увеличении x точный срыв смещается вправо либо влево. В первом случае производная отображения Пуанкаре возрастает, поскольку увеличивается время, которое траектория проходит вблизи неустойчивых участков медленной кривой. Аналогично, во втором случае производная отображения Пуанкаре убывает. Переключение между режимом возрастания и режимом убывания происходит при достижении точным срывом какой-либо точки складки медленной кривой (см. эвристическое описание в пункте 5.1).

Таким образом, производная отображения Пуанкаре кусочно-монотонна, причем число интервалов монотонности не превосходит числа точек складок медленной кривой (см. лемму 3.5 и ее доказательство в параграфе 5). Это доказывает, что число нейтральных точек (а значит, и точных циклов) не превосходит числа точек складок. Явным построением можно показать (см. параграф 6), что максимальное число точных циклов реализуется на открытом множестве систем (теорема 2.2).

3.2. Структура доказательства. Доказательство основных результатов разбивается в серию из нескольких лемм, сформулированных в следующем пункте. Леммы 3.1 (о графике) и 3.2 (о монотонности) практически повторяют аналогичные леммы из работ [3, 5] (с незначительными изменениями). Они позволяют доказать утверждения 1–4 теоремы 2.5 для $k = 1$ (т. е. доказать существование притягивающих точных циклов для малых значений параметров). Эта часть доказательства практически не отличается от доказательства аналогичных утверждений для случая выпуклой медленной кривой. Леммы 3.5 и 3.6 позволяют доказать основные результаты (теоремы 2.5 и 2.7) в полной общности. Выводу этих теорем из сформулированных лемм посвящен пункт 3.4.

В параграфе 4 приведены необходимые факты о нормальных формах и оценках производных отображений Пуанкаре.

Более тонкий анализ, позволяющий доказать леммы 3.5 и 3.6, а с помощью них оценить количество рождающихся точных циклов и доказать утверждение 5 теоремы 2.5, а также теорему 2.7, требует получения оценок на вторую производную отображения Пуанкаре. Он существенно отличается от выпуклого случая и составляет основное содержание настоящей работы (параграф 5). Мы рассмотрим эффекты, связанные с невыпуклостью, на простом примере (см. эвристическое описание в пункте 5.1). Затем мы проанализируем общий случай и докажем теоремы 2.5 и 2.7 (см. пункты 5.2–5.4).

В параграфе 6 мы докажем теорему 2.2.

Технические утверждения, необходимые для оценок производных отображения Пуанкаре, доказаны в параграфе 7.

3.3. Основные факты и обозначения. В этом пункте мы введем некоторые обозначения, которые будут использоваться по тексту статьи, и сформулируем несколько лемм, описывающих свойства отображения Пуанкаре.

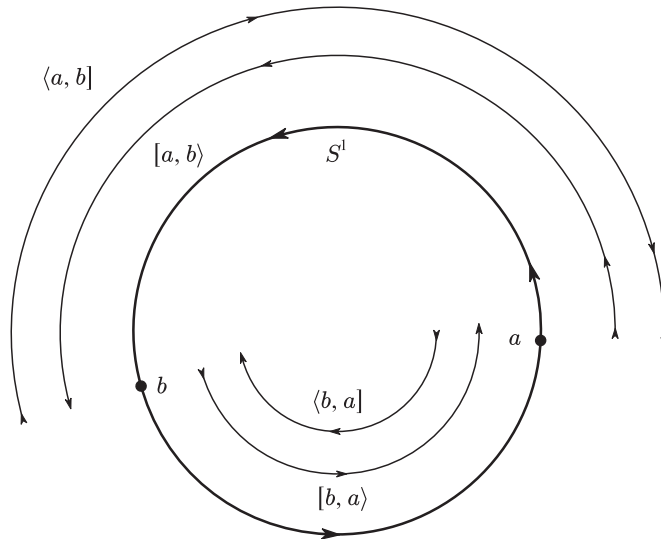


Рис. 3. Ориентация дуг

Следующая лемма формализует утверждение о том, что график отображения Пуанкаре лежит в объединении двух узких полос (см. рис. 5).

Лемма 3.1 (о графике). *Существуют такие константы $c_{1,2}^\pm > 0$, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют интервалы D_ε^+ и D_ε^- в прообразе и образе отображения P_ε соответственно, обладающие следующими свойствами:*

1. $|D_\varepsilon^\pm| = O(e^{-c_1^\pm/\varepsilon})$.
2. $|P_\varepsilon' ||_{S^1 \setminus D_\varepsilon^+} = O(e^{-c_2^+/\varepsilon})$.
3. $|(P_\varepsilon^{-1})' ||_{S^1 \setminus D_\varepsilon^-} = O(e^{-c_2^-/\varepsilon})$.
4. *Рассмотрим полосы $\Pi_\varepsilon^+ := D_\varepsilon^+ \times S^1$ и $\Pi_\varepsilon^- := S^1 \times D_\varepsilon^-$. График γ_ε лежит в их объединении: $\gamma_\varepsilon \subset \Pi_\varepsilon^+ \cup \Pi_\varepsilon^-$.*

Доказательство этой леммы для случая выпуклой медленной кривой проведено в [5] и переносится на общий случай без изменений, поскольку не использует факт выпуклости каким-либо существенным образом.

Следующая лемма формализует утверждение о том, что график γ_ε монотонно движется влево и вверх при $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Для формулировки нам потребуется напомнить некоторые обозначения, использованные в [5].

Рассмотрим произвольные точки a и b на ориентированной окружности S^1 . Они разбивают окружность на две дуги. Обозначим через $[a, b]$ дугу от точки a до точки b (в смысле ориентации окружности S^1), ориентированную так же, как S^1 . Через $\langle a, b \rangle$ обозначим ту же дугу, ориентированную противоположным образом (см. рис. 3).

Обозначим через $P_\varepsilon^{[a,b]}$ отображение Пуанкаре вдоль фазовых кривых системы (2.1) с трансверсали $y = a$ на трансверсаль $y = b$ в прямом времени (т. е. вдоль дуги $[a, b]$). Положим $P_\varepsilon^{\langle a,b \rangle} := (P_\varepsilon^{[a,b]})^{-1}$. Это отображение является отображением Пуанкаре в обратном времени с трансверсали $y = b$ на трансверсаль $y = a$, что

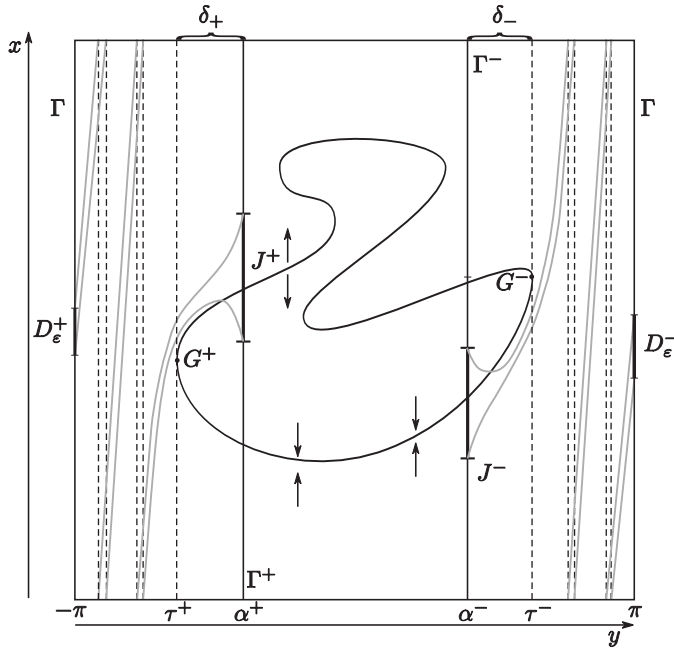


Рис. 4. Невыпуклая медленная кривая быстро-медленной системы на торе; медленное движение направлено горизонтально

подчеркивается обозначением дуги (направление угловой скобки указывает на направление времени).

Далее во всех выражениях, содержащих знаки \pm , следует читать либо только верхние знаки, либо только нижние.

Напомним, что через G^\pm обозначаются крайняя левая (+) и крайняя правая (-) точки срыва (мы будем называть их *главными точками* обратного и прямого срыва соответственно; они определены однозначно в силу условий невырожденности, см. пункт 2.2). Пусть они имеют координаты (σ^\pm, τ^\pm) соответственно (медленная кривая M лежит в полосе $\{\tau^+ \leq y \leq \tau^-\}$). Для некоторых малых фиксированных положительных δ_+ и δ_- определим следующие объекты:

1. Трансверсали Γ^\pm , пересекающие медленную кривую M вблизи главных точек срыва (см. рис. 4):

$$\Gamma^\pm := S^1 \times \{\alpha^\pm\},$$

где $\alpha^\pm = \tau^\pm \pm \delta_\pm$.

2. Отрезки J^+ и J^- трансверсалей Γ^\pm , пересекающие неустойчивый и устойчивые участки медленной кривой соответственно.
3. Отрезки D_ϵ^\pm , существование которых утверждается в лемме 3.1:

$$D_\epsilon^+ := P_\epsilon^{(-\pi, \alpha^+]}(J^+), \quad D_\epsilon^- := P_\epsilon^{[\alpha^-, \pi)}(J^-), \quad D_\epsilon^\pm = [p_\epsilon^\pm, q_\epsilon^\pm].$$

Итак, мы выбрали отрезок J^+ , фигурирующий в определении 2.4 уточного решения, которое тем самым завершено. Все траектории, пересекающие отрезок D_ϵ^+ , пересекают также J^+ , а значит являются утками.

Обозначим далее через A_ε^+ и A_ε^- точки графика γ_ε , лежащие над концами отрезка D_ε^+ (см. рис. 5):

$$A_\varepsilon^- := (p_\varepsilon^+, P_\varepsilon(p_\varepsilon^+)), \quad A_\varepsilon^+ := (q_\varepsilon^+, P_\varepsilon(q_\varepsilon^+)),$$

а через E_ε^- и E_ε^+ — соответственно левый верхний и правый нижний углы прямоугольника $K_\varepsilon := D_\varepsilon^+ \times D_\varepsilon^-$:

$$E_\varepsilon^- := (p_\varepsilon^+, q_\varepsilon^-), \quad E_\varepsilon^+ := (q_\varepsilon^+, p_\varepsilon^-).$$

Пусть \bar{C}_ε — поднятие на универсальную накрывающую над тором точки C_ε , непрерывно зависящее от ε (под C_ε здесь подразумевается одна из точек $A_\varepsilon^\pm, E_\varepsilon^\pm$, определенных выше). Обозначим также $\Delta(\bar{C}) := y(\bar{C}) - x(\bar{C})$ для некоторой точки \bar{C} на универсальной накрывающей над тором.

Лемма 3.2 (о монотонности). *Справедливы следующие утверждения:*

1. $\frac{d}{d\varepsilon}(x - y)(\bar{C}_\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ для всякого выбора $\bar{C}_\varepsilon = \bar{A}_\varepsilon^\pm; \bar{E}_\varepsilon^\pm$.
2. Уравнение $\Delta(\bar{E}_\varepsilon^-) = 2\pi n$ имеет корень $\varepsilon = \varepsilon_n$ для всякого n , причем $\varepsilon_n = O(1/n)$.

Замечание 3.3. Из второго утверждения леммы следует, что при $\varepsilon = \varepsilon_n$ диагональ

$$\mathcal{D} := \{y = x \pmod{2\pi\mathbb{Z}}\}$$

проходит через левый верхний угол прямоугольника K_ε .

Доказательство леммы 3.2 для случая выпуклой медленной кривой, приведенное в [5], переносится на общий случай без каких-либо изменений.

Определение 3.4. Точка x называется *нейтральной* для отображения Пуанкаре P_ε , если $P_\varepsilon^l(x) = 1$. Также нейтральной называется соответствующая точка графика γ_ε отображения Пуанкаре.

Геометрический смысл следующей леммы таков: график отображения Пуанкаре вблизи нейтральных точек имеет вид «лесенки» (см. рис. 6). Ниже мы покажем (см. лемму 5.5), что относительные логарифмические размеры ее «ступенек» не меняются при уменьшении ε .

