Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Московская школа экономики
Кафедра эконометрики и математических методов экономики

Курс теории вероятностей в задачах и упражнениях

Учебное пособие для социально-экономических специальностей

Макаров А.А., Ивин Е.А., Курбацкий А.Н.

Москва 2014

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я73 М15

Рецензент: к.ф.-м.н., профессор Шмерлинг Д.С.

(кафедра методов сбора и анализа социологической информации НИУ ВШЭ)

Макаров А.А., Ивин Е.А., Курбацкий А.Н.

М15 **Курс теории вероятностей в задачах и упражнениях:**

Учебное пособие для социально-экономических специальностей. – М.: МАКС Пресс, 2014 – 116 с.

ISBN 978-5-317-04

Учебное пособие содержит задачи и упражнения по базовым разделам курса теории вероятностей для социально-экономических специальностей. Каждый раздел снабжен кратким сводом основных понятий и теорем, необходимых для решения задач, а также решениями типовых задач по ключевым темам и ответами к задачам. В конце приведены варианты коллоквиумов и экзаменов с подробными решениями.

Для студентов социально-экономических специальностей и преподавателей.

УДК (075.8) ББК я73

ISBN 978-5-317-04

Содержание

Предисловие

В настоящем издании собраны задачи по курсу теории вероятностей, который авторы на протяжении многих лет ведут в Московской школе экономики МГУ им. М.В. Ломоносова и на ряде ф-тов социально-экономического профиля Высшей школы экономики. За последние 10 лет вышло несколько десятков новых учебников и задачников по теории вероятностей [2–19]. Подобное внимание специалистов к учебной литературе по теории вероятностей, на наш взгляд, обусловлено несколькими причинами. Во-первых, возросло понимание важности и востребованности этой области знаний в подготовке специалистов самых различных профилей, включая социально-экономические и гуманитарные специальности. Во-вторых, практический опыт показал, что хорошо готовить различных специалистов по двум-трем учебникам [5–7], написанным 40–50 лет назад и выдержавшим десятки переизданий, далеко не самый оптимальный путь, так как эти учебники во многом ориентировались на подготовку специалистов технических специальностей. В-третьих, начальные сведения и понятия теории вероятностей в последние годы вошли в программу общеобразовательных школ [17–18] и ЕГЭ по математике. Последнее позволяет несколько по-другому расставить акценты в вузовском курсе теории вероятностей, уделяя меньше внимания комбинаторике и так называемым классическим началам вероятности, и уделить больше времени непрерывным распределениям, функциям от случайных величин, нормальному распределению вероятности, двумерным дискретным и непрерывным распределениям и использованию на практике предельных теорем теории вероятностей.

Подбирая задачи для этого задачника, мы ориентировались на социально-экономический профиль подготовки студентов и свою практику проведения семинарских занятий, контрольных и экзаменационных работ по стандартному семестровому курсу теории вероятностей в Московской школе экономики МГУ. Этот курс затем продолжает семестровый курс математической статистики, а затем годовой курс эконометрики, если речь идет об экономических специальностях. Учет взаимосвязей этих курсов и необходимость отработать понятийный теоретико-вероятностный аппарат для последующих курсов заметно влиял на подбор задач. Все темы курса в задачнике разбиты на 13 разделов. В начале каждого раздела даны определения основных понятий и ключевые теоремы, а также разобраны типовые задачи по темам. Тем не менее эта книга ни в коей мере не заменяет учебник по теории вероятностей. В нашем курсе мы рекомендуем студентам в качестве простых базовых учебников [16–18], а в качестве более сложных – [1]. Мы намеренно не перегружали этот задачник известными занимательными задачами по теории вероятностей, чтобы прежде всего сконцентрировать внимание студентов на основном изучаемом материале. В качестве задачника, включающего более обширный и сложный материал по теории вероятностей, можно рекомендовать [11]. Простые тренировочные задачи в большом количестве представлены в школьных учебниках [17–18].

Успешное освоение курса теории вероятностей, в котором появляется много новых математических понятий, невозможно без регулярных занятий и контроля за уровнем усвоения текущего материала. Поэтому наш семестровый курс теории вероятностей предполагает пять промежуточных этапов контроля: 4 контрольные работы и 1 коллоквиум. Как правило, контрольная работа включает четыре задачи на 40 минут и проводится на каждом третьем–четвертом семинаре. Это позволяет и студентам, и преподавателям оценить уровень освоения материала. Хотя тематическое содержание контрольных работ год из года меняется, можно указать примерное распределение тем по контрольным работам. В первую контрольную работу попадают задачи из разделов 1–4. При этом непрерывное распределение вероятностей на числовой прямой мы намеренно вводим до понятия случайной величины, чтобы при обращении к непрерывным случайным величинам было проще обсуждать понятие плотности распределения и вероятностей событий. Во вторую контрольную работу входят задачи – из 5–7 разделов, в третью – из 8–10 разделов, в четвертую – из 11–13 разделов. Коллоквиум включает как теоретические вопросы, так и простые задачи на понимание, не предполагающие долгих расчетов.

