

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель

А.В. Борисов, А.О. Казаков, С.П. Кузнецов

На основе результатов численного моделирования обсуждаются и иллюстрируются динамические феномены, характерные для кельтского камня — твёрдого тела с выпуклой поверхностью, совершающего движение на шероховатой горизонтальной плоскости. Эти феномены обусловлены отсутствием свойства сохранения фазового объёма в неголономной механической системе. В такой системе вследствие локально имеющего место сжатия фазового объёма могут реализоваться типы поведения, подобные характерным для диссипативных систем; например, возможно наличие точек устойчивого равновесия, ассоциирующихся со стационарным вращением, предельных циклов, отвечающих вращению с колебаниями, странных хаотических аттракторов. Приводится карта динамических режимов на плоскости параметров полная механическая энергия — угол относительного поворота геометрических и динамических главных осей твёрдого тела. Продемонстрирован переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода по Фейгенбауму. Рассмотрено несколько странных аттракторов, для которых представлены фазовые портреты, показатели Ляпунова, спектры Фурье.

PACS numbers: 05.45. – a, 45.10. – b, 45.40. – f

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201405b.0493

Содержание

1. Введение (493).
 2. Модель кельтского камня (494).
 3. Феномены регулярной динамики: реверс, периодические движения (495).
 4. Феномены сложной динамики (496).
 5. Заключение (499).
- Список литературы (499).

1. Введение

Феномены сложной динамики, такие как хаос и бифуркации, активно исследуются в системах разной природы, в том числе механических [1–4].

А.В. Борисов. Удмуртский государственный университет, ул. Университетская 1, 426034 Ижевск, Российская Федерация; Московский физико-технический институт, Институтский пер. 9, 141700 г. Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: borisov@rtd.ru

А.О. Казаков. Институт компьютерных исследований, Удмуртский государственный университет, ул. Университетская 1, 426034 Ижевск, Российская Федерация; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, факультет вычислительной математики и кибернетики, просп. Гагарина 23, 603950 Н. Новгород, Российская Федерация E-mail: kazakovdz@yandex.ru

С.П. Кузнецов. Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал, ул. Зелёная 38, 410019 Саратов, Российская Федерация E-mail: spkuz@yandex.ru

Статья поступила 29 августа 2013 г.,
после доработки 1 октября 2013 г.

Определение динамической системы подразумевает, что состояние, заданное координатами в фазовом пространстве, может быть получено для любого момента времени из начального состояния в соответствии с некоторым отвечающим этой системе правилом. Будучи идеалом детерминистского описания, такое определение не исключает возможности хаотического поведения, при котором эволюция состояния во времени выглядит как случайный процесс. Основной атрибут хаоса — чувствительность движения к малым возмущениям начальных условий, делающая невозможным предсказание состояний на временах, превышающих некоторый временной масштаб, зависящий обычно логарифмически от неточности начальных условий.

Если рассмотреть ансамбль из большого числа одинаковых не взаимодействующих систем, различающихся начальными условиями, то в фазовом пространстве это будет соответствовать облаку изображающих точек, эволюционирующему во времени с изменением размера и формы в соответствии с движением точек согласно динамическим уравнениям системы.

Традиционно различают *консервативные* и *диссипативные* динамические системы.

В физике термин "консервативные системы" означает системы, обеспечивающие сохранение энергии, что, в частности, относится к системам классической механики, для описания которых применяется формализм Гамильтона [5, 6]. Для гамильтоновых систем имеет место теорема Лиувилля о сохранении меры, т.е. объёма каждого элемента облака изображающих точек, в процессе динамической эволюции.

При наличии трения приходим к диссипативным системам, в которых механическая энергия не сохра-

няется, но постепенно рассеивается, переходя в тепло, т.е. в энергию микроскопического движения молекул собственно системы и её окружения. В диссипативных системах фазовый объём со временем уменьшается, по крайней мере в среднем, и в итоге облако изображающих точек оседает на некоторое подмножество фазового пространства, называемое *аттрактором*¹. Для систем, в которых обеспечивается компенсация потерь энергии внешними источниками (открытые системы), в качестве аттракторов наряду с состояниями равновесия (неподвижными точками) могут встречаться также предельные циклы, отвечающие автоколебаниям, и странные аттракторы, соответствующие хаотической динамике.

В системах с инвариантной мерой, т.е. при выполнении теоремы Лиувилля (когда аттракторов не бывает), облако изображающих точек можно представить себе как состоящее из несжимаемой жидкости, а в диссипативном случае — как сжимаемую субстанцию, наподобие пара, который может конденсироваться с существенным уменьшением своего объёма при оседании на аттрактор.

В механике, помимо систем, описываемых в рамках гамильтонова формализма, выделяют особый класс систем с неголономными связями или, кратко говоря, *неголономных систем* (термин введён Генрихом Герцем в XIX в.) [7, 8]. Неголономные системы рассматриваются во многих задачах, имеющих большое практическое значение, например, в механике передвижных и летательных аппаратов, робототехнике. История изучения этих систем богата драматическими моментами, в том числе ошибками, которые совершались видными исследователями и лишь затем исправлялись в ходе более аккуратного анализа. Иерархия типов поведения неголономных систем [9, 10] включает в себя разнообразные типы от простых (интегрируемых) до сложных (неинтегрируемых), что связано с числом присущих задаче инвариантов и симметрий.