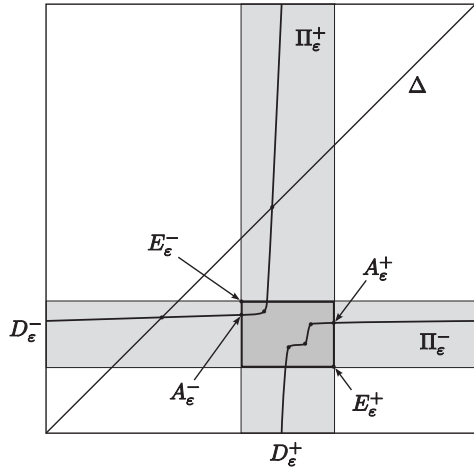


Рис. 5. График отображения Пуанкаре

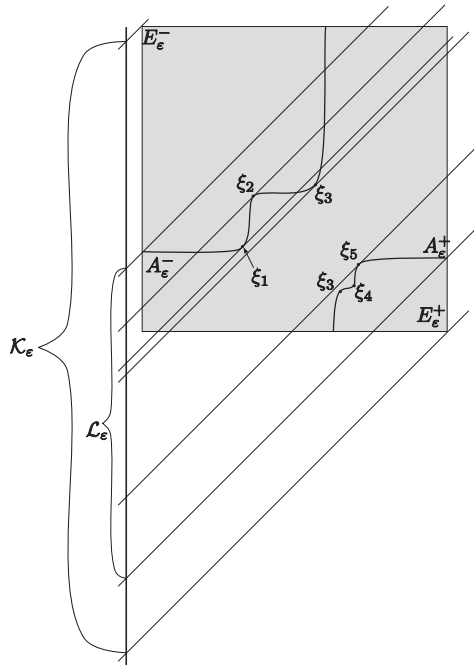


Рис. 6. Прямоугольник K_ε (закрашен) и нейтральные точки на графике отображения Пуанкаре

Лемма 3.5 (о лесенке). В условиях теоремы 2.5 для некоторого натурального K справедливы следующие утверждения:

1. Множество $U := \{x \in \Gamma \mid P'_\varepsilon(x) \in [1/2, 2]\}$ является объединением $2K$ непересекающихся дуг, на каждой из которых вторая производная P''_ε сохраняет свой знак, а при переходе между соседними дугами меняет знак.
2. Число $2K$ не превосходит общего числа $2N$ точек складок медленной кривой.
3. На каждой из описанных дуг находится ровно одна нейтральная точка. Занумеруем их циклически и обозначим последовательно как ξ_i , $i = 1, \dots, 2K$. Для упрощения обозначений положим также $\xi_{i+2K} \equiv \xi_i$.
4. $U \subset D_\varepsilon^+$ и все точки ξ_i лежат внутри прямоугольника K_ε .
5. Для любых двух точек ξ_i, ξ_j , $\xi_i \neq \xi_j$, выражение $\Delta(\xi_i) - \Delta(\xi_j)$ отлично от нуля и его знак не зависит от ε .
6. Для любой точки ξ_i справедливо: $\pm(\Delta(\bar{A}_\varepsilon^\pm) - \Delta(\xi_i)) > 0$.

Лемма 3.6 (о ступеньке). В условиях теоремы 2.7 число $2K$ в предыдущей лемме принимает максимальное значение: 4.

Леммы 3.5 и 3.6 будут доказаны в параграфе 5.

3.4. Области на прямой ε . В этом пункте мы выведем теоремы 2.7 и 2.5 из лемм, сформулированных в предыдущем пункте.

Доказательство теоремы 2.5. Определим отрезки R_n следующим образом:

$$R_n := \{\varepsilon \in (\mathbb{R}_+, 0) \mid \Delta(\bar{E}_\varepsilon^+) \leq 2\pi n \leq \Delta(\bar{E}_\varepsilon^-)\} = [\alpha_n, \beta_n]. \quad (3.1)$$

Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что для определенных таким образом R_n выполняются утверждения 1, 2 и 3 теоремы 2.5. Доказательство этого факта переносится из [5] без изменений.

Рассмотрим функцию $\varphi_\varepsilon(x) = P_\varepsilon(x) - x$ и некоторое ее поднятие на универсальную накрывающую $\bar{\varphi}_\varepsilon(x)$, непрерывно зависящее от ε . Рассмотрим отрезки $\mathcal{K}_\varepsilon := \Delta(\bar{K}_\varepsilon) = [\Delta(\bar{E}_\varepsilon^-), \Delta(\bar{E}_\varepsilon^+)]$ и $\mathcal{L}_\varepsilon := [\Delta(\bar{A}_\varepsilon^-), \Delta(\bar{A}_\varepsilon^+)]$ (см. рис. 6). Очевидно, $\mathcal{L}_\varepsilon \subset \mathcal{K}_\varepsilon$. Согласно утверждению 3 леммы 3.5, производная $\bar{\varphi}'_\varepsilon(x)$ обращается в нуль в нейтральных точках $x_k(\varepsilon) = x(\xi_k(\varepsilon))$, $k = 1, \dots, 2K$. Согласно утверждению 6 той же леммы, $u_k(\varepsilon) = \bar{\varphi}_\varepsilon(x_k(\varepsilon)) = \Delta(\xi_k) \in \mathcal{L}_\varepsilon$. Утверждение 5 той же леммы влечет, что порядок следования точек $u_k(\varepsilon)$ не меняется при $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Тем самым точки $u_k(\varepsilon)$ разбивают окружность на $2K$ интервалов; обозначим эти интервалы через $\mathcal{I}_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, 2K$. В силу утверждения 1 леммы 3.5, для всякого $b \in \mathcal{I}_j(\varepsilon)$ функция $\bar{\varphi}_\varepsilon(x) - b$ имеет фиксированное для данного j четное число простых нулей; обозначим его через $2l_j$. Когда b проходит через одну из точек $u_k(\varepsilon)$, число нулей увеличивается или уменьшается на два.

Предложение 3.7. Существует и единственно такое j , что $l_j = 0$.

Это предложение будет доказано ниже. Из него следует, что $l_j \leq K$ для любого j . Обозначим через k максимум из всех l_j . Тогда количество корней уравнения $\bar{\varphi}_\varepsilon(x) = 0$ (они соответствуют неподвижным точкам отображения P_ε) не превосходит $2k$, что доказывает пункт 5 теоремы 2.5. Для всякого $i \leq k$ найдется такой интервал \mathcal{I}_j , что $l_j = i$.

Из утверждения 2 леммы 3.2 о монотонности следует, что при $\varepsilon = \varepsilon_n = O(1/n)$ верхний конец отрезка \mathcal{K}_ε проходит через точку $2\pi n$. Положим

$$\tilde{C}_n^i := \{\varepsilon \in R_n \mid \mathcal{I}_j(\varepsilon) \cap \mathcal{L}_\varepsilon \ni 2\pi n, l_j = i\}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

Из соображений непрерывности, множества \tilde{C}_n^i непусты и открыты. Выберем из каждого по интервалу C_n^i . По построению, для всякого $\varepsilon \in C_n^i$ уравнение $\bar{\varphi}_\varepsilon(x) = 0$ имеет $2i$ корней, являющихся неподвижными точками для отображения P_ε . Поскольку $2\pi n \in \mathcal{L}_\varepsilon$, диагональ \mathcal{D} пересекает график γ_ε в точках, лежащих над отрезком D_ε^+ . Следовательно, все неподвижные точки отображения Пуанкаре соответствуют замкнутым уточным решениям, и утверждение 4 теоремы 2.5 доказано для определенных таким образом C_n^i и такого k . Теорема доказана полностью. ■

Вместе с предложением 2.6 (доказательство см. в пункте 5.5), это доказывает также теорему 2.1.

Доказательство теоремы 2.7. Из леммы 3.6, а также из предложения 3.7 следует, что в условиях теоремы 2.7 окружность разбивается на 4 интервала \mathcal{I}_j , и следовательно, число k в формулировке теоремы 2.5 равно 2. Действительно, при переходе к соседнему интервалу число l_j меняется на 1, и значит если $l_j = 0$, то $l_{j+2} = 0$ либо $l_{j+2} = 2$. Но первый случай невозможен в силу предложения 3.7. Это доказывает теорему 2.7. ■

Доказательство предложения 3.7. Выбирая координаты (различные в образе и прообразе), положим без ограничения общности, что $P_\varepsilon(0) = 0$, и рассмотрим фундаментальный квадрат $[0, 2\pi]^2$. График γ_ε при этом становится графиком монотонно возрастающей функции, который соединяет левый нижний угол фундаментального квадрата с правым верхним. Рассмотрим точки $A, B \in \gamma_\varepsilon$. Будем считать без ограничения общности, что $x(B) > x(A)$, и следовательно (в силу монотонности), $y(B) > y(A)$. Покажем, что $|\Delta(A) - \Delta(B)| < 2\pi$. Действительно:

$$\begin{aligned} |\Delta(A) - \Delta(B)| &= |(y - x)(A) - (y - x)(B)| = |(x(B) - x(A)) - (y(B) - y(A))| \leq \\ &\leq \max(x(B) - x(A), y(B) - y(A)) \leq \max(x(B), y(B)) < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) и соображений непрерывности следует, что $\Delta(\gamma_\varepsilon)$ является отрезком, длина которого меньше 2π . Проецируя $\Delta(\gamma_\varepsilon)$ на окружность $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, получаем некоторую дугу. Обозначая дополнение до этой дуги через \mathcal{I} , имеем: для всякого b из \mathcal{I} (и только для них!) диагональ $\Delta(x, y) = b$ не пересекает γ_ε , т. е. $\varphi_\varepsilon(x) = b$ не имеет решений. Поскольку максимум и минимум $\Delta|_{\gamma_\varepsilon}$ достигается в точках ξ_k , интервал \mathcal{I} представляется в виде $\mathcal{I} = [\Delta(\xi_i), \Delta(\xi_j)]$ для некоторых i, j . Других точек $\Delta(\xi_k)$ на интервале нет. Следовательно, \mathcal{I} совпадает с одним из интервалов \mathcal{I}_k для некоторого k . ■

§ 4. Нормализация и оценки производных

В этом параграфе формулируются необходимые теоремы о быстро-медленных системах, позволяющих оценивать производную различных отображений Пуанкаре. Данный параграф практически повторяет раздел «Нормализация» в [5].

Для дальнейшего нам потребуются две теоремы о нормальных формах быстро-медленных систем на торе, принадлежащие Гукенхеймеру и Ильяшенко.

4.1. Нелинейное вращение. Следующая теорема показывает, как устроена быстро-медленная динамика на торе вне окрестности медленной кривой.

Теорема 4.1 [3]. Рассмотрим векторное поле на цилиндре $x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$, определенное системой

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \quad f > 0, \quad g > 0. \quad (4.1)$$

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и $\varepsilon > 0$. Тогда отображение Пуанкаре $P_\varepsilon^{[a,b]}$ с $\Gamma^a = \{y = a\}$ на $\Gamma^b = \{y = b\}$ имеет вид

$$P_\varepsilon^{[a,b]}(x) = G_\varepsilon^1 \circ (G_\varepsilon^2(x) + T(\varepsilon)), \quad (4.2)$$

где $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ и $G_\varepsilon^{1,2}$ — диффеоморфизмы окружности, $G_\varepsilon^{1,2} \rightarrow G_{1,2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$, причем $G_{1,2}$ — также диффеоморфизмы окружности.

Иными словами, отображение соответствия с фиксированной вертикальной трансверсали на фиксированную вертикальную трансверсаль заменой координат в образе и прообразе приводится к повороту на угол $T(\varepsilon)$, стремящийся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Важно отметить, что соответствующие замены координат имеют ограниченные производные при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ и стремятся к гладким заменам.

Теорема 4.1 доказана в [3, Theorem 2, с. 35].

4.2. Нормализация вблизи медленной кривой. Следующая теорема показывает, что вблизи медленной кривой вне окрестности точки срыва система (2.1) гладко эквивалентна линейной системе.