Мы надеемся, что это учебное пособие будет полезно не только для студентов социально-экономического профиля, но и преподавателям, подбирающим задачи для семинарских занятий и промежуточных аттестаций студентов.

Авторы выражают благодарность студентам кафедры Эконометрики и математических методов экономики Константину Шаклеину и Станиславу Якиро за большой труд по исправлению неточностей и проверке ответов.

Зав. общеуниверситетской кафедрой
высшей математики НИУ ВШЭ,
профессор А.А. Макаров

1. Основные правила комбинаторики

Ключевым понятием теории вероятностей является случайный эксперимент и его возможные исходы. В тех случаях, когда число возможных исходов случайного эксперимента конечно, для описания всех подобных исходов или какой-то их части оказываются полезны правила комбинаторики. Комбинаторика изучает способы перебора, пересчета и упорядочивания предметов. Для решения различных задач теории вероятностей обычно используются следующие комбинаторные правила:

- правило умножения;
- правило перестановок;
- правило сочетаний;
- правило размещений.

Правило умножения позволяет найти число упорядоченных пар.

Определение 1. Чтобы найти число всех упорядоченных пар объектов (предметов) двух типов, нужно число объектов первого типа умножить на число объектов второго типа. Другими словами, если на первом месте может находиться один из m различных объектов (предметов), а на втором может быть один из k разных объектов, то можно составить $m \cdot k$ различных упорядоченных пар из этих объектов. Это правило называется *правилом умножения.*

Пример 1. Если на первый вопрос социологической анкеты можно ответить 2-мя способами, а на второй вопрос – 5-ю способами, то всего существует $2 \cdot 5 = 10$ возможных способов заполнить ответы на два вопроса анкеты.

Пример 2. Если игральную кость подбросить дважды, то при первом броске можно получить любую из шести граней игральной кости.

Аналогичным образом может закончиться и второй бросок. Значит, согласно правилу умножения всего можно получить $6 \cdot 6 = 36$ вариантов завершения этого случайного эксперимента.

Правило перестановок позволяет найти число способов упорядочивания n объектов (предметов). Под упорядочиванием понимается такая нумерация объектов, при которой какой-то из объектов получает первый номер, любой из оставшихся объектов получает второй номер и так далее. Общую формулу числа перестановок можно получить с помощью правила умножения.

Определение 2. Число перестановок n объектов равно произведению: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Такое произведение натуральных чисел от 1 до n называют *факториалом числа n* («эн»-факториал) и обозначают $n!$.

Пример 3. Пять студентов можно поставить в очередь в буфет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ различными способами.

Пример 4. Одиннадцати игрокам футбольной команды можно раздать майки с номерами от одного до одиннадцати 11! способами

$$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39916800.$$

Правило сочетаний позволяет узнать, сколькими способами можно выбрать из n объектов k объектов. При этом порядок выбора этих объектов не существенен. Число этих способов называют *числом сочетаний из n по k* и обозначают C_n^k. Это правило вытекает из правила умножения и правила перестановок.

Определение 3. Число способов выбрать из n объектов k объектов или, другими словами, *число сочетаний из n по k* равно:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

В числителе этого выражения стоят ровно k сомножителей, каждый из которых показывает, сколькими способами можно выбрать очередной объект из еще не выбранных. Так, первый объект можно выбрать n способами, второй $(n-1)$ способами, так как на этом этапе осталось только $(n-1)$ объект и т.д., пока не доберемся до выбора k-го объекта. В знаменателе число сочетаний стоит выражение $k!$, которое учитывает, что одни и те же k объектов мы можем выбрать в разном порядке. Всего таких упорядочиваний ровно $k!$. Число сочетаний из n по k кратко можно записать в следующем виде: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример 5. Налоговая инспекция может выбрать для проверки три компании из десяти $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ различными способами.

Пример 6. В Центральном федеральном округе 18 регионов. Социологи хотят выбрать из них 4 произвольных региона для проведения социологического опроса. Это можно сделать: $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3060$ способами.

Правило размещений позволяет вычислить, сколькими способами можно разместить n объектов на k позиций. При этом сами позиции считаются упорядоченными или, другими словами, занумерованными. Число этих способов называют *числом размещений n по k* и обозначают A_n^k. Правило размещений вытекает из правила умножения.