Обратимся к задаче о движении кельтского камня — твёрдого тела с выпуклой гладкой поверхностью на шероховатой плоскости, постулируя, что в точке контакта тела с плоскостью скорость в каждый момент равна нулю. Хотя трение при этом присутствует, оно не способно совершать работу, а значит, изменять механическую энергию. Пусть, далее, главные центральные моменты инерции тела не равны друг другу и геометрические оси симметрии не совпадают с осями инерции. Это так называемая задача о кельтском камне, для которого давно был замечен интригующий феномен реверса [11–13]: после запуска кельтского камня волчком его вращение замедляется с возникновением колебаний (покачивания) камня, а потом он начинает вращаться в противоположную сторону.

С математической точки зрения, фундаментальное свойство кельтского камня и аналогичных неголономных систем заключается в том, что инвариантная мера, понимаемая в смысле теоремы Лиувилля, у них отсутствует [14]. В этом состоит принципиальное отличие объектов неголономной механики от гамильтоновых

систем. Хотя система является консервативной в смысле сохранения механической энергии и обладает инвариантностью к обращению времени, элементы фазового объёма в ходе динамической эволюции не остаются постоянными, локально претерпевая сжатие в одних областях фазового пространства и растяжение в других.

Механическому движению кельтского камня соответствует перемещение в фазовом пространстве изображающей точки на гиперповерхности постоянной энергии, причём энергию следует рассматривать как один из параметров, от которых зависит характер движения. Благодаря сжатию фазового объёма могут возникать типы поведения, подобные аттракторам в диссипативных системах, например точки устойчивого равновесия, соответствующие стационарному вращению, предельные циклы, отвечающие вращению с колебаниями, странные аттракторы [8, 15–17]. Для каждого такого объекта в фазовом пространстве обязательно присутствует симметричный партнёр, который станет притягивающим множеством при отслеживании динамики в обратном времени. Кроме того, возможны и такие динамические режимы, в том числе хаотические, которые обладают симметрией к обращению времени; о них говорят как о "смешанной динамике" [18].

Таким образом, в данном случае мы имеем дело с весьма специфическим классом систем, занимающих промежуточное положение между консервативными и диссипативными системами в обычной трактовке. Цель настоящей статьи — привлечь внимание исследователей к проблеме динамики систем такого рода и проиллюстрировать феномены сложной динамики, характерные для кельтского камня, результатами численного моделирования с привлечением методов, разработанных и применявшихся ранее для изучения диссипативных систем.

Непривычные, иногда контринтуитивные феномены динамики кельтских камней могут оказаться интересными в концептуальном плане также для физических задач, выходящих за рамки собственно механики твёрдого тела, например для задач статистической механики сред, составленных из частиц, не имеющих зеркальной симметрии геометрических и динамических характеристик. В связи этим можно отметить работу [19], посвящённую динамическим свойствам гранулированной среды, состоящей из таких частиц.

2. Модель кельтского камня

Обратимся к часто применяемой модели кельтского камня в форме эллиптического параболоида (рис. 1). Налагая условие нулевой скорости точки контакта

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (1)$$

можно получить для кинетического момента \mathbf{M} относительно точки контакта и орта $\boldsymbol{\gamma}$ в системе координат, связанной с телом, уравнения [8, 16, 17, 20]

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg_0 \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

При этом вектор $\boldsymbol{\omega}$ связан с вектором \mathbf{M} соотношением $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, где \mathbf{I} — тензор инерции, а векторы $\boldsymbol{\gamma}$ и \mathbf{r} связаны соотношением

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\nabla F(\mathbf{r})}{|\nabla F(\mathbf{r})|}, \quad (3)$$

¹ Возможно сосуществование нескольких аттракторов в фазовом пространстве; в таком случае каждый из них характеризуется своим бассейном притяжения — областью начальных состояний, откуда испущенные траектории приходят на данный аттрактор. Тогда говорят, что система характеризуется мультистабильностью.

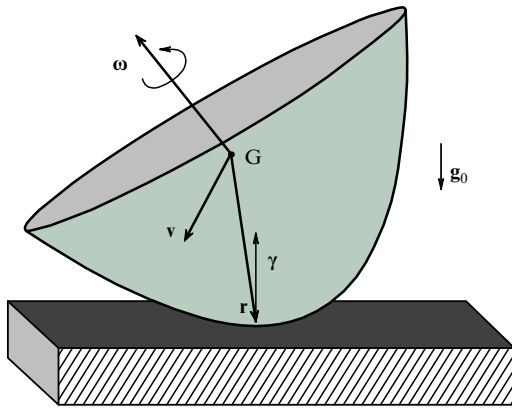


Рис. 1. Модель кельтского камня: G — центр масс, γ — орт нормали к поверхности, r — вектор, соединяющий центр масс и точку контакта, v — вектор скорости центра масс, ω — вектор угловой скорости.

где $F(\mathbf{r}) = 0$ — уравнение поверхности тела. Для эллиптического параболоида

$$F(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{a_1} + \frac{r_2^2}{a_2} \right) - (r_3 + h) = 0, \quad (4)$$

$$r_1 = -\frac{a_1 \gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 = -\frac{a_2 \gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 = -h + \frac{1}{2} \frac{a_1 \gamma_1^2 + a_2 \gamma_2^2}{\gamma_3^2}.$$

Здесь a_1, a_2 — главные радиусы кривизны в вершине параболоида, h — высота расположенного на оси параболоида центра масс.

Примем, что третья главная ось инерции совпадает с главной геометрической осью e_3 , а две другие главные оси инерции повернуты относительно геометрических осей на угол δ . Тогда тензор инерции в геометрических осях имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Постоянные величины I_1, I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции твёрдого тела.