Теорема 4.2 [3]. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \quad g > 0. \quad (4.3)$$

Пусть соответствующая быстрая система имеет кривую гиперболических неподвижных точек (невыврожденную медленную кривую). Тогда при малых $\varepsilon > 0$ в окрестности кривой неподвижных точек (вне фиксированных окрестностей точек срыва) система гладко орбитально эквивалентна семейству

$$\dot{x} = a(y, \varepsilon)x, \quad \dot{y} = \varepsilon. \quad (4.4)$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [3, Theorem 3, с. 38]. Из теоремы Феничеля (см. [6], а также [7] и [8]) следует, что в окрестности устойчивой (неустойчивой) части медленной кривой M^- (соответственно M^+) существует гладкое инвариантное многообразие S_ε^- (S_ε^+), которое может быть представлено как график функции $x = s^-(y, \varepsilon)$ (соответственно $x = s^+(y, \varepsilon)$). В нормализующих координатах это многообразие, называемое *истинной медленной кривой*, задается уравнением $x = 0$. Из уравнения в вариациях следует, что функция $a(y, \varepsilon)$ в теореме 4.2 имеет вид

$$a(y, \varepsilon) = f'_x(s(y, \varepsilon), y, \varepsilon). \quad (4.5)$$

Замечание 4.3. В действительности истинные медленные кривые S_ε^\pm определены неоднозначно. Однако расстояние между такими кривыми имеет порядок $O(e^{-C/\varepsilon})$ (т. е. они экспоненциально близки), и мы можем выбрать любую из них.

4.3. Отображение Пуанкаре вблизи точки срыва. Сформулируем еще одно утверждение, позволяющее очень грубо оценивать производную отображения Пуанкаре вблизи точки срыва.

Замечание 4.4. В дальнейшем буквой C (без индексов) обозначаются положительные константы, не зависящие от ε . Они могут быть различными в разных формулах.

Лемма 4.5. *Рассмотрим быстро-медленную систему*

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon, \quad (x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Тогда для достаточно малого ε для отображения Пуанкаре $P_\varepsilon^{[a,b]} : \Gamma^a \rightarrow \Gamma^b$ будет справедлива оценка

$$|\ln (P_\varepsilon^{[a,b]}(x))'| < C \frac{b-a}{\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть $x = x(y; x_0, \varepsilon)$ — фазовая кривая, проходящая через точку (x_0, a) при данном ε . Поскольку f'_x ограничена на торе (сверху и снизу), из уравнения в вариациях по начальным условиям следует, что

$$(P_\varepsilon^{[a,b]}(x_0))' = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^b f'_x(x(y; x_0, \varepsilon), y, \varepsilon) dy \right) < e^{\frac{C}{\varepsilon}(b-a)}. \tag{4.8}$$

Аналогичная оценка справедлива для обратного отображения. Логарифмируя, получаем требуемую оценку на модуль. ■

Данная лемма будет использоваться для грубой оценки производных в окрестности точки срыва. Более точный анализ поведения системы в окрестности точки срыва дается следующей теоремой.

Теорема 4.6 [5, теорема 4.3]. *В обозначениях пункта 3.3 (см. с. 208) положим $T^\pm = J^\pm \cap M$. Тогда для некоторого $\lambda > 0$ справедливо следующее:*

$$\ln \left(\frac{d}{dx} P_\varepsilon^{(-\pi, \alpha^+)}(x) \right) = \frac{\Phi(T^+ G^+) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}, \quad x \in J^+, \tag{4.9}$$

$$\ln \left(\frac{d}{dx} P_\varepsilon^{(\alpha^-, \pi)}(x) \right) = \frac{\Phi(T^- G^-) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}, \quad x \in J^-, \tag{4.10}$$

где $O(\varepsilon^\lambda)$ равномерно по x .

§ 5. Оценка второй производной отображения Пуанкаре

В этом параграфе мы докажем леммы 3.5 и 3.6.

5.1. Эвристическое описание. Рассмотрим систему вида (2.1), соответствующую рис. 1 (см. с. 203). В этом пункте мы эвристически опишем ее динамику и покажем причины возникновения двух пар уточных решений при выполнении условий балансировки.

Напомним (см. пункт 4.2), что в окрестности каждого участка медленной кривой M , состоящего из регулярных особых точек быстрого движения, для малых ε существует инвариантное многообразие, $O(\varepsilon)$ -близкое к соответствующему

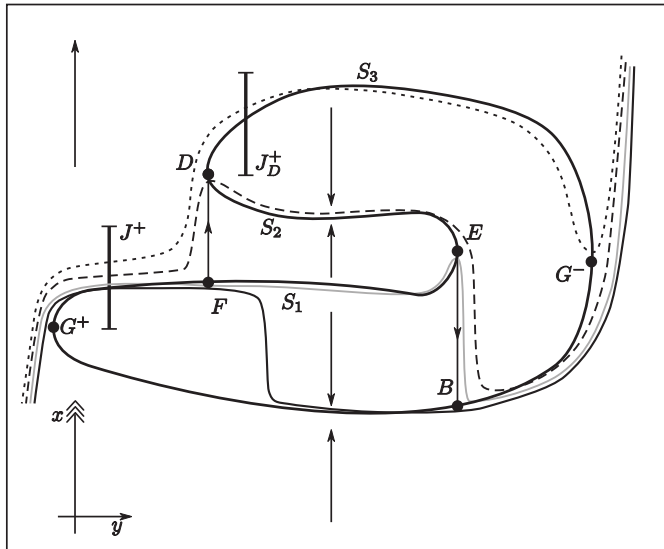


Рис. 7. Истинные медленные кривые в системе с двумя складками: масштабы существенно искажены в целях наглядности

участку M , называемое *истинной медленной кривой*. Для фиксированного участка медленной кривой истинные медленные кривые определены неоднозначно, но они экспоненциально близки друг к другу, и мы можем выбирать любую из них. Рассмотрим максимальные истинные медленные кривые, соответствующие участкам G^+E , ED и DG^- . Обозначим их через S_1 , S_2 и S_3 соответственно. Продолжим их за соответствующие точки срыва (вперед и назад во времени, см. рис. 7). Введем обозначение: $u^j := S_j \cap J^+$, $j = 1, 2, 3$. Отметим, что попарные расстояния между точками u^j экспоненциально малы.

Рассмотрим траекторию, проходящую через точку $u \in J^+$. Напомним, что динамика в окрестности участка медленной кривой описывается линейным уравнением вида (4.4). В случае неустойчивого участка это означает, что траектория проводит какое-то время вблизи истинной медленной кривой (записывающейся как $x = 0$ в нормализующих координатах), после чего покидает окрестность неустойчивого участка медленной кривой и за время $O(\varepsilon)$ вновь попадает в окрестность медленной кривой. Здесь возможны два варианта:

1. Траектория попадает в окрестность устойчивой части медленной кривой и далее движется вдоль нее. Мы будем называть это явление *уточным срывом*.
2. Траектория попадает в окрестность точки обратного срыва и претерпевает *обратный срыв*, двигаясь затем какое-то время вблизи неустойчивой части медленной кривой (см. рис. 7, такими являются траектории, проходящие вблизи u^3 и пересекающие J_D^+).

Из нормальной формы (4.4) следует, что по мере движения в окрестности неустойчивого участка медленной кривой производная решения по начальному условию u растет (накапливается «разбегание»), а по мере движения вдоль устойчивого участка — уменьшается (накапливается «сжатие»). По правилу дифференцирования

сложной функции, производные указанного вида на различных участках траектории вносят свой вклад в производную отображения Пуанкаре P_ε . Таким образом, для оценки второй производной отображения Пуанкаре необходимо изучить, какую долю времени траектория проходит вблизи устойчивых участков медленной кривой, а какую вблизи неустойчивых.

Возможны следующие случаи:

1. $u < u^1$. По мере приближения начального условия к u^1 снизу время, проводимое траекторией вблизи устойчивого участка G^+E , увеличивается за счет времени, проводимого вблизи неустойчивого участка G^-G^+ . Таким образом, производная растёт и достигает своего максимума в точке u^1 (в этом случае траектория совпадает с истинной медленной кривой S_1).
2. $u \in (u^1, u^2)$. По мере перемещения начального условия от u^1 к u^2 траектория проводит меньше времени в окрестности неустойчивого участка G^+E за счет устойчивого участка ED . Производная уменьшается и достигает своего минимума в точке u^2 .
3. $u \in (u^2, u^3)$. По мере перемещения начального условия от u^2 к u^3 траектория проводит больше времени в окрестности неустойчивого участка DG^- за счет неустойчивого участка ED . Производная увеличивается и достигает своего максимума в точке u^3 .
4. $u > u^3$. По мере удаления от u^3 траектория проводит меньше времени в окрестности неустойчивого участка DG^- за счет устойчивого участка G^-G^+ . Производная уменьшается вплоть до экспоненциально малой величины.

Нетрудно видеть, что если для траектории, проходящей через u^1 , производная P_ε больше 1, а для траектории, проходящей через u^2 , она меньше 1, то найдутся четыре точки, в которых эта производная обращается в 1. Действительно, на концах интервала J^+ эта производная экспоненциально мала, поскольку соответствующие траектории проводят почти все время вблизи устойчивых участков медленной кривой. С другой стороны, вблизи точки u^3 она экспоненциально велика, поскольку траектория проводит почти все время вблизи неустойчивых участков медленной кривой. Таким образом, на каждом из интервалов 1–4, описанных выше, найдется нейтральная точка. Это условие является необходимым и достаточным для выполнения утверждений лемм 3.5 и 3.6 в данном случае.

Как будет показано ниже (см. лемму 5.4 в следующем пункте), логарифмическая производная отображения Пуанкаре определяется суммой интегралов вида (2.4) по соответствующим дугам медленной кривой, вблизи которых проходит траектория. Таким образом, условия, сформулированные в предыдущем абзаце, переформулируются в виде условий балансировки в теореме 2.7.

5.2. Предельное поведение траекторий и оценки производных. В этом пункте мы проведем некоторые необходимые построения и сформулируем несколько вспомогательных утверждений об оценке производных отображения Пуанкаре. Они позволяют формализовать эвристическое описание, приведенное в предыдущем пункте.

Пусть $y^* \in [y(G^+), y(G^-)]$. Рассмотрим траекторию, проходящую через точку $w := (x^*, y^*) \notin M$. Пусть она задается уравнением $x = x(y; w)$. В обратном (прямом)

времени эта траектория за время порядка $O(\varepsilon)$ притягивается к какому-то неустойчивому (соответственно устойчивому) участку медленной кривой M , после чего медленно движется вдоль этого устойчивого участка влево (вправо) до окрестности точки срыва в силу нормальной формы (4.4).

Если достигнутая точка срыва не совпадает с G^+ (соответственно G^-), после обратного (прямого) срыва траектория притягивается к какому-то другому неустойчивому (устойчивому) участку медленной кривой, и далее процесс продолжается до достижения окрестности G^+ (соответственно G^-). Затем после обратного (прямого) срыва траектория уходит из окрестности медленной кривой и, совершая большое число оборотов, достигает трансверсали $\Gamma = \{y = -\pi\} = \{y = \pi\}$ в точке с координатой $x_0 = x(-\pi; w)$ (соответственно $P_\varepsilon(x_0)$). В терминах предыдущего пункта, данная траектория претерпевает уточный срыв в точке w .

Описанная динамика траектории, выпущенной из некоторой точки, мотивирует следующее определение:

Определение 5.1. Пусть точка $w = (x^*, y^*)$ не лежит на медленной кривой (рис. 8). Выпустим из w вертикальные лучи в направлении быстрого движения и в обратном направлении до пересечения с медленной кривой M . Обозначим точки пересечения через $F^- := F^-(w)$ и $F^+ := F^+(w)$ соответственно; знак $(-)$ здесь и далее соответствует прямому времени, знак $(+)$ — обратному. Рассмотрим дугу медленной кривой M от точки F^- (соответственно F^+) до точки прямого (соответственно обратного) срыва. Обозначим второй конец этой дуги через $G^\pm := G^\pm(w)$. Будем обозначать эту дугу через $[F^-, G^-]$ (соответственно $[G^+, F^+]$), ориентация является положительной относительно направления оси y . Назовем *контуром* $Z(w)$, соответствующим точке w , набор дуг M :

$$Z(w) := \underbrace{[G_1^+, F_1^+] + \dots + [G_l^+, F_l^+] }_{Z^+(w)} + \underbrace{[F_1^-, G_1^-] + \dots + [F_m^-, G_m^-] }_{Z^-(w)}, \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} F_{i+1}^\pm &= F^\pm(G_i^\pm), & G_{i+1}^\pm &= G^\pm(G_i^\pm), \\ F_1^\pm &= F^\pm(w), & G_1^\pm &= G^\pm(w), \\ G_l^+ &= G^+, & G_m^- &= G^-. \end{aligned}$$

Используя традиционную терминологию (см. [9]) можно сказать, что контур — это объединение невертикальных частей соответствующей *сингулярной траектории*. Контур $Z^-(w)$ (соответственно $Z^+(w)$) состоит из дуг M , вблизи которых траектория, выпущенная из точки w , проводит почти все время до прямого (соответственно обратного) срыва в точках G^- (соответственно G^+). Положим:

$$\Phi^\pm(w) := \Phi(Z^\pm(w)) = \int_{Z^\pm(w)} f'_x(x, y) dy, \quad (5.2)$$

$$\Phi(w) := \Phi(Z(w)) = \int_{Z(w)} f'_x(x, y) dy. \quad (5.3)$$

Определение 5.2. Значение функции $\Phi(Z(w))$ назовем *интегралом контура* $Z(w)$. Контур $Z(w)$ с нулевым интегралом ($\Phi(Z(w)) = 0$) назовем *нейтральным контуром*.