Определение 4. Число размещений n объектов по k упорядоченным позициям равно: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Число размещений n по k кратко можно записать в следующем виде: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 7. На конкурсе красоты из десяти претенденток надо выбрать трех на первое, второе и третье место. Согласно правилу размещения это можно сделать: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способами.

1. Российский автомобильный номер состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить? Используются 10 цифр и 12 букв.

2. Пин-код для банковской карточки состоит из четырех цифр. Сколько различных пин-кодов существует?

3. Имеется 3 вида хлеба, 5 видов колбасы и сливочное масло. Сколько существует различных вариантов сделать бутерброд? (Бутерброды могут быть без колбасы или без сливочного масла).

4. В камерах хранения на вокзалах применяется шифр, который состоит из одной буквы (на первом месте) и трех цифр. Буквы берутся от А до К, исключая буквы *Ё* и *Й*, а цифры могут быть любыми. Сколько можно составить различных шифров?

5. Преподаватель написал на доске четыре задачи и вызывает по одному человеку на каждую задачу. Сколькими способами он это может сделать, если в классе 20 человек?

6. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются три карты. Сколько существует различных способов достать хотя бы одного туза?

7. Сколькими способами можно отобрать 3 издания из десяти для размещения рекламы?

8. В чемпионате России по футболу играют 16 команд.

а) сколько существует различных вариантов итогового расположения?

б) сколько существует различных вариантов призовой тройки?

9. Монета бросается 6 раз. Сколькими способами можно выкинуть при этом не менее двух орлов?

10. В распоряжении у тренера 20 хоккеистов и 3 вратаря. Сколько различных вариантов составить звено 5+1 (5 игроков и 1 вратарь), если любой хоккеист может играть на любой позиции.

2. Случайное событие. Вероятностное пространство. Классическое определение вероятности

Описание случайного эксперимента, то есть такого эксперимента, исход которого нельзя предсказать заранее, начинается с описания всех возможных исходов эксперимента. При этом сам такой эксперимент может закончиться лишь одним из возможных исходов, который именуют *элементарным исходом* или *элементарным событием*. Множество всех возможных исходов случайного эксперимента именуют *пространством элементарных исходов*. Традиционно изучение теории вероятностей начинают с так называемых дискретных пространств элементарных исходов, то есть таких пространств, число исходов в которых конечно или счетно. Элементарный исход эксперимента принято обозначать греческой буквой ω или ω_i (индексом указывая номер исхода). Все пространство элементарных исходов обозначают заглавной буквой Ω.

Пример 1. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором игральную кость подбрасывают дважды. В качестве одного из возможных исходов этого эксперимента может выступать элементарное событие $\omega = (4; 3)$, где 4 – число очков, выпавшее при первом броске, а 3 – при втором. Все пространство элементарных исходов подобного эксперимента согласно комбинаторному правилу умножения будет состоять из $6 \cdot 6 = 36$ элементарных исходов.

Пример 2. Из пяти студентов: Алексея, Олега, Ивана, Петра, Бориса наугад выбираем двух студентов. При этом порядок выбора нам не важен. Элементарными исходами в таком эксперименте будут различные пары. Всего таких пар будет $C_5^2 = 10$.

Для описания случайного эксперимента с дискретным пространством исходов надо не только указать множество его возможных исходов, но и каждому исходу приписать вероятность его появления в эксперименте. Такую вероятность для элементарного события ω обозначают $P(\omega)$. Это число показывает шансы появления элементарного события в эксперименте. Число $P(\omega)$ может принимать значения от нуля (включая и нуль) до единицы (включая единицу). А сумма вероятностей всех элементарных исходов $P(\omega_i)$ всегда равна 1.

Приписывание вероятностей $P(\omega)$ элементарным исходам в реальных задачах совсем не простая задача. Однако в тех случаях, когда есть основание полагать, что все элементарные исходы эксперимента в дискретном пространстве равновероятны, эта задача решается просто. Надо вычислить количество всех элементарных исходов в эксперименте и определить вероятность любого из них как единицу, деленную на общее число исходов. Такой способ задания вероятностей называется классическим.

Пример 3. Симметричную монету подбрасывают два раза. Элементарными исходами подобного эксперимента будут различные сочетания «орлов» и «решек», выпавших во время первого и второго броска. Например: $\omega_1 = \{\text{оо}\}$, $\omega_2 = \{\text{ро}\}$ и т.д. По правилу умножения получаем, что всего в таком эксперименте возможны $2 \cdot 2 = 4$ элементарных исхода. Считая их равновероятными, получаем, что вероятность каждого из подобных исходов равна $1/4$:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = 1/4.$$

На практике нас обычно интересуют не только отдельные элементарные исходы эксперимента, но и некоторые их совокупности или множества. Такие множества элементарных исходов называют *случайными событиями* и обозначают начальными заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д. Говорят, что в ходе случайного эксперимента произошло случайное событие A, если эксперимент закончился элементарным исходом, который принадлежит событию A. Зная вероятности элементарных событий в дискретном пространстве, можно определить вероятность случайного события A как сумму вероятностей всех входящих в него элементарных исходов. То есть: $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_k)$. Из свойств вероятностей элементарных исходов следует, что: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ и $P(\Omega) = 1$.