Соотношения (2) представляют собой замкнутую систему уравнений шестого порядка относительно векторов γ и \mathbf{M} , а для определения координат центра масс (X, Y) требуется совместно с (2) решать вытекающие из (1) дополнительные уравнения

$$\dot{X} = \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2, \quad \dot{Y} = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1. \quad (6)$$

В ходе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2) на каждом шаге разностной схемы при вычислении правых частей решается система из трёх линейных алгебраических уравнений относительно составляющих вектора угловой скорости и вычисляются дополнительные величины (4).

Система (2) характеризуется наличием геометрического интеграла $\gamma^2 = 1$ и интеграла энергии $(1/2)\mathbf{M}\omega - mg_0 r \gamma = E$. В шестимерном фазовом пространстве на многообразии, заданном условием постоянства двух интегралов движения, уравнения (2) определяют четырёхмерный поток.

Мы можем выполнить сечение фазового пространства некоторой гиперповерхностью S и ввести в рассмот-

рение отображение Пуанкаре. А именно, для любой точки на выбранной гиперповерхности результатом отображения Пуанкаре будет точка следующего пересечения испущенной из неё фазовой траектории с гиперповерхностью. В обсуждаемых ниже вычислениях гиперповерхность определялась условием $s = \gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1 = 0$ (с учётом прохождения траекторий только в направлении уменьшения s). Для кельтского камня построенное таким образом трёхмерное отображение Пуанкаре не относится к классу отображений, сохраняющих фазовый объём, что определяет возможность существования устойчивых неподвижных точек, предельных циклов, странных аттракторов.

В теории динамических систем для описания поведения системы вблизи некоторой опорной фазовой траектории вводят показатели Ляпунова [1–4, 21, 22], характеризующие экспоненциальное в среднем удаление (положительный показатель) от опорной траектории или приближение (отрицательный показатель) к опорной траектории. Общее количество показателей равняется размерности фазового пространства, так что для системы (2) число показателей равно шести, причём три из них — нулевые. Один нулевой показатель ассоциируется с инфинитезимальным возмущением вдоль опорной траектории, т.е. с возмущением типа сдвига по времени, а два других — с возмущениями типа сдвига по энергии и по норме вектора γ . Остаётся три нетривиальных показателя. Если определять показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре, то один нулевой показатель сразу исключается из рассмотрения. Два других нулевых показателя можно исключить, если при каждом обращении к процедуре вычисления отображения Пуанкаре использовать нормировку вектора γ на единицу и нормировку вектора момента \mathbf{M} к величине, обеспечивающей заданное значение полной механической энергии [17].

3. Феномены регулярной динамики: реверс, периодические движения

Обратимся вначале к модели кельтского камня с параметрами, использованными в работе [16]. Пусть главные радиусы кривизны параболоида $a_1 = 9, a_2 = 4$, расстояние от вершины до центра масс $h = 1$, ускорение свободного падения $g_0 = 100$, величины момента инерции по главным осям $I_1 = 5, I_2 = 6, I_3 = 7$, угол $\delta = 0,2$. Для этого случая² известно, что имеется критическое значение угловой скорости вращения вокруг вертикальной оси $\omega_* = 18,526$, что соответствует энергии $E_* = 1300$.

При угловой скорости, большей ω_* , существует два режима вращения вокруг вертикальной оси (режимы вертикальных вращений) в разные стороны: устойчивый и неустойчивый. Если запустить вращение в "неподходящем" направлении, то малые возмущения исходного состояния дадут начало развитию сложного переходного процесса, в котором возникают колебания относительно других координатных осей. Впоследствии эти колебания трансформируют движение так, что происходит реверс — смена знака составляющей угловой скорости ω_3 . На рисунке 2а приведена зависимость от времени вертикальной составляющей вектора угловой скорости, которая в

² Приведённые параметры и запись уравнений при массе тела в 1 кг соответствуют измерению длины в сантиметрах и времени в единицах, равных $10^{-1/2}$ с.

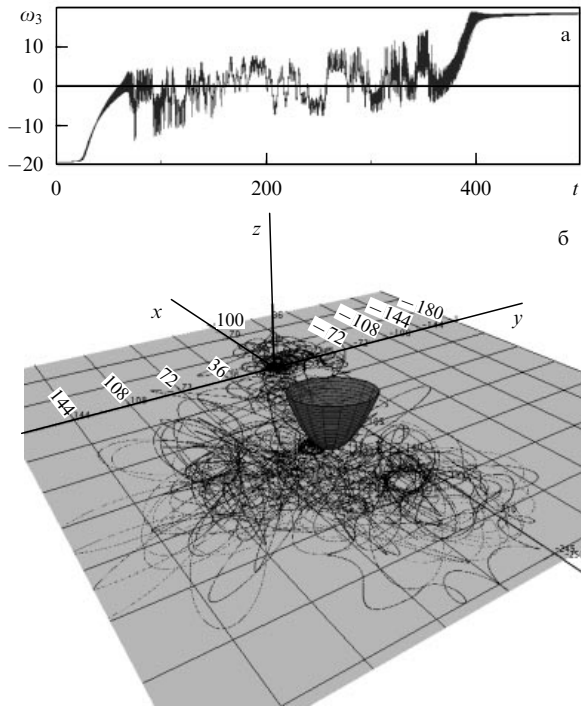


Рис. 2. Зависимость компоненты угловой скорости ω_3 от времени, иллюстрирующая эффект реверса (а), и след, оставляемый на плоскости точкой контакта в ходе этого процесса (б), при $E = 1380$, $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0,2$.

результате достаточно длительного процесса меняет знак на противоположный. На рисунке 2б показан след, оставляемый на плоскости точкой контакта в ходе этого процесса.