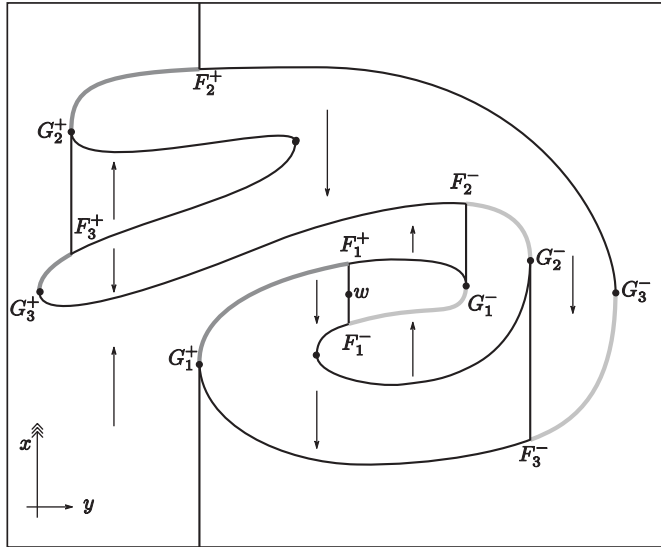


Рис. 8. Контур точки w для системы со сложной невыпуклой медленной кривой

Ниже будет показано (см. лемму 5.6), что производная отображения Пуанкаре может быть близкой к 1 тогда и только тогда, когда соответствующая траектория проходит вблизи нейтрального контура. Чтобы формализовать это утверждение, потребуется ввести дополнительное определение, которое мотивируется следующим наблюдением: значение $\Phi(w)$ не меняется, если точка w движется по вертикальному отрезку, не пересекая медленной кривой M .

Рассмотрим множество \widehat{G} точек срывов (прямых и обратных). В силу условий невырожденности (2.2), оно является конечным дискретным множеством.

Наложим на систему дополнительное условие невырожденности:

$$\{y(z) \mid z \in \mathcal{G} : \Phi(z) = 0\} \cap \{y(g) \mid g \in \widehat{G}\} = \emptyset, \tag{5.4}$$

Иными словами, уточные срывы нейтральных контуров не лежат над точками срывов.

Напомним, что $U = \{x \in \Gamma \mid P'(x) \in [1/2, 2]\}$. Напомним также, что вертикальная полоса между двумя главными точками срывов $\Pi := S^1 \times [y(G^+), y(G^-)]$ называется *базовой полосой*. Для каждой точки срыва, за исключением главных, рассмотрим также максимальный вертикальный интервал, содержащий эту точку и не пересекающий M в других точках. Рассмотрим объединение M с этими интервалами и дополнение базовой полосы до этого объединения (см. рис. 9):

$$\Sigma := M \cup \bigcup_{g \in \widehat{G}} (F^+(g), F^-(g)) \times \{y(g)\}, \tag{5.5}$$

$$\overline{\Sigma} := \Pi \setminus \Sigma, \tag{5.6}$$

где под интервалом $(F^+(g), F^-(g))$ подразумевается та из двух дуг, которая не содержит точек M , отличных от g .

Отметим, что в силу условий невырожденности (2.2) множество $\overline{\Sigma}$ имеет конечное число компонент связности. Зафиксируем также некоторое малое δ и возьмем δ -

окрестность Σ_δ множества Σ . Положим:

$$\bar{\Sigma}_\delta := \Pi \setminus \Sigma_\delta. \tag{5.7}$$

Потребуем, чтобы δ была выбрана достаточно малой, чтобы пересечение каждой компоненты связности Σ с \bar{W} было непустым и пересекало бы любую вертикальную окружность $y = \text{const}$ по отрезку (либо пустому множеству).

Отождествим в $\bar{\Sigma}$ точки (x, y) и (x', y) тогда и только тогда, когда $[x, x'] \times \{y\} \cap M = \emptyset$. Полученное множество обозначим через \mathcal{V} . Введем на нем топологию, индуцированную из \mathbb{T} , и обозначим множество компонент связности через V . Это конечное множество (в силу условий невырожденности).

Нетрудно видеть, что пара $\mathcal{G} = (\hat{G}, V)$ является плоским графом, если считать, что точки $g_1, g_2 \in \hat{G}$ соединены ребром $v \in V$ тогда и только тогда, когда существует

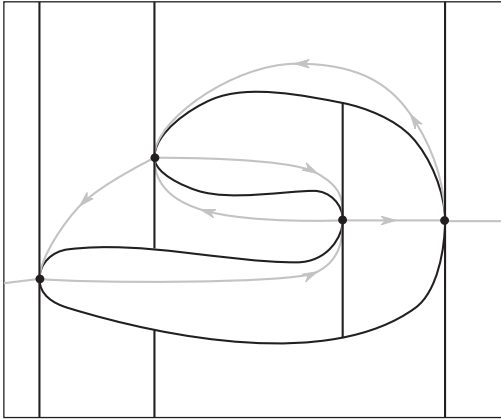


Рис. 9. Граф \mathcal{G} в простейшем невыпуклом случае

представитель v , являющийся гладкой кривой, соединяющей указанные точки. Тем самым данный граф допускает естественные вложения в \mathbb{T} . Зафиксируем такое вложение (см. рис. 9), потребовав от него, чтобы любое непустое пересечение любой компоненты связности $\bar{\Sigma}_{\delta/2}$ с вертикальным отрезком содержало точку из соответствующей дуги графа. Нетрудно видеть, что граф \mathcal{G} , вложенный таким образом в \mathbb{T} , является естественной областью определения функции $\Phi(w)$.

попадает в $\Sigma_{\delta/2}$ и не покидает ее вплоть до выхода из полосы Π .

Лемма 5.3. Для любой точки $w \in \bar{\Sigma}_\delta$ справедливо следующее: траектория, выпущенная из этой точки, в прямом (обратном) времени за ограниченное сверху время

Рассмотрим траекторию, проходящую через точку $x \in \Gamma$. Пусть траектория пересекает $\bar{\Sigma}_\delta$. В этом случае она также пересекает некоторое ребро $v \in V$ в некоторой точке $z \in \bar{\Sigma}_{\delta/2}$. По лемме 5.3, а также по свойствам вложения ребер V , эта точка единственна для достаточно малых ε . Обозначим ее через $z(x)$. Функция $z(x)$ может быть не определена, если траектория не покидает Σ_δ иначе, чем через границы полосы Π .

Лемма 5.4. Для некоторого $\lambda > 0$ справедливы следующие представления для производных отображений Пуанкаре в точках, соответствующих траектории, проходящей через $w = (x^*, y^*) \in \bar{\Sigma}_\delta$:

$$\log \frac{d}{dx} P_\varepsilon^{[y^*, \pi]} \Big|_{x=x^*} = \frac{\Phi^-(w) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}, \tag{5.8}$$

$$\log \frac{d}{dx} P_\varepsilon^{[\pi, y^*]} \Big|_{x=x^*} = -\frac{\Phi^+(w) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}, \tag{5.9}$$

$$\log \frac{d}{dx} P_\varepsilon(x_0) = \frac{\Phi(w) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}, \tag{5.10}$$

где $O(\varepsilon^\lambda)$ оценивается равномерно по w .

Лемма 5.5. *Рассмотрим точки $w_1, w_2 \in \bar{\Sigma}_\delta$, и пусть траектории, проходящие через них, в обратном времени пересекают трансверсаль Γ в точках x_1, x_2 соответственно. Положим:*

$$I^\pm = I^\pm(w_1, w_2) := \Phi(Z^\pm(w_1) \cap Z^\pm(w_2)). \quad (5.11)$$

Тогда справедливо:

$$|x_1 - x_2| = O^*\left(\exp\left(\frac{-I^+ + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}\right)\right), \quad (5.12)$$

$$|P_\varepsilon(x_1) - P_\varepsilon(x_2)| = O^*\left(\exp\left(\frac{I^- + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}\right)\right), \quad (5.13)$$

т. е. соответствующие расстояния асимптотически ограничены указанными экспоненциально малыми выражениями сверху и снизу. Соответствующие оценки равномерны по w_1, w_2 .

Лемма 5.6. *Для всякого $x \in U$ определено $z(x)$ и найдется такая точка $z_n := z_n(x)$ на некотором ребре графа \mathcal{G} , что $\Phi(z_n) = 0$ и*

$$|z(x) - z_n(x)| = O(\varepsilon^\lambda). \quad (5.14)$$

Лемма 5.7. *Для всякого $x \in U$ выполняется равенство:*

$$\text{sign}(P_\varepsilon''(x)) = -\text{sign}(f(z(x), 0)). \quad (5.15)$$

Иными словами, знак второй производной отображения Пуанкаре в нейтральных точках определяется направлением уточного срыва.

Все сформулированные леммы будут доказаны ниже (см. параграф 7).

5.3. Нейтральные точки. В этом пункте мы выведем утверждения 1, 3–6 леммы 3.5 из лемм, сформулированных в предыдущем пункте.

Нетрудно видеть, что контур $Z(z)$ непрерывно меняется при движении точки z по некоторому ребру v графа \mathcal{G} . Из этого вытекает, что функция $\Phi(z)$ непрерывна на ребрах графа. Более того, $\Phi(z)$ монотонна относительно $y(z)$. Таким образом, на каждом ребре v существует не более одного нуля $\Phi(z)$, или, иными словами, не более одного нейтрального контура, пересекающего v . Вместе с леммой 5.7, доказывающей, что каждый нейтральный контур соответствует в точности одной нейтральной точке, это дает утверждения 1 и 3 леммы 3.5. Утверждение 4 следует из утверждений 2 и 3 леммы о графике, поскольку вне K_ε производная отображения Пуанкаре экспоненциально мала или велика.

Для доказательства утверждения 5 рассмотрим нейтральные точки $\xi_1 = (x_1, P_\varepsilon(x_1))$, $\xi_2 = (x_2, P_\varepsilon(x_2))$ на графике отображения Пуанкаре и положим (см. лемму 5.6):

$$\begin{aligned} z^1 &:= z(x_1), & z^2 &:= z(x_2), \\ z_n^1 &:= z_n(x_1), & z_n^2 &:= z_n(x_2) \end{aligned}$$

Будем без ограничения общности считать, что $x_2 > x_1$. В силу леммы 5.5,

$$\begin{aligned} \Delta(\xi_1) - \Delta(\xi_2) &= P_\varepsilon(x_1) - x_1 - (P_\varepsilon(x_2) - x_2) = x_2 - x_1 - (P_\varepsilon(x_2) - P_\varepsilon(x_1)) = \\ &= O^*\left(\exp\left(\frac{-I^+(z^1, z^2) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}\right)\right) - O^*\left(\exp\left(\frac{I^-(z^1, z^2) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= O^* \left(\exp \left(\frac{-I^+(z_n^1, z_n^2) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right) \right) - O^* \left(\exp \left(\frac{I^-(z_n^1, z_n^2) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right) \right), \quad (5.16)$$

где последнее равенство выполняется в силу (5.14).

Отсюда следует, что знак $\Delta(\xi_1) - \Delta(\xi_2)$ определяется знаком $I^-(z_n^1, z_n^2) + I^+(z_n^1, z_n^2)$. Тем самым утверждение 5 выполняется, если наложить на систему конечное число дополнительных условий невырожденности:

$$I^-(z_n^i, z_n^j) + I^+(z_n^i, z_n^j) \neq 0, \quad i \neq j, \quad (5.17)$$

для всех пар нейтральных точек $z_i \neq z_j$.