Пример 4. Из двух мальчиков и трех девочек наугад выбирают двух человек. При этом порядок выбора не важен. Какова вероятность того, что будет выбрана пара девочек?

Решение. Все пространство элементарных исходов этого эксперимента содержит $C_5^2 = 10$ элементарных исходов. Считая все исходы равновероятными, а это именно так, если выбирать наугад, получаем, что вероятность каждого элементарного исхода этого эксперимента равна $1/10$. Интересующее нас событие A – выбранная пара девочек содержит $C_3^2 = 3$ элементарных исхода, так как выбрать пару девочек можно только из трех девочек. (Выбор пары девочек из трех равносилен тому, что одну из трех девочек мы не выбираем, а это можно сделать тремя способами.) Таким образом, вероятность события A равна: $P(A) = 3/10$.

Пример 5. Игральную кость подбрасывают дважды. Какова вероятность того, что в сумме на двух костях выпадет 4 очка.

Решение. В примере 1 показано, что пространство элементарных исходов подобного эксперимента состоит из 36 исходов. Если второй бросок кости независим от первого (а так оно и бывает, если кости бросаются честно), то все исходы подобного эксперимента равновероятны и вероятность каждого исхода равна 1/36. Осталось вычислить, сколько элементарных исходов включает событие A – в сумме выпало 4. Таких исходов всего 3. Это: $\omega_1 = (1;3)$, $\omega_2 = (2;2)$, $\omega_3 = (3;1)$. Следовательно, вероятность события A равна: $P(A) = 3/36 = 1/12$.

Пример 6. В лотерее разыгрываются 100 билетов. Выигрышными из них являются ровно 10 билетов. Человек покупает 3 билета. Какова вероятность, что:

а) ровно два из них выигрышных?

б) хотя бы один из этих трех билетов выигрышный?

Решение. Пусть A={ровно два из них выигрышных} и B={хотя бы один из этих трех билетов выигрышный}. Общее число способов выбрать три билета из ста равно $C_{100}^3 = \frac{100!}{3!97!} = \frac{100\cdot99\cdot98}{6} = 50\cdot33\cdot98$. Количество вариантов выбрать 2 выигрышных и 1 проигрышный равно $C_{10}^2 C_{90}^1 = \frac{10!}{2!8!}\cdot 90 = 45\cdot 90$. Тогда вероятность $P(A)$ находится по формуле

$$P(A) = \frac{45\cdot 90}{50\cdot 33\cdot 98} = \frac{27}{1078} \approx 0.025.$$

Теперь найдем вероятность $P(\overline{B})$ того, что среди трех билетов не оказалось ни одного выигрышного:

$$P(\overline{B}) = \frac{C_{90}^3}{C_{100}^3} \approx 0.727.$$

Откуда искомая вероятность $P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 1 - 0.727 = 0.273$.

11. Испытание состоит в подбрасывании двух костей и монетки. Что является элементарным исходом? Сколько элементов содержит пространство элементарных событий? Найти вероятность, что выпадет дубль с орлом.
12. Монету подбросили 4 раза. Найдите число элементарных событий в этом эксперименте. Какова вероятность выпадения хотя бы одного орла?
13. Игральную кость бросили 2 раза. Какова вероятность события A=$\{$сумма очков при двух бросаниях равна 8$\}$?
14. Игральную кость бросают трижды. Найдите вероятность того, что сумма очков будет более 16.
15. Игральную кость бросают 5 раз. Опишите вероятностное пространство и найдите вероятность того, что сумма очков будет не более 6.
16. Игральную кость бросили 2 раза. Какова вероятность того, что шестерка выпала ровно один раз?
17. Вы нашли банковскую карточку и хотите угадать пин-код, который состоит из четырех цифр. Найти вероятность, что вы его угадаете (всего имеется 3 попытки).
18. На экзамене n билетов, вы выучили k билетов. Какова при этом вероятность вытащить удачный билет?
19. Сколько человек надо опросить, чтобы вероятность встретить человека с таким же днем рождения была более 50%?
20. Студенческая группа состоит из 6 юношей и 14 девушек. Из них случайным образом отбирают трех студентов. Найти вероятность того, что отобраны 2 юноши и 1 девушка.
21. В шахматной школе олимпийского резерва учатся 12

мальчиков и 3 девочки. Какова вероятность составить команду из трех человек для поездки на соревнования так, чтобы в команду вошла хотя бы одна девочка?