Как показано в работе Карапетяна [15], при угловой скорости, близкой к критическому значению ω_* , при потере устойчивости вращения выполняются условия теоремы о рождении цикла Андронова – Хопфа. При переходе через порог ω_* вместо устойчивого вертикального вращения возникает устойчивый предельный цикл, определяющий некоторое периодическое колебательное решение системы (2). На рисунке 3 представлены результаты численных расчётов для режима движения, отвечающего циклу Карапетяна: графики зависимости от времени компонент кинетического момента, фазовый портрет аттрактора в двумерной проекции и диаграмма, иллюстрирующая движение точки контакта на плоскости. Хотя скорости и наклон камня в цикле Карапетяна изменяются во времени строго периодически, траектория движения точки контакта, вообще говоря, оказывается незамкнутой, заполняя кольцевую полосу с конечной шириной. В самом деле, в общем случае нет оснований ожидать, что отношение периода колебаний камня к периоду прохода точки контакта по своей траектории будет выражаться рациональным числом, так что движение в целом оказывается не периодическим, а квазипериодическим.

4. Феномены сложной динамики

Переходя к рассмотрению сложной динамики, для кельтского камня в виде эллиптического параболоида зададим главные моменты инерции $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, приняв,

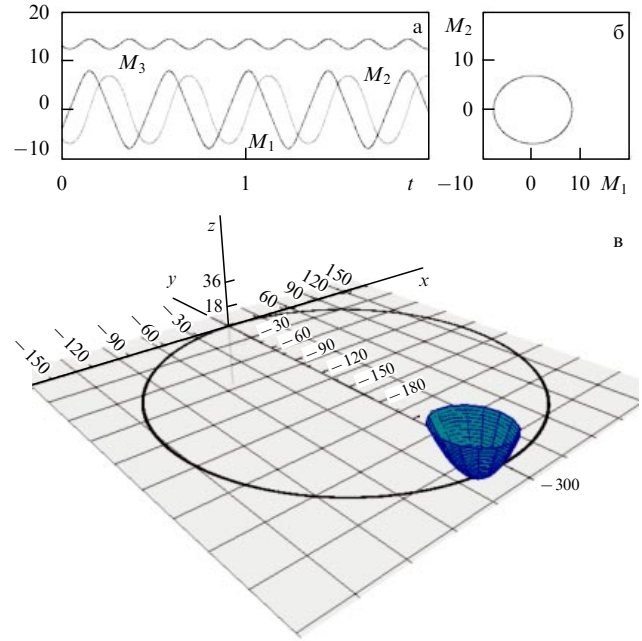


Рис. 3. Зависимости компонент углового момента от времени (а), фазовый портрет аттрактора в проекции на плоскость $M_1 - M_2$ (б) и траектория движения точки контакта тела и плоскости (в) в цикле Карапетяна при $E = 1000$, $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $\delta = 0,2$.

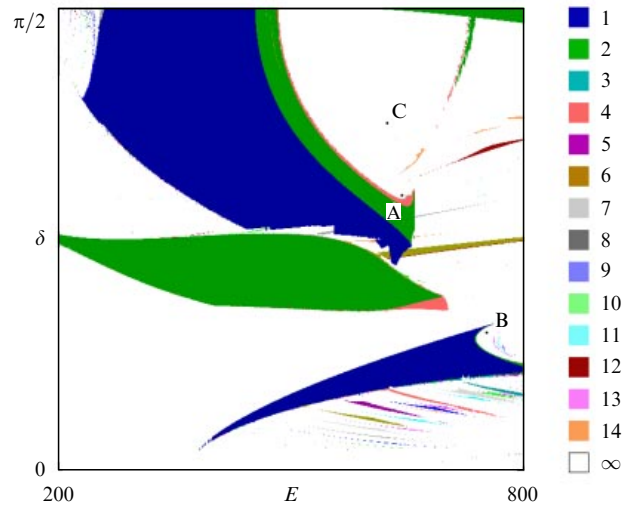


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Карта режимов на плоскости параметров энергия E – угол δ поворота осей инерции относительно геометрических осей для отображения Пуанкаре кельтского камня в виде эллиптического параболоида при $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$.

как и ранее, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $g_0 = 100$ [17]. В этом случае устойчивых вертикальных вращений нет даже при больших энергиях, а общая картина динамического поведения в зависимости от параметров E (энергия) и δ (угол поворота осей инерции относительно геометрических осей) оказывается весьма богатой.

На рисунке 4 показана карта режимов для отображения Пуанкаре рассматриваемой системы на плоскости параметров $E - \delta$. Для построения карты проводился перебор узлов сетки на плоскости (E, δ) с некоторым

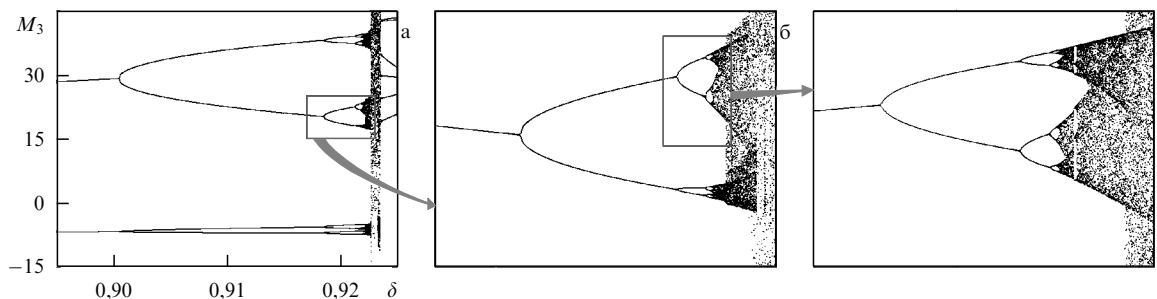


Рис. 5. Бифуркационные деревья в области перехода к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму при параметрах $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 642$. Сканирование проводится в сторону увеличения параметра δ с наследованием начальных условий.