Утверждение 6 доказывается аналогично. Рассмотрим интервал $J^+ =: [p, q)$, пересекающий неустойчивую часть медленной кривой M вблизи точки срыва G^+ . Рассмотрим траекторию, проходящую через его нижнюю точку p . Отметим, что контур $Z^+(p)$ состоит из одной дуги неустойчивой части медленной кривой, которая может быть сделана сколь угодно малой выбором J^+ . Рассмотрим также произвольную нейтральную точку ξ и положим $z_n = z_n(\xi)$. Аналогично (5.16), имеем:

$$\begin{aligned} & \Delta(A_\varepsilon^-) - \Delta(\xi) = \\ & = O^* \left(\exp \left(\frac{-I^+(p, z_n) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right) \right) - O^* \left(\exp \left(\frac{I^-(p, z_n) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

причем второе слагаемое доминирует, поскольку показатель экспоненты в первом слагаемом может быть сделан сколь угодно малым.

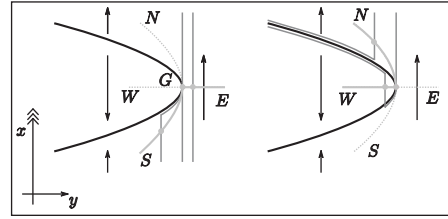
Аналогично доказывается утверждение для второго конца q отрезка J^+ . Утверждение 6 доказано. Это завершает доказательство всех утверждений леммы 3.5, кроме утверждения 2. Последнее будет доказано в следующем пункте.

5.4. Оценка сверху на число нейтральных контуров. Для оценки числа нейтральных контуров, т. е. нулей функции $\Phi(z)$, необходимо исследовать вопрос о глобальной непрерывности этой функции на всей области ее определения. Как было замечено в предыдущем пункте, $\Phi(z)$ непрерывна на ребрах графа \mathcal{G} . Интерес представляет продолжение этой функции до непрерывной на всей области определения.

Вернемся к простейшему примеру, разобранным в пункте 5.1. Нетрудно видеть, что когда начальная точка x совершает оборот по вертикальной окружности, точка уточного срыва $z(x)$ соответствующей траектории совершает обход графа \mathcal{G} , проходя по каждому ребру один раз, но заходя в каждую из точек срыва (за исключением главных) по два раза. Функция $\Phi(z)$ меняется непрерывно при этом обходе, но может принимать, вообще говоря, разные предельные значения в одной и той же точке срыва. Таким образом, чтобы иметь возможность работать с $\Phi(z)$ как с непрерывной функцией, необходимо «расклеить» граф \mathcal{G} в окружность в соответствии с указанным обходом. Эта окружность является естественной областью определения функции $\Phi(z)$, на которой функция непрерывна. Это наблюдение мотивирует следующее построение.

Нетрудно видеть, что все точки срыва, кроме главных, принадлежат одному из четырех классов, в зависимости от типа срыва (прямой/обратный) и направления движения после срыва (вверх/вниз), см. рис. 11. Рассмотрим точку срыва G , изображенную на рис. 10 (это одна из четырех возможных конфигураций, другие

Рис. 10. Контуры, близкие к сквозному (слева) и опорному (справа) предельным контурам точки срыва G



рассматриваются аналогично, см. ниже), и часть графа \mathcal{G} , расположенную в окрестности этой точки. Обозначим ребра графа, входящие в G , через N, W, S, E , как показано на рисунке.

При приближении точки z к срыву G по ребру E предельное положение соответствующего контура $Z(z)$ не содержит дуг медленной кривой из окрестности G . К этому же предельному положению контур $Z(z)$ стремится при приближении z к G вдоль ребра S . Такой предельный контур назовем *сквозным* контуром точки G , а пару ребер $E-S$ — сквозной парой (на рисунке слева).

Напротив, когда z стремится к G вдоль ребра N , предельное положение контура $Z(z)$ содержит всю неустойчивую дугу, входящую в G . К этому же положению $Z(z)$ стремится при движении z вдоль ребра W . Такой предельный контур назовем *опорным* контуром для точки G , а пару ребер $N-W$ — опорной парой (на рисунке справа).

Нетрудно показать, что для других типов точек срыва ситуация аналогична: ребра графа \mathcal{G} , входящие в точку срыва, разбиваются на две пары с одинаковым предельным положением соответствующего контура. На рис. 11 показаны пары ребер для всех четырех конфигураций: если оба ребра в паре лежат по одну сторону от вертикальной прямой, проходящей через точку срыва, пара является опорной, иначе — сквозной. При естественном обходе графа, описанном в начале пункта, точка z входит в вершину по одному из парных ребер и выходит по другому.

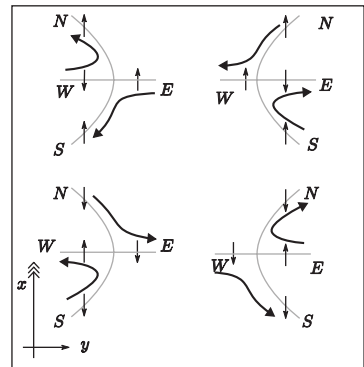


Рис. 11. Сквозные и опорные пары ребер для различных типов точек срыва

Произведем следующую модификацию графа \mathcal{G} . Заменим каждую вершину G , отличную от главных точек срыва, на пару вершин G_t и G_p . Будем считать, что вершина G_t соединена со сквозной парой ребер, входящих в G (будем называть ее сквозной вершиной), а вершина G_p — с опорной парой ребер (опорная вершина). Получающийся при этом граф обозначим через $\tilde{\mathcal{G}}$.

Продолжая функцию $\Phi(z)$ в точки G_t и G_p по непрерывности, получаем функцию, непрерывную на всем графе $\tilde{\mathcal{G}}$. Можно показать (хотя мы не будем этого делать, поскольку этот факт не требуется для доказательства), что получившийся граф $\tilde{\mathcal{G}}$ связан и, следовательно, является топологической окружностью.

Нетрудно видеть, что функция $\Phi(z)$, монотонная на ребрах $\tilde{\mathcal{G}}$, монотонна также и в сквозных вершинах $\tilde{\mathcal{G}}$ (поскольку $\Phi(z)$ монотонно возрастает при возрастании $y(z)$) и имеет локальные экстремумы в опорных точках, а также в главных точках

срыва. Поскольку общее число опорных точек и главных точек срыва равно общему числу точек срыва исходной системы, а между любыми двумя опорными точками функция $\Phi(z)$ монотонна, число нулей $\Phi(z)$ ограничено числом точек срыва, что доказывает утверждение 2 леммы 3.5, а вместе с ним — теорему 2.5.

Отметим, что условия балансировки в формулировке теоремы 2.7 переформулируются следующим образом:

1. Интеграл опорного контура, соответствующего точке срыва E (см. рис. 1), положителен.
2. Интеграл опорного контура, соответствующего точке срыва D , отрицателен.

Поскольку интеграл опорного контура, соответствующего G^+ , всегда отрицателен (этот контур содержит лишь устойчивые участки медленной кривой), а интеграл опорного контура, соответствующего G^- , всегда положителен, функция Φ в этом случае имеет 4 точки экстремума с чередующимися знаками, а значит она имеет ровно 4 нуля. Это доказывает лемму 3.6, а вместе с ней и теорему 2.7.

5.5. Бассейны притяжения. В этом пункте мы обсудим и докажем предложение 2.6.

Из леммы 3.1 следует, что неподвижные точки отображения Пуанкаре, соответствующие уточным циклам, лежат на экспоненциально узком интервале. «Бассейнами притяжения» притягивающих точек (на трансверсали Γ) являются интервалы между двумя отталкивающими точками, соседними с данной притягивающей. Таким образом, для всех притягивающих точек, за исключением одной, меры ее бассейнов притяжения экспоненциально малы (аналогичное утверждение можно сделать для отталкивающих точек и их бассейнов отталкивания).

Иначе обстоит дело на всем торе: мера бассейнов притяжения (отталкивания) соответствующих уточных циклов на всем торе отделена от нуля. Действительно, для каждого ε нейтральные траектории делят фазовое пространство на непересекающиеся области. Между двумя последовательными нейтральными срывами может находиться не более чем один уточный цикл. При этом сами нейтральные срывы проходят вблизи различных нейтральных контуров, и мера областей между ними отделена от нуля. Из этого следует, что любой притягивающий уточный цикл имеет хотя бы один «соседний» отталкивающий цикл, такой что мера области между ними (входящая в бассейн притяжения) отделена от нуля.

Это рассуждение доказывает предложение 2.6.

§ 6. Максимальное число уточных циклов

В этом параграфе доказывается теорема 2.2 о существовании открытого множества систем, обладающих максимальным числом уточных решений.

Напомним, что каждому нейтральному контуру соответствует нейтральная точка на графике отображения Пуанкаре, при прохождении которой через диагональ \mathcal{D} происходит рождение или уничтожение пары циклов-уток (см. пункт 3.4). Тем самым общее число уточных решений не превосходит общего числа нейтральных точек, и при этом оно является максимальным в том случае, если сначала происходит

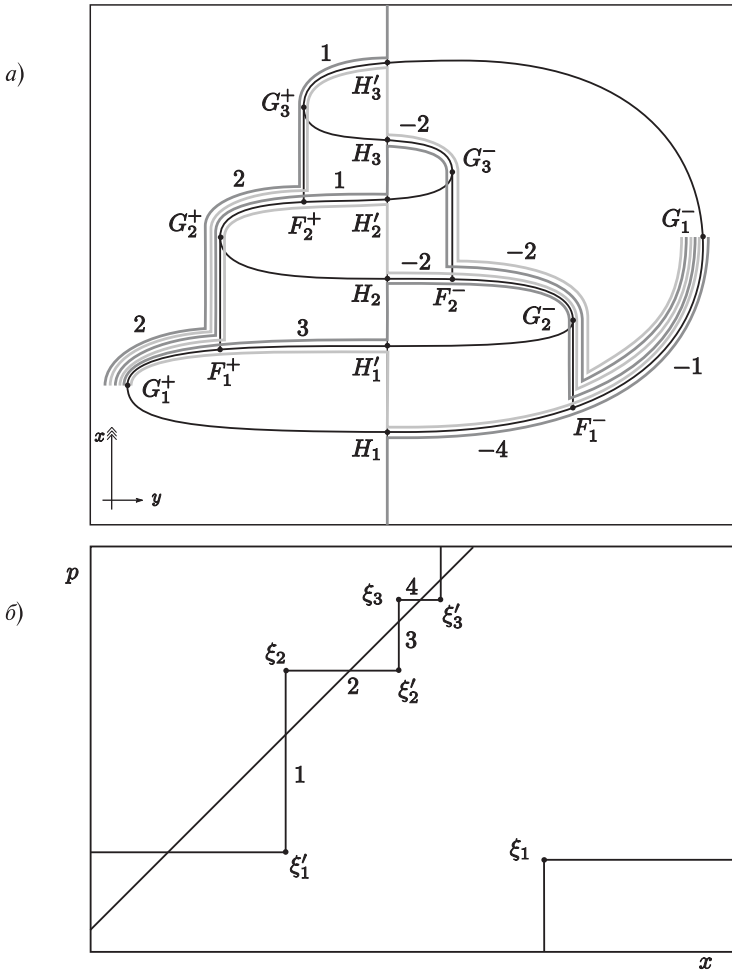


Рис. 12. Система с максимальным числом уточных решений при $N = 3$ (а) и примерный график отображения Пуанкаре (б) (увеличен фрагмент)

последовательно N рождений (через \mathcal{D} проходят нейтральные точки, в которых график является выпуклым вверх), а затем N уничтожений (в соответствующих точках график является выпуклым вниз). Иными словами, это означает, что необходимыми и достаточными условиями существования максимального числа уточных циклов являются:

1. Число $2K$ нейтральных контуров максимально и равно числу $2N$ складок медленной кривой.
2. Рассматривая окружность S^1_Δ , на которую тор $\mathbb{T}^2 \supset \gamma_\varepsilon$ проецируется отображением Δ , имеем: S^1_Δ разбивается в объединение двух непересекающихся дуг, на одной из которых лежат образы всех «рождающих» нейтральных точек, а на другой — образы всех «уничтожающих» нейтральных точек. Это условие эквивалентно тому, что при движении по окружности происходит N рождений, а затем N уничтожений пар уточных предельных циклов.