22. В компании работают 15 младших менеджеров и 5 старших. Из-за кризиса руководство случайным образом увольняет трех менеджеров. Какова вероятность того, что уволят не более одного старшего менеджера?

23. Студенческая группа состоит из 10 юношей и 15 девушек. Из них случайным образом отбирают 3-х студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных есть хотя бы один юноша.

24. На экзамен пришли 15 студентов: 10 юношей и 5 девушек. Преподаватель случайным образом сажает за первую парту 4 человека. Какова вероятность того, что за первой партой будет не более одной девушки?

25. В лотерею играют 15 человек, среди которых 6 – впервые. Выигрывают ровно три участника. Найти вероятность того, что повезет хотя бы двум новичкам.

26. Совет директоров компании состоит из 10 человек, среди которых 6 хорошо владеют английским языком. Какова вероятность того, что при простом случайном выборе трех членов совета директоров для поездки в Англию в делегацию попадет хотя бы один человек, не владеющий английским?

27. На предприятие поступила партия из 15 труб, среди которых 3 бракованные. Предприятие осуществляет выборочный контроль 4-х труб. Какова вероятность того, что хотя бы 2 бракованные трубы будут проконтролированы?

28. В детской спортивной школе занимаются теннисом 10 мальчиков и 12 девочек. Случайным образом выбирают 4 детей, которые будут подавать мячи на взрослом турнире. Какова вероятность того, что среди отобранных хотя бы 3 девочки?

29. 23 акционера компании делятся на два непримиримых лагеря. Первый лагерь состоит из 8 акционеров. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5 акционеров в их число попадет не менее двух акционеров из первого лагеря? Какова вероятность того, что среди пяти отобранных акционеров будет ровно три из второго лагеря?

30. Студент в состоянии решить 25 задач из 30 в первом туре экзамена и 18 из 24 – во втором. Найти вероятность сдачи им экзамена, если в каждом туре даются 4 задачи и достаточно решить 3 из них.

3. Операции с событиями, формула сложения вероятностей, независимые события

Со случайными событиями, связанными с одним и тем же случайным экспериментом, можно совершать различные теоретико-множественные операции, а именно рассматривать дополнение события A до всего Ω, пересечение и объединение двух или нескольких событий. При этом вычисление вероятностей, полученных в результате событий, можно осуществлять не только напрямую, изучая полученные множества элементарных исходов, но и по вероятностям событий, которые используются в подобных действиях.

Определение 1. Дополнением события A до всего пространства элементарных исходов называется такое событие $\bar{A}$, которое включает все элементарные исходы из Ω, не входящие в A.

Согласно определению: $A \cap \bar{A} = \emptyset$ и $A \cup \bar{A} = \Omega$. Ясно, что $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Определение 2. Пересечением событий A и B называется событие $C = A \cap B$, включающее те и только те элементарные исходы, которые одновременно принадлежат и событию A, и событию B.

Определение 3. Объединением событий A и B называется событие $C = A \cup B$, которое включает все исходы события A, все исходы события B, включая и те что одновременно принадлежат A и B.

Формула сложения вероятностей говорит, как вычислить вероятность объединения двух событий A и B, если известны вероятности этих событий и вероятность их пересечения:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если события A и B не пересекаются, то формула сложения вероятностей принимает более простой вид:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Независимые события

На практике представляет интерес вопрос о том, как может измениться вероятность события A, если уже известно, что произошло событие B. В общем виде ответ на этот вопрос дает понятие условной вероятности, которое будет введено в следующем параграфе. Здесь же мы введем понятие независимых событий, то есть таких, что наступление одного из них никак не влияет на вероятность наступления другого.

Определение 4. Два события A и B называются независимыми, если выполняется условие:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

В противном случае события A и B называются зависимыми.

Пример 1. Игральную кость бросили один раз. Событие A – выпало четное, событие B – выпало кратное 3. Являются ли события A и B независимыми?

Решение. Событие A включает 3 элементарных исхода: 2, 4, 6, а событие B – два: 3 и 6. Пересечение событий A и B содержит один исход 6. Отсюда получаем вероятности событий A, B и $P(A \cap B)$:

$$P(A) = 1/2; P(B) = 1/3; P(A \cap B) = 1/6.$$

Легко видеть, что $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, то есть события A и B являются независимыми.