Таблица. Результаты оценки констант Фейгенбаума

	(2,4)/(4,8)	(4,8)/(8,16)	(8,16)/(16,32)	(32,64)/(64,128)	Константы Фейгенбаума
δ_F	6,52	5,29	4,70	4,62	4,6692
α_F	-3,79	-2,82	-2,64	-2,54	-2,5029

шагом по двум параметрам. В каждой точке выполнялось порядка 10^3 итераций отображения Пуанкаре, и результаты последних итераций анализировались на наличие периода повторения с некоторым заданным уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначался определённым цветом и производился переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. При этом в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке ("сканирование с наследованием"), что в большинстве случаев способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики. При построении карты, представленной на рис. 4, использованы результаты сканирования с наследованием в направлениях слева направо и снизу вверх. Правило кодирования периодов движений цветами дано в правой части рисунка, причём период определялся отслеживанием динамики составляющей момента импульса M_3 .

Рассмотрим более подробно аттракторы, которые на карте, показанной на рис. 4, реализуются в точках А, В, С.

Если на плоскости параметров двигаться снизу вверх по вертикальной линии, проходящей через точку А, то можно наблюдать переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Это иллюстрируется древовидной диаграммой на рис. 5а, где можно увидеть характерную картину ветвей, раздваивающихся в точках бифуркаций, и заполненную точками "крону", отвечающую области хаоса. На рисунке 5б, в показаны фрагменты картины в увеличенном виде, которые с укрупнением масштаба становятся всё более похожими на классическую картину "дерева Фейгенбаума" для одномерных отображений [21, 22].

Измеряя на диаграмме расщепление ветвей по горизонтали и вычисляя их отношения для последовательных уровней удвоения, получаем первую строку таблицы. Аналогичным образом, определив отношения размеров расщепления ветвей по вертикальной координате, заполним вторую строку. Для перехода, относящегося к классу универсальности Фейгенбаума [21–24], отношения должны сходиться к универсальным константам: $\delta_F \approx 4,6692$

и $\alpha_F \approx -2,5029$. Из таблицы видно, что это подтверждается. Тот факт, что на первых уровнях удвоений оценки констант по абсолютной величине больше, связан с *эффектом кроссовера* [25]. При малой эффективной диссипации (понимаемой как характеристика сжатия трёхмерного фазового объёма в данной области фазового пространства) константы на низких уровнях близки к тем, которые характерны для удвоений в консервативных системах: $\delta_H \approx 8,721$ и $\alpha_H \approx -4,018$ [26, 27]. При каждой очередной бифуркации степень сжатия фазового объёма за характерный период удваивается и оценки асимптотически приближаются к универсальным константам δ_F и α_F .

Аттрактор трёхмерного отображения Пуанкаре в проекции на плоскость переменных M_1, M_2 , возникший в результате каскада удвоений периода, показан на рис. 6 для точки А ($E = 642$, $\delta = 0,922$). Визуально он похож на аттракторы диссипативных отображений, наблюдаемые сразу за порогом перехода к хаосу через удвоения периода. На рисунке показан также спектр колебаний переменной M_3 при динамике на аттракторе. Спектр имеет вид набора пиков с иерархической структурой, характерной для аттрактора, возникшего через каскад Фейгенбаума [21, 22, 24]. По Фейгенбауму, пики каждого следующего уровня должны быть в среднем на 13,4 дБ ниже предыдущего уровня, что хорошо согласуется с наблюдаемой картиной. На глубоких уровнях пики разрушены и имеет место сплошной спектр, т.е. динамика — хаотическая.

Аттрактор Лоренца [28, 29] — это ставший классическим объект нелинейной динамики и теории хаоса, который относится к классу сингулярно-гиперболических, или квазигиперболических, аттракторов. Модель Лоренца много лет оставалась предметом активных и тщательных исследований [29–31]. Определённым итогом стало аккуратное математическое обоснование хаотической природы динамики на аттракторе Лоренца, которое дано сравнительно недавно В. Такером [32] на основе сочетания техники доказательных вычислений (computer assisted proof) и аккуратного аналитического рассмотрения. В связи с этим интересным и замечательным представляется обнаружение весьма общей ситуации, в