Первое условие эквивалентно наличию $2N$ нулей функции $\Phi(z)$ на графе \mathcal{G} , которое в свою очередь эквивалентно тому, что знаки $\Phi(z)$ чередуются в опорных вершинах графа $\tilde{\mathcal{G}}$ (см. пункт 5.4). Иными словами, это условие задается системой строгих неравенств. Второе условие, в силу утверждения 5 леммы 3.5 и его доказательства (см. с. 220), также эквивалентно системе строгих неравенств на интегралы Φ по некоторым дугам M .

Отсюда следует, что множество систем, обладающих максимальным числом уточных решений, является открытым (как решение системы строгих неравенств). Остается доказать, что оно непусто. Для этого для каждого N достаточно построить конкретный пример системы, обладающей искомым свойством. Остаток этого параграфа посвящен такому построению.

Нетрудно видеть, что для выполнения условия 2 достаточно, чтобы все нейтральные точки (кроме одной) лежали на одной экспоненциально узкой дуге и «высота» и «ширина» «ступенек» на графике отображения Пуанкаре последовательно уменьшалась: ширина ступеньки меньше ее высоты, а высота следующей меньше ширины предыдущей, причем отрезки между двумя последовательными нейтральными точками стремятся к вертикальным/горизонтальным (см. рис. 12 б). В этом случае диагональ с наклоном 1, проходящая через самую «высокую» ступеньку (на рисунке это точка ξ'_3), пройдет над всеми «рождающими» нейтральными точками и под всеми «уничтожающими», поскольку расположение каждой следующей нейтральной точки (над или под диагональю) будет определяться суммой знакопередающегося ряда, в котором каждый следующий член по модулю больше предыдущего. Сумма членов такого ряда также чередуется.

Мы построим систему, график отображения Пуанкаре которой обладает таким свойством.

Рассмотрим систему, обладающую $2N$ складками. Обозначим их в порядке обхода медленной кривой M «по часовой стрелке» через G_1^- (главная точка срыва), G_1^+ (главная точка обратного срыва), $G_2^-, G_2^+, \dots, G_N^-, G_N^+$. (Эти обозначения в данной ситуации удобнее, чем обозначения пункта 5.2, поэтому мы перейдем к ним.)

Потребуем, чтобы складки располагались таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения (см. рис. 12 а):

$$y(G_1^+) < y(G_2^+) < \dots < y(G_N^+) < y(G_N^-) < \dots < y(G_2^-) < y(G_1^-), \quad (6.1)$$

где все неравенства накладываются на координаты точек на фундаментальном квадрате, целиком содержащем M .

Проведем некоторую вертикальную окружность Γ' , лежащую между G_N^+ и G_N^- . Обозначим точки пересечения Γ' с медленной кривой M следующим образом (перечисление снизу вверх): $H_1, H'_1, \dots, H_N, H'_N$. Обозначим контур любой точки, расположенной на интервале (H_i, H'_i) , через Z_i^+ и контур любой точки на интервале (H'_i, H_{i+1}) , через Z_{i+1}^- (см. рис. 12 а). Мы потребуем, чтобы все эти контуры были нейтральными. Обозначим соответствующие нейтральные точки графика отображения Пуанкаре через ξ_i и ξ'_i . Во избежание путаницы, вторая координата точек $\xi \in \gamma_\varepsilon$ обозначается через p (таким образом, $\xi \equiv (x(\xi), p(\xi))$).

Для каждой точки срыва $G_i^\pm, i = 2, \dots, N$, рассмотрим соответствующую точку падения, и обозначим ее через F_{i-1}^\pm .

Из леммы 5.5 следует, что «высота ступеньки» ξ_{i+1} есть экспоненциально малая величина, причем показатель экспоненты пропорционален интегралу $\Phi((Z'_i)^- \cap Z_{i+1}^-)$ (напомним, что верхний индекс «+» (соответственно «-») у контура Z означает левую (правую) половину контура относительно точки уточного срыва w , см. определение 5.1 и (5.1)):

$$h_i := p(\xi_{i+1}) - p(\xi_i) = O^* \left(\exp \left(\frac{-\tilde{h}_i + o(1)}{\varepsilon} \right) \right), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (6.2)$$

где $\tilde{h}_i := -\Phi((Z'_i)^- \cap Z_{i+1}^-) > 0$. Аналогично для «ширины» ступенек:

$$w_i := x(\xi'_i) - x(\xi_i) = O^* \left(\exp \left(\frac{-\tilde{w}_i + o(1)}{\varepsilon} \right) \right), \quad i = 2, \dots, N, \quad (6.3)$$

где $\tilde{w}_i := \Phi((Z'_i)^+ \cap Z_i^+) > 0$. Для выполнения искомым соотношений достаточно потребовать:

$$h_1 > w_2 > h_2 > \dots > h_{N-1} > w_N \quad (6.4)$$

или, что эквивалентно для достаточно малого ε :

$$\tilde{h}_1 < \tilde{w}_2 < \tilde{h}_2 < \dots < \tilde{h}_{N-1} < \tilde{w}_N. \quad (6.5)$$

Покажем, что мы можем добиться выполнения этого соотношения, подходящим образом выбирая значения интегралов Φ по дугам M . Для этого положим:

$$\begin{aligned} \Phi(F_1^- G_1^-) &= -1; \\ \Phi(G_i^+ F_i^+) &= 2, \quad i = 1, \dots, N - 1; \\ \Phi(F_i^- G_i^-) &= -2, \quad i = 2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (Z'_i)^- \cap Z_{i+1}^- &= \bigcup_{j=1}^i (F_j^- G_j^-), \quad i = 1, \dots, N - 1, \\ (Z'_i)^+ \cap Z_i^+ &= \bigcup_{j=1}^{i-1} (G_j^+ F_j^+), \quad i = 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (6.7)$$

откуда

$$\tilde{h}_i = 2i - 1, \quad \tilde{w}_i = 2i - 2, \quad (6.8)$$

что мгновенно влечет справедливость (6.5).

Остается показать, что контуры Z_i и Z'_i можно сделать нейтральными. Положим дополнительно:

$$\begin{aligned} \Phi(H_N G_N^-) &= -2; \\ \Phi(G_N^+ H_N^+) &= 1; \\ \Phi(H_i F_i^-) &= -(2N - 2i), \quad i = 1, \dots, N - 1; \\ \Phi(F_i^+ H_i^+) &= 2N - 2i - 1, \quad i = 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Рассмотрим контур Z'_i , $i = 1, \dots, N - 1$:

$$Z'_i = \bigcup_{j=1}^i (G_j^+ F_j^+) \cup (F_i^+ H_i^+) \cup (H_i F_i^-) \cup \bigcup_{j=1}^i (F_j^- G_j^-). \quad (6.10)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Phi(Z'_i) &= \tilde{w}_{i+1} + \Phi(F_i^+ H'_i) + \Phi(H_i F_i^-) - \tilde{h}_i = \\ &= 2i + 2N - 2i - 1 - (2N - 2i) - (2i - 1) = 0.\end{aligned}\quad (6.11)$$

Аналогично можно показать, что $\Phi(Z_i) = 0$ для $i = 1, \dots, N - 1$. Также аналогичная прямая проверка показывает, что $\Phi(Z_N) = 0$ и $\Phi(Z'_N) = 0$.

Наклон отрезков $[\xi'_i, \xi_{i+1}]$ стремится к бесконечности, поскольку расстояние $x(\xi_{i+1}) - x(\xi'_i)$ экспоненциально мало по сравнению с $p(\xi_{i+1}) - p(\xi'_i)$ (что легко показать применением леммы 5.5 к соответствующим полуконтурам). Аналогично можно показать, что наклон отрезков $[\xi_i, \xi'_i]$ стремится к нулю.

Теорема доказана.

§ 7. Нелинейные эффекты

В этом параграфе мы докажем технические леммы, сформулированные в пункте 5.2.

7.1. Сингулярные траектории. *Доказательство леммы 5.3.* Достаточно доказать только утверждение леммы, соответствующее прямому времени. Доказательство для обратного времени проводится теми же аргументами, примененными к системе с обращенным временем.

Рассмотрим контур $Z^-(w)$ и дополним его вертикальными отрезками, соединяющими w с $F^-(w)$ и, далее, точки срывов g с соответствующими точками падения $F^-(g)$. Получим непрерывную кривую, начало которой совпадает с точкой w , а конец — с главной точкой срыва G^- , целиком лежащую внутри области Σ_δ для любого $\delta > 0$. Данная кривая называется сингулярной траекторией системы, обозначим ее через $\hat{Z}^-(w)$. Хорошо известно (см. [9, с. 54]), что при выполнении условий невырожденности, перечисленных в параграфе 2, истинная траектория быстро-медленной системы, проходящая через точку w , равномерно стремится к соответствующей сингулярной траектории при $\varepsilon \rightarrow 0$ (это можно показать, явно построив сколь угодно малую захватывающую окрестность сингулярной траектории). Таким образом, двигаясь вблизи сингулярной траектории, для достаточно малых ε траектория не может покинуть окрестность $\Sigma_{\delta/2}$ вплоть до выхода из полосы Π . ■

7.2. Экспоненциальное сжатие. Для дальнейшего нам потребуется сформулировать две классические теоремы, описывающие поведение истинной медленной поверхности вблизи точки срыва.

Теорема 7.1 [9, с. 119]. *Пусть система вида (2.1) имеет невырожденную точку срыва в начале координат. Существует такое малое $r > 0$, что для всякого $\mu \in (0, 1/3)$ для истинной медленной кривой $x = s(y, \varepsilon)$ над отрезком $[-r, -\varepsilon^\mu]$ выполняется равенство*

$$s(y, \varepsilon) = s(y) + O(\varepsilon^{2/3-\mu/2}). \quad (7.1)$$

Для вывода этой теоремы из формулы (16.10) указанной работы достаточно произвести тривиальную замену координат.

Теорема 7.2 (там же, см. также [4]). *В условиях предыдущей теоремы продолжение истинной медленной кривой $s(y, \varepsilon)$ за точку срыва пересекает горизонтальное сечение $x = -\text{const}$ в точке с координатой $y = O(\varepsilon^{2/3})$.*

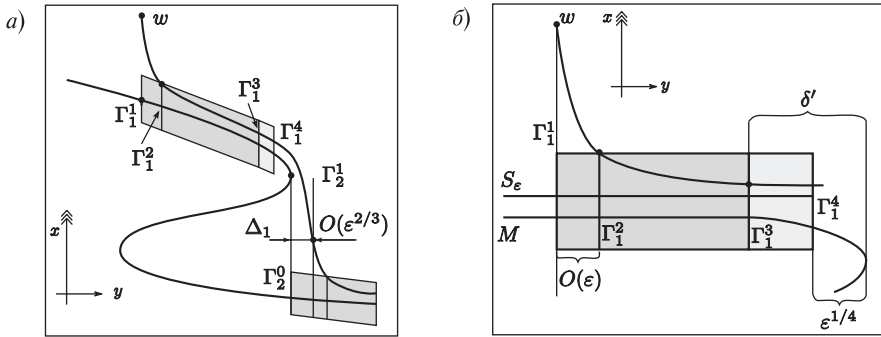


Рис. 13. Участок траектории (а); увеличенный фрагмент области U_1 в нормализованных координатах (б)

Лемма 7.3. *Рассмотрим некоторый вертикальный отрезок*

$$J = \{(x, y) \mid x \in I, y = y^*\},$$

пересекающий устойчивый участок медленной кривой M и не пересекающий δ -окрестность никакой неустойчивой точки M (в частности, J отделен от точек срыва). Очевидно, что контур $Z^- = Z^-(w)$ не зависит от выбора точки $w \in J$ при фиксированном J . Тогда для некоторого $\lambda > 0$ справедливо следующее представление для производной отображения Пуанкаре:

$$\ln \frac{d}{dx} P_\epsilon^{[y^*, \pi]} \Big|_{x=x^*} = \frac{\Phi^-(Z^-) + O_\delta(\epsilon^\lambda)}{\epsilon}, \quad x^* \in I, \quad (7.2)$$

где остаточный член $O_\delta(\epsilon^\lambda)$ оценивается через $C_\delta \epsilon^\lambda$, причем C_δ зависит только от δ , но не зависит от выбора интервала J и точки x^* .

Доказательство. Зафиксируем w и рассмотрим траекторию $y = y(x; w, \epsilon)$, проходящую через w . Зафиксируем некоторое достаточно малое $\delta' > 0$.