Пример 2. Монету бросили 3 раза. Событие A – выпало ровно два герба, событие B – первый раз выпала решка. Являются ли события A и B независимыми?

Решение. Событие A включает 3 исхода: ГГР, ГРГ, РГГ. Событие B включает 4 исхода: РГГ, РГР, РРГ, РРР. Пересечение $A \cap B$ включает один исход РГГ. Отсюда получаем вероятности этих событий, помня, что всего в случайном эксперименте 8 равновероятных элементарных исходов:

$$P(A) = 3/8; P(B) = 4/8 = 1/2; P(A \cap B) = 1/8.$$

Ясно, что $P(A) \cdot P(B) = 3/16$ не равно $P(A \cap B) = 1/8$. То есть события A и B зависимы.

Пример 3. На курсе обучаются 100 студентов. Из них 20 получили на экзамене отличные оценки по математике и английскому языку. При этом всего было поставлено 25 отличных оценок по математике и 30 отличных оценок по английскому языку. Являются ли события A – отличная оценка по математике и B – отличная оценка по английскому языку независимыми?

Решение. $P(A) = 25/100 = 0.25$; $P(B) = 30/100 = 0.3$; $P(A \cap B) = 20/100 = 0.2$. Ясно, что события A и B зависимы, так как определение независимости не выполняется.

Перечислим некоторые элементарные свойства независимых событий.

1. Если события A и B не пересекаются и их вероятности не равны нулю, то события A и B зависимы.

2. Если события A и B – независимы, то независимы и любые пары событий: A и $\bar{B}$; $\bar{A}$ и B; $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Для независимых событий A и B формула сложения вероятностей имеет вид:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Пример 4. Бросаем 2 кости. Событие A=$\{$ на первой кости выпало больше трех$\}$, событие B=$\{$ на обеих костях в сумме более четырех$\}$. Являются ли события независимыми? Найти $P(A \cup B)$.

Решение. Общее число исходов в данном эксперименте составляет 36. Событие A состоит из 18 исходов ($(4; x)$, $(5; x)$, $(6; x)$), где x – число очков на второй кости, поэтому вероятность $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Событию B не удовлетворяют только исходы $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$, поэтому $P(B) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$. Чтобы проверить данные события на независимость, достаточно найти вероятность их пересечения. Так как из события A следует событие B, то есть $A \subset B$, поэтому $P(A \cap B) = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$, а значит, события не являются независимыми.

Чтобы найти вероятность $P(A \cup B)$, воспользуемся формулой $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) = P(B) = \frac{5}{6}$.

31. Бросаем 2 кости. Событие A=$\{$ на первой кости четное число $\}$, событие B=$\{$ на обеих костях в сумме больше 3$\}$.

Найти

а) $P(A \cap B)$;
б) $P(A \cup B)$;
в) $P(A)$;
г) $P(\overline{A})$;
д) $P(\overline{A \cap B})$.

32. Вероятность, что «Анжи» победит «МЮ», равна 0.3, а «Зенит» обыграет «Барселону» с вероятностью 0.4.

Найти вероятность, что

а) обе наши команды одержат победы;
б) только одна наша команда выиграет;
в) обе не выиграют;
г) из наших команд выиграет только «Зенит».

33. Правильную игральную кость бросают два раза. Событие A – выпал дубль. Событие B – в сумме выпало более 9. Найти вероятность объединения событий A и B.

34. Два признака A и B независимы. Вероятность встретить признак A у случайно выбранного респондента равна 0.4, а признак B – 0.9. Какова вероятность того, что у случайно выбранного респондента обнаружатся не более одного из этих признаков?

35. Вероятность того, что нужная студенту книга есть в первой библиотеке, равна 0.7, а во второй библиотеке – 0.5. Какова вероятность, что эта книга есть хотя бы в одной из этих библиотек?

36. Футбольные команды двух отечественных спортивных клубов A и B выигрывают матч у иностранной команды с вероятностями 0.4 и 0.7 соответственно. Какова вероятность того, что ровно одна из отечественных команд выиграет матч у иностранной команды, считая эти события независимыми?

37. Студент Виктор независимо пригласил двух незнакомых между собой девушек в кино. Вероятности того, что каждая из девушек пойдет с ним в кино, равны 0.6 и 0.4 соответственно. Какова вероятность того, что хотя бы одна девушка пойдет в кино с Виктором?

38. Один и тот же товар поставляют независимо два поставщика. Вероятность того, что первый поставщик поставит товар в срок 0.8. У второго поставщика вероятность поставки товара в срок равна 0.7. Какова вероятность того, что товар будет поставлен в срок ровно одним поставщиком?