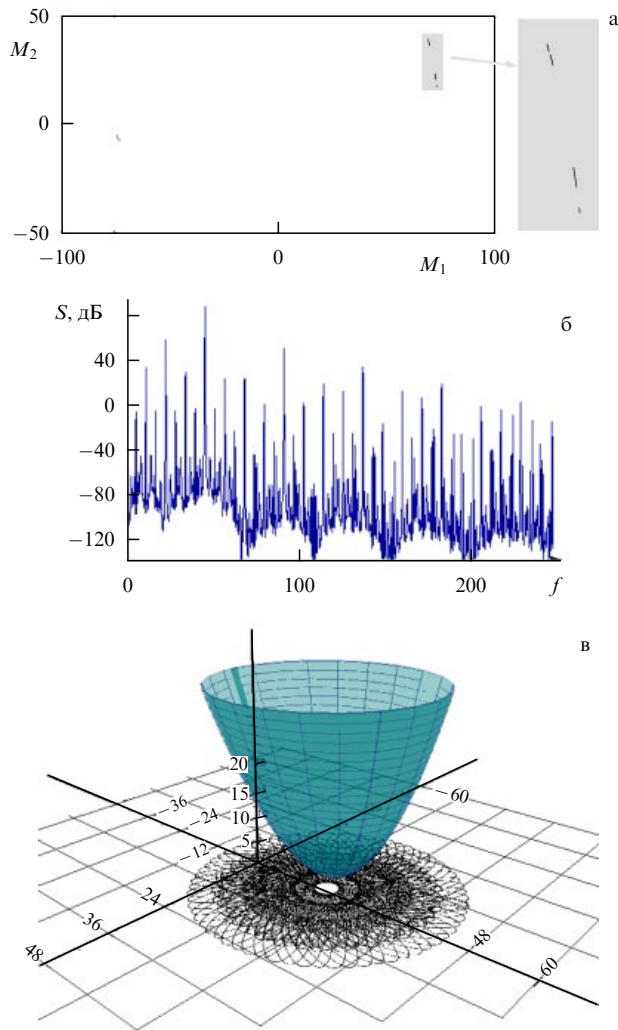


Рис. 6. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса (а), спектр Фурье составляющей M_3 (б) и след, оставляемый на плоскости точкой контакта (в) при динамике на аттракторе. Параметры $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 642$, $\delta = 0,922$.

которой аттрактор типа Лоренца рождается в результате определённой последовательности бифуркационных событий в трёхмерных отображениях [18]. Этот аттрактор появляется тогда, когда после бифуркации удвоения периода вновь возникшая орбита удвоенного периода теряет устойчивость вследствие бифуркации Неймарка – Сакера (а не в результате вторичного удвоения), после чего неустойчивое многообразие потерявшей устойчивость исходной периодической точки пересекает её устойчивое двумерное многообразие. Как оказалось, это относится, в частности, и к трёхмерному отображению Пуанкаре для неголономной модели кельтского камня [33].

Пример аттрактора типа Лоренца в отображении Пуанкаре для кельтского камня показан на рис. 7 в двумерной проекции вместе со спектром колебаний переменной M_3 и диаграммой, иллюстрирующей движение точки контакта на плоскости. Параметры задачи, которые выбраны, как указано в работе [33], отвечают точке В на рис. 4.

Как можно убедиться, при итерациях отображения Пуанкаре изображающая точка совершает скачки, по-

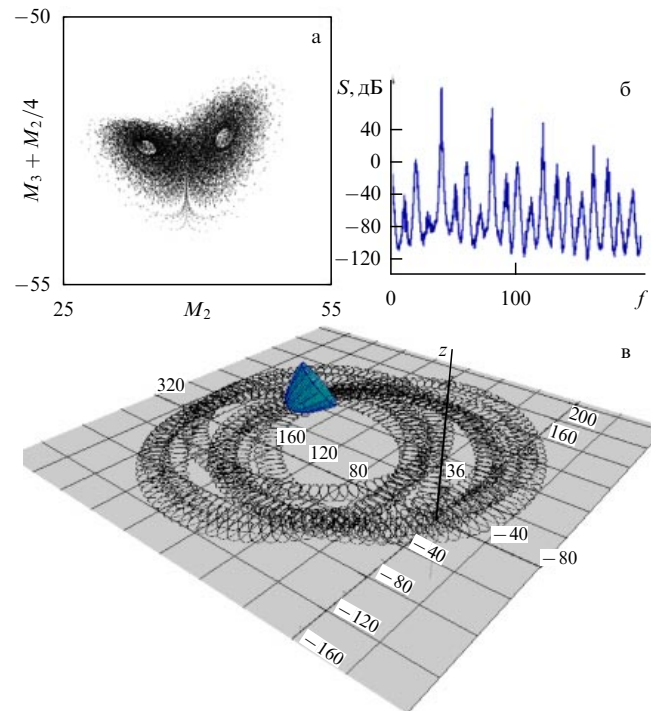


Рис. 7. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса (а), спектр Фурье составляющей M_3 (б) и след, оставляемый на плоскости точкой контакта (в) при динамике на аттракторе. Параметры $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 752$, $\delta = 0,485$.

сеща по очереди завитки аттрактора — левый и правый. Для отображения, отвечающего двукратной итерации, последовательные положения изображающей точки можно представить находящимися на непрерывной траектории некоторой аппроксимирующей потоковой системы с аттрактором Лоренца.

Для данного аттрактора показатели Ляпунова трёхмерного отображения, согласно результатам вычислений, составляют $A_1 = 0,0202$, $A_2 = 0,0000$, $A_3 = -0,1925$. Первый показатель положителен, что говорит о присутствии хаоса. Об этом можно судить также по характеру спектра на рис. 7б, который, как видно, является сплошным, хотя и довольно сильно изрезанным. Второй показатель близок к нулю, что связано с возможностью описания динамики аппроксимирующей потоковой системой. Третий показатель отрицателен, причём сумма всех показателей тоже отрицательна, что обеспечивает сжатие фазового объёма до нуля в процессе динамики с выходом на аттрактор. Размерность аттрактора в отображении Пуанкаре, оценённая по формуле Каплана – Йорке [21, 22]: $D = 2 + (A_1 + A_2)/|A_3| \approx 2,10$, немного больше двух, как и для классического аттрактора Лоренца.