Далее для каждой дуги медленной кривой $[F_j, G_j]$, входящей в контур Z^- , мы определим несколько вертикальных окружностей, которые будут задаваться своей y -координатой: $\Gamma_j^i = \{y = y_j^i\}$ (см. рис. 13; часть из этих окружностей будут зависеть от ϵ):

$$y_j^0 := y(F_j), \quad (7.3)$$

$$y_j^3 := y(G_j) - \delta', \quad (7.4)$$

$$y_j^4 := y(G_j) - \epsilon^{1/4}. \quad (7.5)$$

Обозначим $A_j^i := [F_j, G_j] \cap \Gamma_j^i$. В силу теоремы 4.2, вблизи дуги $[F_j, A_j^3]$ действует нормальная форма (4.4). Определим следующую область U_j :

$$U_j := \{(x, y) \mid y \in [y_j^0, y_j^3], |\tilde{x}| < b\}, \quad (7.6)$$

где \tilde{x} — нормализующая координата в соответствующей области.

Пусть траектория попадает в окрестность U_j в точке B_j (т. е. $|\tilde{x}(B_j)| = b$; если $j = 1$ и точка w уже лежит в области U_1 , будем считать $B_1 = w$). Положим $y_j^2 := y(B_j)$.

Для каждого срыва G_j , входящего в контур $Z^-(w)$, но не являющегося главным срывом G^- , зафиксируем некоторый горизонтальный отрезок Δ_j , пересекающий интервал срыва $(G_j F_{j+1})$ (из двух вертикальных дуг с концами в данных точках берется та из них, которая не пересекает M в своих внутренних точках), отстоящий от точек медленной кривой M на расстояние не меньше δ . Пусть траектория пересекает Δ_j в точке E_j (будем считать, что $E_0 := w$). Положим $y_j^1 := y(E_j)$.

Разобьем отображение Пуанкаре $P_\varepsilon^{[y^*, \pi]}$ в композицию:

$$P_\varepsilon^{[y^*, \pi]} : \Gamma_1 \xrightarrow{P^1} \Gamma_2 \xrightarrow{P^2} \dots \xrightarrow{P^{m-1}} \Gamma_m \xrightarrow{P^m} \Gamma, \quad (7.7)$$

где $P_j = P_\varepsilon^{[y_j^1, y_{j+1}^1]}$, причем $y_{m+1}^1 := \pi$. Покажем, что для всякого $j = 1, \dots, m$ и для некоторого $\lambda > 0$ справедливо представление

$$\ln \frac{d}{dx} P_j |_{x=y_j^1; w, \varepsilon} = \frac{\Phi([F_j, G_j]) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon}. \quad (7.8)$$

При взятии производной в (7.8) разложение (7.7) считается фиксированным. Для доказательства (7.8) представим в свою очередь каждое из отображений P_j в виде композиции:

$$P_j : \Gamma_j \xrightarrow{P_j^1} \Gamma_j^2 \xrightarrow{P_j^2} \Gamma_j^3 \xrightarrow{P_j^3} \Gamma_j^4 \xrightarrow{P_j^4} \Gamma_j^5 \xrightarrow{P_j^5} \Gamma_{j+1}^1, \quad (7.9)$$

$$P_m : \Gamma_m \xrightarrow{P_m^1} \Gamma_m^2 \xrightarrow{P_m^2} \Gamma_m^3 \xrightarrow{\tilde{P}_m^3} \Gamma, \quad (7.10)$$

где $j = 1, \dots, m-1$.

Далее мы оценим логарифмическую производную каждого из отображений $P_j^i = P_\varepsilon^{[y_j^i, y_{j+1}^{i+1}]}$.

Поскольку точка E_j лежит вне окрестности неустойчивой части медленной кривой, траектория системы попадает из E_j в фиксированную окрестность U_{j+1} устойчивого участка медленной кривой за ограниченное сверху время. Из этого следует, что

$$y_j^2 - y_j^1 = O(\varepsilon), \quad (7.11)$$

и лемма 4.5 дает:

$$\left| \ln \frac{d}{dx} P_j^1 \right| < C \quad (7.12)$$

для некоторой универсальной константы C , не зависящей от w .

В силу нормальной формы (4.4) отображение P_j^2 является линейным в подходящей системе координат, и его производная считается явным интегрированием нормальной формы. Имеем:

$$\ln \frac{d}{dx} P_j^2 = \frac{\Phi([A_j^2, A_j^3])}{\varepsilon}. \quad (7.13)$$

Из теоремы 7.2 следует, что $y_j^1 - y_j^0 = O(\varepsilon^{2/3})$. Вместе с (7.11) имеем также: $y_j^2 - y_j^0 = O(\varepsilon^{2/3})$. В силу гладкости интеграла по пределам интегрирования, из этого вытекает представление $\Phi([A_j^2, A_j^3]) = \Phi([F_j, A_j^3]) + O(\varepsilon^{2/3})$, где оценка остаточного члена не зависит от выбора точки w .

Заметим, что отображение P_j^2 является экспоненциальным сжатием, которое может быть сделано сколь угодно сильным по сравнению с возможным растяжением на интервале $\Gamma_j^3 \rightarrow \Gamma_j^4$ выбором достаточно малого δ' (это следует, в частности, из оценки леммы 4.5). Это означает, что траектория пересекает Γ_j^3 в точке, экспоненциально близкой к точке пересечения истинной медленной кривой с Γ_j^3 , после чего следует экспоненциально близко к истинной медленной кривой на протяжении всего интервала $\Gamma_j^3 \rightarrow \Gamma_j^4$. Из уравнения в вариациях, в обозначениях теоремы 7.1, имеем:

$$\begin{aligned} \ln \frac{d}{dx}(P_j^4) &= \int_{y_j^3}^{y_j^4} f'_x(x(y), y, \varepsilon) dy = \int_{y_j^3}^{y_j^4} f'_x(s(y), y, \varepsilon) dx + O(\varepsilon) = \\ &= \int_{y_j^3}^{y_j^4} f'_x(s(y), y, 0) + O(\varepsilon^{2/3-\mu/2}) = \int_{y_j^3}^{y_{j+1}^0} f'_x(s(y), y, 0) + O(\varepsilon^{1/4}) = \\ &= \Phi(A_j^3, G_j) + O(\varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \tag{7.14}$$

В силу соотношения $y_{j+1}^0 - y_j^4 = O(\varepsilon^{1/4})$, производная отображения P_j^5 допускает оценку с помощью леммы 4.5:

$$\left| \ln \frac{d}{dx} P_j^5 \right| = \frac{O(\varepsilon^{1/4})}{\varepsilon}. \tag{7.15}$$

Производная отображения \tilde{P}_m^3 оценивается с помощью теоремы 4.6:

$$\ln \frac{d}{dx} \tilde{P}_m^3 = \frac{\Phi(A_m^3 G^+) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \tag{7.16}$$

для некоторого $\lambda > 0$.

Используя правило дифференцирования сложной функции и складывая представление, полученные для логарифмических производных функций P_j^i , а также функции \tilde{P}_m^3 , получаем искомое представление (7.8). Оценка остаточного члена равномерна по точке w . Лемма доказана. ■

Доказательно леммы 5.4. Равенство (5.8) прямо следует из леммы 7.3. Равенство (5.9) доказывается аналогично, применением указанной леммы к системе с обращенным временем, а (5.10) следует из двух предыдущих и правила дифференцирования сложной функции. ■

Доказательство леммы 5.5. Достаточно доказать соотношение (5.13). Рассмотрим крайнюю левую точку F_{j_0} пересечения контуров $Z^-(w_1) \cap Z^-(w_2)$. В силу условия невырожденности (2.3), один из контуров $Z^-(w_1)$, $Z^-(w_2)$ содержит дугу, на которой лежит точка F_{j_0} вместе с некоторой окрестностью медленной кривой M . Без ограничения общности будем считать, что это дуга $[F_{k,2}^1, G_{k,2}^1] \subset Z^-(w_2)$.

Рассмотрим интервал $J_{j_0}^2$, лежащий на окружности $\Gamma_{j_0}^2$ для контура $Z^-(w_1)$ (см. доказательство леммы 7.3 в предыдущем пункте) и пересекающий устойчивую часть медленной кривой. Траектория $x = x_1(y, \varepsilon)$, проходящая через точку w_1 , пересекает этот интервал в точке с фиксированной координатой $b \neq 0$ в нормализующей карте. Траектория $x = x_2(y, \varepsilon)$, проходящая через точку w_2 , проходит

вблизи дуги $[F_{k,2}^1, G_{k,2}^1]$, и к моменту пересечения с $J_{j_0}^2$ успевает экспоненциально притянуться к истинной медленной кривой: $x_2(y_{j_0}^2, \varepsilon) = O(e^{-C/\varepsilon})$. Вводя обозначение $I_\varepsilon := [x_1(y_{j_0}^2, \varepsilon), x_2(y_{j_0}^2, \varepsilon)] \subset J_{j_0}^2$, имеем оценку:

$$|I_\varepsilon| = b + O(e^{-C/\varepsilon}). \quad (7.17)$$

Применяя лемму 7.3 к отображению $P_\varepsilon^{\{y_{j_0}^2, \pi\}}$ на интервале $J_{j_0}^2$, имеем равномерную оценку на производную, и из теоремы Лагранжа о линейных приращениях получаем искомую оценку на длину образа $P_\varepsilon^{\{y_{j_0}^2, \pi\}}(I_\varepsilon)$. ■

7.3. Нейтральные траектории и нейтральные контуры. *Доказательство леммы 5.6.* Напомним, что в условиях леммы $x \in U$, т. е. $P'_\varepsilon(x) \in [1/2, 2]$. Предположим, что значение $z(x)$ не определено, т. е. соответствующая траектория не покидает область Σ_δ иначе, чем через границы полосы Π . В этом случае траектория проходит вблизи некоторых дуг устойчивой и неустойчивой части медленной кривой, причем переключение между дугами происходит в результате прямых и обратных срывов либо уточного срыва, проходящего вблизи точек складок медленной кривой. Нетрудно видеть, что траектория может лишь один раз перейти с неустойчивой части медленной кривой на устойчивую и далее будет двигаться вблизи устойчивой. При этом траектория проходит близко к предельному контуру Z_0 (опорному, если уточных срывов не происходит, и сквозному, если они происходят).

Представим Σ_δ в виде объединения:

$$\Sigma_\delta = M_\delta \cup V_\delta, \quad (7.18)$$

где через M_δ обозначена δ -окрестность медленной кривой M , а через V_δ — объединение δ -окрестностей вертикальных отрезков, проходящих через точки срыва (см. (5.5)). При движении в области $M_\delta \setminus V_\delta$ траектория проходит на расстоянии не более чем δ от дуг, входящих в контур Z_0 . Ее динамика при этом задается нормальной формой (4.4). Время движения в V_δ ограничено величиной $2N\delta/\varepsilon$, где $2N$ — общее число точек складок.

В силу уравнений в вариациях, а также теоремы 4.6, производная отображения Пуанкаре в точке x имеет следующее представление:

$$\ln P'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma(x)} f'_x(u(y), y, \varepsilon) dy + o(1/\varepsilon), \quad (7.19)$$

где $\gamma(x)$ — пересечение отрезка траектории $x = u(y)$, проходящей через точку x , с полосой Π . В силу приведенных соображений, а также леммы 4.5, при интегрировании можно заменить кривую $\gamma(x)$ на контур Z_0 :

$$\ln P'_\varepsilon(x) = \frac{\Phi(Z_0) + O(2N\delta) + o(1)}{\varepsilon}. \quad (7.20)$$

Выбирая достаточно малое δ , мы можем добиться того, что первое слагаемое в числителе будет доминировать и производная P'_ε будет экспоненциально мала или велика, вопреки предположению $P'_\varepsilon(x) \in [1/2, 2]$. Противоречие доказывает, что функция $z = z(x)$ определена во всех точках U .