39. Компания размещает рекламу своей продукции на телевидении и в прессе. Вероятность увидеть эту рекламу на телевидении равна 0.7, а вероятность увидеть ее в прессе – 0.4. Считается, что события: «увидеть рекламу на телевидении» и «увидеть рекламу в прессе» независимы. Какова вероятность того, что потребитель вообще увидит рекламу этой компании? Какова вероятность того, что потребитель увидит эту рекламу только на телевидении?

40. Студент сдает экзамен по двум никак не связанным между собой предметам. Вероятность, что он получит отличную оценку по первому предмету равна 0.3, а по второму – 0.5. Какова вероятность того, что он сдаст оба предмета на отлично? Какова вероятность того, что он получит только одну отличную оценку?

41. Вероятность опоздать на занятия у первого студента равна 0.2, а у второго – 0.6. Считая, что студенты действуют независимо, найти вероятность того, что оба не опоздают. Какова вероятность того, что опоздает хотя бы один из этих студентов?

4. Условная вероятность

Определение 1. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется величина

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B),$$

при том, что $P(B)$ не равно нулю.

Пример 1. В случайном эксперименте игральную кость бросают один раз. Событие A – выпало четное. Событие B – выпало больше 3. Найти условную вероятность $P(A|B)$.

Решение. Событие A включает 3 элементарных исхода: $A = \{2, 4, 6\}$, событие также включает 3 элементарных исхода $B = \{4, 5, 6\}$ и $P(B) = 1/2$. Тогда событие $A \cap B = \{4, 6\}$ и его вероятность равна $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$. По определению

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{(1/3)}{(1/2)} = 2/3.$$

Заметим, что условная вероятность события A не равна его безусловной вероятности $P(A) = 1/2$. Условная вероятность события A при условии B возросла, то есть дополнительная информация (событие B) позволила нам пересмотреть вероятность того, что произойдет событие A.

Если события A и B независимы, то $P(A|B) = P(A)$. Другими словами, информация о том, что произошло событие B, не меняет вероятность того, что произойдет A, если A и B независимы. Иногда это свойство используют в качестве определения независимости событий.

42. Правильную игральную кость бросили 2 раза. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков более 8 при условии, что в первом бросании выпало четное число очков.

43. Правильную игральную кость бросили 3 раза. Найти вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет «шестерка», если на всех костях выпали разные цифры.

44. Игральную кость бросили дважды. Событие A – на первой кости выпало четное. Событие B – в сумме выпала 8. Являются ли эти события независимыми? Найти условную вероятность события A при условии B.

45. Правильную монету бросили 3 раза. Событие A – во втором броске выпал герб. Событие B – выпало не менее двух гербов за три броска. Являются ли события A и B независимыми? Найти вероятность объединения событий A и B.

46. Игральную кость бросают два раза. Событие A – в сумме выпало больше 9, событие B – при втором броске выпало четное число очков. Найти $P(A \cup B)$. Найти $P(A|B)$. Являются ли события A и B независимыми и почему?

47. Игральную кость бросили трижды. Событие A – при первом и втором броске выпало строго больше 4. Событие B – в сумме на трех костях выпало строго больше 15. Являются ли эти события независимыми? Найти условную вероятность A при условии B.

48. Игральную кость бросают трижды. Событие A – в сумме на трех костях выпало больше 15. Событие B – при втором броске выпало четное число очков. Найти $P(A \cup B)$. Найти $P(A|B)$. Являются ли события A и B независимыми и почему?

49. Правильную игральную кость бросают 3 раза. Событие A – на костях выпало одинаковое число очков. Событие B – в сумме на трех костях выпало строго меньше пяти. Являются ли эти события независимыми? Найти условную вероятность $P(A|B)$.

50. Вероятность события A – дожить до 20 лет в некоторой стране равна 0.9, а вероятность события B – дожить до 60 лет равна 0.6. Найти условную вероятность дожить до 60 лет, если известно, что человек уже дожил до 20. Являются ли события A и B независимыми?

51. Студент Вася считает, что он с вероятностью 0.8 отдал учебник по теории вероятностей одному из своих друзей – Ване или Пете, а с вероятностью 0.2 – потерял. Он также считает, что если учебник не потерян, то шансы обнаружить его у Вани или Пети одинаковы. У Вани учебника не оказалось. Какова вероятность, что учебник у Пети?

5. Формулы полной вероятности и Байеса

5.1 Формула полной вероятности

На практике нам часто известны именно условные вероятности интересующего нас события A и по ним надо восстановить безусловную вероятность $P(A)$. Это можно сделать с помощью формулы полной вероятности. Для задания этой формулы нам понадобится дополнительное понятие – *полная система событий.*

Определение 1. Система подмножеств $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ пространства элементарных исходов называется полной системой событий, если выполнены два условия:

1. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$, то есть объединение всех подмножеств дает все пространство элементарных исходов.