На рисунке 8 показан аттрактор в точке С ($E = 620$, $\delta = 3\pi/8$) и спектр Фурье, который определённо отвечает развитому хаосу. Изрезанность этого спектра, в отличие от изрезанности спектров на рис. 6 и 7, невелика, что свидетельствует об отсутствии каких-либо заметных периодических составляющих движения. Показатели Ляпунова $A_1 = 0,282$, $A_2 = -0,093$, $A_3 = -0,686$. Здесь первый показатель Ляпунова положителен, а второй отрицателен, но по абсолютной величине меньше пер-

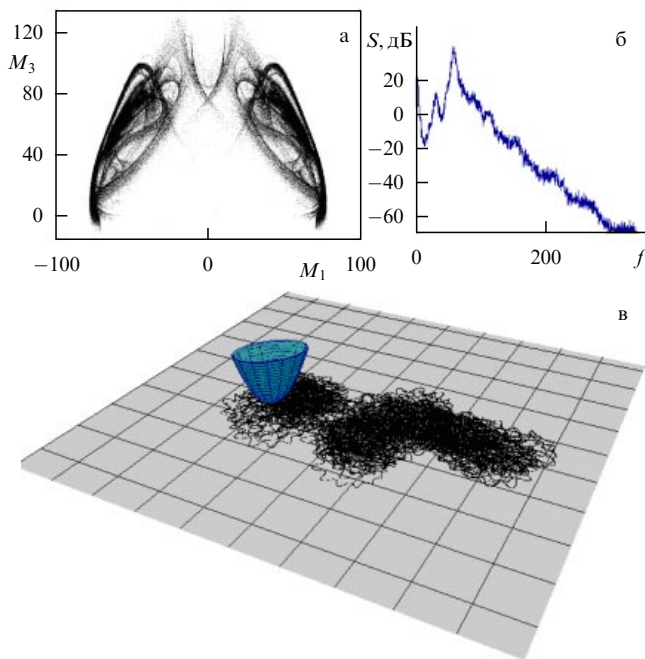


Рис. 8. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость двух составляющих момента импульса (а), спектр Фурье составляющей M_3 (б) и след, оставляемый на плоскости точкой контакта (в) при динамике на аттракторе. Параметры $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 7$, $g_0 = 100$, $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $h = 1$, $E = 620$, $\delta = 1,178$.

вого. Поэтому размерность по формуле Каплана – Йорке больше двух: $D = 2 + (A_1 + A_2)/|A_3| \approx 2,26$.

5. Заключение

В статье представлены материалы компьютерного исследования динамики неголономной модели кельтского камня — динамической системы специфического типа, занимающей промежуточное положение между консервативными и диссипативными системами в обычном смысле. С одной стороны, в рассматриваемой системе имеют место сохранение механической энергии и инвариантность к обращению времени, а с другой — отсутствует свойство сохранения фазового объёма, который локально может претерпевать сжатие или расширение. Поэтому на гиперповерхности постоянной энергии в фазовом пространстве можно наблюдать динамическое поведение системы, определяемое на больших временах притягивающими множествами — аттракторами. Это неподвижные точки, ассоциирующиеся с устойчивыми вращениями, предельные циклы, отвечающие вращениям с колебаниями, странные хаотические аттракторы. С методической точки зрения, наличие аттракторов делает естественным и уместным использование инструментария, применявшегося до сих пор к диссипативным динамическим системам, что мы продемонстрировали на конкретных примерах. Очевидно, аналогичный подход может быть продуктивным и для других механических систем, способных демонстрировать феномены сложной динамики.

В теории колебаний и нелинейной динамике часто явно или неявно предполагают, что внимания заслуживают только грубые (структурно-устойчивые) феномены, что подразумевает нечувствительность динамических режимов к вариации параметров и характеристик моде-

лей и систем и гарантирует наблюдаемость этих феноменов на практике. Однако буквальное следование этому принципу не всегда оправданно. Например, гамильтоновы системы заведомо не являются грубыми как подмножество всевозможных динамических систем, потому что сколь угодно малой вариацией правых частей дифференциальных уравнений систему можно вывести из класса гамильтоновых. История науки свидетельствует, что это не приводит к отказу от изучения гамильтоновых систем, хотя вопрос о наблюдаемости присущих им феноменов динамики в эксперименте в связи с этим часто оказывается нетривиальным.

Так, в определённых условиях те или иные феномены могут корректно соответствовать динамике на конечных временах, но описание перестаёт быть адекватным на больших временах, например, из-за сколь угодно малой диссипации. Аналогичные оговорки следует сделать и в отношении рассмотренной здесь неголономной модели кельтского камня, хотя бы в силу присущей ей консервативности в смысле сохранения механической энергии. В самом деле, данная модель подразумевает далеко идущую идеализацию при постановке задачи, тогда как в реальной физической системе возможны нарушения неголономной связи и для правильного в деталях теоретического описания следовало бы принимать во внимание конкретные законы сил трения, нарушающих консервативную природу системы.

Полезное обсуждение соотношения различных теоретических моделей с реальным экспериментом для кельтского камня проведено, в частности, в работе [34]. В качестве известного примера заведомой неприменимости неголономной модели можно указать задачу о волчке Томсона, известном также как "китайский волчок" [35, 36].

Тем не менее неголономная модель оказывается полезной и содержательной, позволяя объяснить многие феномены, наблюдаемые в экспериментах с настоящими кельтскими камнями, включая реверс, многократный реверс, циклы Карапетяна и хаотические колебания на конечных временах. С точки зрения количественного соответствия реальным экспериментам, результаты, полученные в рамках неголономной модели, следует воспринимать с осторожностью (в том числе и относящиеся к траекториям точки контакта).