Соотношение (5.14) в этом случае является прямым следствием леммы 5.4 и условия $\frac{d}{dy}\Phi(z) \neq 0$, где $y = y(z)$, следующего из условия невырожденности $f'_x(x, y, 0) \neq 0$, справедливого для любой точки $(x, y) \in M$, отличной от точек складок (см. (2.1)). ■

7.4. Оценка второй производной. Доказательство леммы 5.7. Рассмотрим траекторию с начальным условием $x \in U$. Положим $z = z(x)$ и $z_n = z_n(x)$ (см. лемму 5.6) и рассмотрим контур $Z = Z(z_n(x))$. Рассмотрим точки срыва $G_d^\pm := G^\pm(z)$. Пусть вертикальный отрезок I^+ (соответственно I^-) отстоит от точки срыва G_d^+ (соответственно G_d^-) на расстояние δ , пересекает неустойчивую (соответственно устойчивую) часть медленной кривой, и не пересекает устойчивую (соответственно неустойчивую) часть медленной кривой (см. рис. 14). Положим $y^\pm = y(I^\pm)$. Представим отображение Пуанкаре в окрестности точки x в виде композиции:

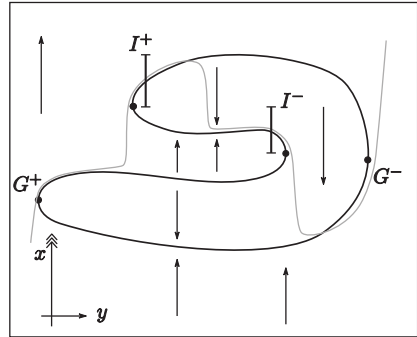


Рис. 14. Нейтральный срыв

$$P_\varepsilon : \Gamma \xrightarrow{R} I^+ \xrightarrow{\tilde{P}} I^- \xrightarrow{Q} \Gamma. \quad (7.21)$$

Из правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$\ln \frac{d}{dx} P_\varepsilon(x) = \ln Q' \circ \tilde{P} \circ R(x) + \ln \tilde{P}' \circ R(x) + \ln R'(x), \quad (7.22)$$

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{d}{dx} P_\varepsilon(x) = \frac{d}{dx} \ln Q' \circ \tilde{P} \circ R(x) + \frac{d}{dx} \ln \tilde{P}' \circ R(x) + \frac{d}{dx} \ln R'(x). \quad (7.23)$$

В силу монотонности логарифма, для доказательства леммы достаточно определить знак (7.23). Мы покажем, что второй член в этом разложении доминирует, и найдем его знак.

Оценим третий член выражения (7.23). Из уравнения в вариациях следует, что

$$\ln R'(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\pi}^{y^+} f'_x(\varphi(y, \varepsilon; x), y, \varepsilon) dy, \quad (7.24)$$

где $x = \varphi(y, \varepsilon; x)$ задает траекторию с начальным условием $x \in \Gamma$. Дифференцируя, имеем:

$$\frac{d}{dx} \ln R'(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\pi}^{y^-} f''_{xx}(\varphi(y, \varepsilon; x), y, \varepsilon) X(y; x) dy, \quad (7.25)$$

где $X(y; x) = \frac{d}{dx} \varphi(y, \varepsilon; x) = P_\varepsilon^{[-\pi, y]}(x)$.

Пусть $Z^+ = Z^+(z_n)$ и \hat{G}^+ — множество точек (обратных) срывов, входящих в контур Z^+ (т. е. множество точек обратных срывов, вблизи которых проходит

рассматриваемая траектория). Определим множество W_δ следующим образом:

$$W_\delta = \bigcup_{G \in \widehat{G}^+} U_\delta(y(G)), \quad (7.26)$$

где $U_\delta(y(G)) = [y(G) - \delta, y(G) + \delta]$.

Нетрудно видеть, что при $y \notin W_\delta$ для точки $w(y) = (\varphi(y, \varepsilon; x), y)$ выполняются условия леммы 7.3 и справедливо представление, следующее из (7.2) (для системы с обращенным временем):

$$X(y; x) = \exp \left(\frac{\Phi(Z^+(w(y))) + O_\delta(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right). \quad (7.27)$$

Оценим $X(y; x)$ для $y \in W_\delta$. Пусть $y \in U_\delta(y^*)$, где $y^* = y(G)$ для некоторого $G \in \widehat{G}^+$. Из правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$X(y; x) = \frac{d}{dx} P_\varepsilon^{[-\pi, y^* - \delta]} \cdot \frac{d}{dx} P_\varepsilon^{[y^* - \delta, y]}. \quad (7.28)$$

Первый сомножитель оценивается через (7.27). Второй сомножитель грубо оценивается с помощью уравнения в вариациях (см. лемму 4.5):

$$\frac{d}{dx} P_\varepsilon^{[y^* - \delta, y]} = O(e^{O(\delta)/\varepsilon}). \quad (7.29)$$

Таким образом, для $y \in W_\delta$ справедлива оценка

$$X(y; x) = \exp \left(\frac{\Phi(Z^+(w(y^* - \delta))) + O_\delta(\varepsilon^\lambda) + O(\delta)}{\varepsilon} \right), \quad (7.30)$$

причем можно считать, что $O_\delta(\varepsilon^\lambda) + O(\delta) = O(\delta)$.

Поскольку $\Phi(Z^+(w(y)))$ монотонно возрастает по y , правые части (7.27) и (7.30) не превосходят величины

$$X(y^+; x) = \exp \left(\frac{\Phi(Z^+(w(y^+))) + O(\delta)}{\varepsilon} \right). \quad (7.31)$$

Подставляя полученную оценку в интеграл (7.25) и учитывая, что $|f'_{xx}| < C$ в силу гладкости f и компактности фазового пространства, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} \ln R'(x) \right| &< \frac{C}{\varepsilon} \exp \left(\frac{\Phi(Z^+(w(y^+))) + O(\delta)}{\varepsilon} \right) = \\ &= \exp \left(\frac{\Phi(Z^+(w(y^+))) + O(\delta)}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Аналогичными рассуждениями, учитывая, что $\Phi(Z^-(w(y)))$ убывает по y , нетрудно получить оценку

$$\frac{d}{dx} \ln Q'(x) = \exp \left(\frac{O(\delta)}{\varepsilon} \right). \quad (7.33)$$

Обозначим через \widetilde{Z} часть контура Z , лежащую левее I^- :

$$\widetilde{Z} := Z \cap \{y \in [-\pi, y^-]\}. \quad (7.34)$$

Представляя первое слагаемое в (7.23) в виде

$$\frac{d}{dx} \ln Q' \circ \widetilde{P} \circ R(x) = \frac{d}{dx} (\ln Q'(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\widetilde{P} \circ R(x)) \quad (7.35)$$

и оценивая производную $\tilde{P} \circ R(x) = P_\varepsilon^{[-\pi, y^-]}$ с помощью леммы 7.3, имеем:

$$\left| \frac{d}{dx} \ln Q' \circ \tilde{P} \circ R(x) \right| < \exp \left(\frac{\Phi(\tilde{Z}) + O(\delta)}{\varepsilon} \right). \quad (7.36)$$

Оценим второе слагаемое в (7.23) снизу. Теорема о производной сложной функции и соотношение (7.27), примененное в точке $y = y^+$, дают представление:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \tilde{P}' \circ R(x) &= \frac{d}{dx} \ln \tilde{P}'(x) \cdot R'(x) = \\ &= \frac{d}{dx} \ln \tilde{P}'(x) \cdot \exp \left(\frac{\Phi(Z^+(w(y^+))) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Оценим $\frac{d}{dx} \ln \tilde{P}'(x)$. Вблизи участков медленной кривой (устойчивого и неустойчивого) между интервалами I^\pm действует нормальная форма (4.4). Обозначим нормализованную координату вблизи неустойчивой части медленной кривой через ξ , а вблизи устойчивой — через η . Пусть отображение $\tilde{P} : I^+ \rightarrow I^-$ задается в нормализующих координатах как $\xi \mapsto \eta = \eta(\xi)$.

Уточный срыв в точке z может происходить в одном из двух направлений — вверх или вниз — в зависимости от знака $f(z, 0)$. Рассмотрим случай, когда уточный срыв происходит в направлении «вниз» (т. е. $f(z, 0) < 0$; противоположный случай рассматривается аналогично). В этом случае $\xi < 0$ (т. е. траектория проходит *ниже* соответствующей истинной медленной поверхности и срывается вниз).

Рассмотрим окрестности устойчивой и неустойчивой части медленной кривой, которые задаются соотношением $|\xi| < b$ и $|\eta| < b$ для некоторого фиксированного $b > 0$. Пусть траектория покидает окрестность неустойчивой части медленной кривой в точке $(\xi = -b, y = y_0^+)$ и попадает в окрестность устойчивой части медленной кривой в точке $(\eta = b, y = y_0^-)$. Очевидно, $y_0^- = y_0^+ + O(\varepsilon)$. Из леммы 5.6 также следует, что $y_0^+ = y(z_n) + O(\varepsilon^\lambda)$. Пусть L^+ — дуга неустойчивого участка медленной кривой, лежащая между I^+ и y_0^+ , и L^- — дуга устойчивого участка медленной кривой, лежащая между y_0^- и I^- . Пусть также \tilde{L}^+ — дуга неустойчивого участка медленной кривой, лежащая между I^+ и $y(z_n)$ и \tilde{L}^- — дуга устойчивого участка медленной кривой, лежащая между $y(z_n)$ и I^- .

Как показано в [3] (для общего случая см. формулу (4.41) в [5]),

$$\frac{d}{d\xi} \ln \eta'(\xi) > -\frac{1}{\xi}, \quad (7.38)$$

причем из нормальной формы (4.4) следует, что

$$-\xi = b \exp \left(\frac{-\Phi(L^+)}{\varepsilon} \right) = b \exp \left(\frac{-\Phi(\tilde{L}^+) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right). \quad (7.39)$$

Таким образом, имеем оценку:

$$\frac{d}{d\xi} \eta'(\xi) > C \exp \left(\frac{\Phi(\tilde{L}^+) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right), \quad (7.40)$$

где $C = 1/b > 0$. Отображение перехода к нормализующим координатам имеет равномерно ограниченные по ε производные и поэтому может лишь изменить константу C .

Нетрудно видеть, что контур $Z^+(w(y^+))$ дополняется дугой \tilde{L}^+ до контура $Z^+(w_n)$. Тем самым, подставляя (7.40) в (7.37), имеем:

$$\frac{d}{dx} \ln \tilde{P}' \circ R(x) > C \exp \left(\frac{\Phi(Z^+(w_n)) + O(\varepsilon^\lambda)}{\varepsilon} \right). \quad (7.41)$$

Очевидно, $\Phi(Z^+(w_n)) > \Phi(Z^+(w(y^+)))$ (поскольку в контур в правой части добавилась дуга \tilde{L}^+ неустойчивой части медленной кривой) и $\Phi(Z^+(w_n)) > \Phi(\tilde{Z})$ (поскольку в контур в правой части добавилась дуга \tilde{L}^- устойчивой части медленной кривой). Следовательно, можно выбрать настолько малое δ , чтобы показатель экспоненты в (7.41) был больше, чем в (7.32) и (7.36). Это доказывает, что знак второй производной отображения Пуанкаре P_ε в рассмотренном случае (траектории срываются вниз) положителен. Теми же рассуждениями можно показать, что при $f(z_n, 0) > 0$ знак отрицателен. Это доказывает лемму. ■

Благодарности

Автор выражает свою искреннюю признательность Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи, постоянную поддержку и интерес к работе и В. Клепцыну за многочисленные плодотворные дискуссии и ценные комментарии по тексту.

Литература

1. Diener M. The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate // The Mathematical Intelligencer. 1984. № 6. P. 38–48.
2. Dumortier F., Roussarie R. Canard cycles and center manifolds // Mem. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 121. № 577.
3. Guckenheimer J., Ilyashenko Yu. S. The Duck and the Devil: Canards on the Staircase // Moscow Math. J. 2001. Vol. 1. № 1. P. 27–47.
4. Krupa M., Szmoljan P. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points — fold and canard points in two dimensions // SIAM J. Math. Anal. 2001. Vol. 33. № 2. P. 286–314.
5. Schurov I. Ducks on the Torus: Existence and Uniqueness // Journal of Dynamical and Control Systems. 2010. Vol. 16. № 2. P. 267–300. Preprint: arXiv:0910.1888v1 (math.DS) (<http://arxiv.org/abs/0910.1888>).
6. Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations // J. of Diff. Eq. 1979. № 31. P. 53–98.
7. Anosova O. On Invariant Manifolds in Singulalry Perturbed Systems // J. Dyn. Control. Sys. 1999. Vol. 5. № 4. P. 501–507.
8. Anosova O. Invariant Manifolds in Singularly Perturbed Systems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. Vol. 236. P. 19–24.
9. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

Щуров И. В.:

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет,

кафедра дифференциальных уравнений

E-mail: ilya@schurov.com