Список литературы

1. Lichtenberg A J, Lieberman M A *Regular and Stochastic Motion* (New York: Springer-Verlag, 1983); Лихтенберг А, Либман М *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984)
2. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988); Sagdeev R Z, Usikov D A, Zaslavsky G M *Nonlinear Physics: From the Pendulum to Turbulence and Chaos* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1988)
3. Рабинович М И, Трубетков Д И *Введение в теорию колебаний и волн* (М.: Наука, 1984); Rabinovich M I, Trubetskov D I *Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989)
4. Ландау Л С *Нелинейные колебания и волны* (М.: Либроком, 2010)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1973); Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)
6. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1989); Arnold V I *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer, 1997)

7. Борисов А В, Мамаев И С (Ред.) *Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы* (М. – Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2002)
8. Неймарк Ю И, Фуфаев Н А *Динамика неголономных систем* (М.: Наука, 1967); Neimark Ju I, Fufaev N A *Dynamics of Nonholonomic Systems* (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1972)
9. Borisov A V, Mamaev I S *Regular Chaotic Dynamics* 7 177 (2002)
10. Борисов А В, Мамаев И С, Бизязев И А *Нелинейная динамика* 9 141 (2013)
11. Walker G T *Proc. Camb. Phil. Soc.* 8 305 (1895)
12. Walker G T *Quart. J. Pure Appl. Math.* 28 175 (1896)
13. Walker J *Sci. Am.* 241 (10) 144 (1979)
14. Козлов В В *Успехи механики* 8 (3) 85 (1985)
15. Карапетян А В *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела* (2) 19 (1985)
16. Борисов А В, Мамаев И С *УФН* 173 407 (2003) [Borisov A V, Mamaev I S *Phys. Usp.* 46 393 (2003)]
17. Borisov A V et al. *Regular Chaotic Dynamics* 17 512 (2012)
18. Гонченко А С, Гонченко С В, Шильников Л П *Нелинейная динамика* 8 (1) 3 (2012)
19. Tsai J-C et al. *Phys. Rev. Lett.* 94 214301 (2005)
20. Гонченко А С, Гонченко С В, Казаков А О *Нелинейная динамика* 8 507 (2012)
21. Schuster H G, Just W *Deterministic Chaos: An Introduction* (Wiley-VCH, 2005); Шустер Г *Детерминированный хаос* (М.: Мир, 1988)
22. Кузнецов С П *Динамический хаос* (М.: Физматлит, 2006)
23. Feigenbaum M J *J. Stat. Phys.* 21 669 (1979)
24. Вул Е Б, Синай Я Г, Ханин К М *УМН* 39 (3) 3 (1984) [Vul E B, Sinai Ya G, Khanin K M *Russ. Math. Surv.* 39 1 (1984)]
25. Reick C *Phys. Rev. A* 45 777 (1992)
26. Reichl L E *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* (New York: Springer, 2004); Райхл Л Е *Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах* (М. – Ижевск: РХД, 2008)
27. Kuznetsov S P, Kuznetsov A P, Sataev I R *J. Stat. Phys.* 121 697 (2005)
28. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* 20 130 (1963); Лоренц Э, в сб. *Странные аттракторы* (Под ред. Я Г Синай, Л П Шильникова) (М.: Мир, 1981) с. 88
29. Sparrow C *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (New York: Springer-Verlag, 1982)
30. Афраймович В С, Быков В В, Шильников Л П *ДАН СССР* 234 336 (1977); Afraimovich V S, Bykov V V, Shil'nikov L P *Sov. Phys. Dokl.* 22 253 (1977)
31. Guckenheimer J, Holmes P *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, 1990); Гукенхеймер Дж, Холмс Ф *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (М. – Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2002)
32. Tucker W *Found. Comput. Math.* 2 53 (2002)
33. Гонченко А С, Гонченко С В *Нелинейная динамика* 9 (1) 77 (2013)
34. Garcia A, Hubbard M *Proc. R. Soc. Lond. A* 418 165 (1988)
35. Kane T R, Levinson D A, in *American Society of Mechanical Engineers, Winter Annual Meeting, San Francisco, Calif., Dec. 10–15, 1978*
36. Алешкевич В А, Деденко Л Г, Караваев В А *Лекции по механике твёрдого тела* (М.: Изд-во МГУ, 1997)

Nonlinear dynamics of the rattleback: a nonholonomic model

A.V. Borisov

*Institute of Computer Science, Udmurt State University,
ul. Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Russian Federation;
Moscow Institute of Physics and Technology,
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation
E-mail: borisov@rcd.ru*

A.O. Kazakov

*Institute of Computer Science, Udmurt State University,
ul. Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Russian Federation;
Faculty Computational Mathematics and Cybernetics, N.I. Lobachevskii Nizhny Novgorod State University,
prosp. Gagarina 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: kazakovdz@yandex.ru*

S.P. Kuznetsov

*Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russian Academy of Sciences,
ul. Zelenaya 38, 410019 Saratov, Russian Federation
E-mail: spkuz@yandex.ru*

For a solid body of convex form moving on a rough horizontal plane that is known as a rattleback, numerical simulations are used to discuss and illustrate dynamical phenomena that are characteristic of the motion due to a nonholonomic nature of the mechanical system; the relevant feature is the nonconservation of the phase volume in the course of the dynamics. In such a system, a local compression of the phase volume can produce behavior features similar to those exhibited by dissipative systems, such as stable equilibrium points corresponding to stationary rotations; limit cycles (rotations with oscillations); and strange attractors. A chart of dynamical regimes is plotted in a plane whose axes are the total mechanical energy and the relative angle between the geometric and dynamic principal axes of the body. The transition to chaos through a sequence of Feigenbaum period doubling bifurcations is demonstrated. A number of strange attractors are considered, for which phase portraits, Lyapunov exponents, and Fourier spectra are presented.

PACS numbers: **05.45.–a**, **45.10.–b**, **45.40.–f**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201405b.0493

Bibliography — 36 references

Received 29 August 2013, revised 1 October 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk 184 (5) 493–500 (2014)

Physics – Uspekhi 57 (5) (2014)