2. Пересечение любых двух различных множеств из системы H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_n$ равно пустому множеству.

Множества H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_n$ часто именуют гипотезами. Отсюда и обозначение H (от английского $Hypothesis$).

Пример 1. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Определим событие H_1 как выпадение одинакового числа очков на каждой кости, а событие H_2 – выпадение разного число очков при первом и втором броске. Ясно, что гипотезы H_1, H_2 образуют полную систему событий.

Пример 2. В случайном эксперименте монету подбрасывают дважды. Пусть событие H_1 – выпала хотя бы одна решка, а событие H_2 – выпал хотя бы один орел. Образуют ли события H_1 и H_2 полную систему событий?

Решение. Событие H_1 включает три элементарных исхода $H_1 = \{\text{рр}, \text{ро}, \text{ор}\}$. Событие H_2 также включает три исхода $H_2 = \{\text{оо}, \text{ро}, \text{ор}\}$. Их объединение дает все пространство элементарных исходов Ω, но пересечение H_1, H_2 не равно пустому множеству, так как $H_1 \cap H_2 = \{\text{ро}, \text{ор}\}$. Следовательно, H_1, H_2 не являются полной системой событий.

Утверждение 1. Пусть $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ – полная система событий и все $P(H_i)$ не равны нулю. Тогда справедлива следующая формула:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n).$$

Ее называют *формулой полной вероятности*.

Пример 3. В операционном отделе банка работают 90% опытных сотрудников и 10% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна 0.01, а вероятность совершения подобной ошибки неопытным сотрудником в двадцать раз больше. Чему равна вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции в этом отделе?

Решение. Обозначим через H_1 – событие: очередная банковская операция попала на обслуживание к опытному сотруднику, а через H_2 – к неопытному. Обозначим через A – событие, когда совершается ошибка. По условию задачи нам заданы условные вероятности события A: $P(A|H_1) = 0.01$ у опытных и $P(A|H_2) = 0.2$ у неопытных сотрудников. Если все сотрудники отдела работают «на равных», то есть нет никаких предпочтений, кто будет выполнять очередную банковскую операцию, то с вероятностью $P(H_1) = 0.9$ она попадет к опытному сотруднику, и с вероятностью $P(H_2) = 0.1$ – попадет неопытному сотруднику. Согласно формуле полной вероятности: $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0.01 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.029$.

5.2 Формула Байеса

Пусть задана полная система событий (гипотез) H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_n$, разбивающая все пространство элементарных исходов Ω и их некоторые вероятности H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_n$. Эти исходные вероятности часто называют априорными, то есть назначенными до проведения случайного эксперимента. На практике часто существуют трудности с назначением этих вероятностей и ставится задача их уточнения после получения дополнительной информации в ходе проведения случайного эксперимента, то есть вычисления новых вероятностей гипотез $P(H_i|A)$, при условии того, что произошло некоторое событие A. Вероятности $P(H_i|A)$ называют апостериорными, то есть полученными в результате опыта.

Например, вероятность заключения выгодного контракта может сильно зависеть от экономической ситуации. При хорошей экономической ситуации подобная вероятность обычно заметно выше, чем при плохой. Однако вероятности наступления хорошей или плохой экономической ситуации далеко не всегда очевидны. Поэтому определяя подобные вероятности, есть готовность корректировать их по дополнительной информации, скажем по факту заключения выгодного контракта. Для решения подобных задач используется формула Байеса.

Утверждение 2. Если H_1, H_2, $H_3, \ldots, H_n$ полная система событий, а вероятность события A не равна нулю, то:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}.$$

Пример 4. Следователь по материалам предварительного следствия с вероятностью 0.8 подозревает некого человека в совершении преступления и требует его ареста. Известно, вероятность обнаружения алиби у совершившего преступление равна 0.1 (надо помнить, что преступники иногда специально организуют фальшивые алиби, но их фальшивость не всегда сразу очевидна). Вероятность обнаружить алиби у невиновного равна 0.95. В ходе дополнительного следствия было установлено, что у подозреваемого есть некое алиби. Как должна измениться вероятность того, что подозреваемый совершил преступление?

Решение. В задаче фигурируют две гипотезы: H_1 – подозреваемый совершил преступление и H_2 – подозреваемый невиновен. Вероятности этих гипотез следователь априорно оценивает как: $P(H_1) = 0.8$ и $P(H_2) = 0.2$. Обозначим через A – событие наличия у подозреваемого алиби. Тогда $P(A|H_1) = 0.1$, а $P(A|H_2) = 0.95$. В задаче требуется найти $P(H_1|A)$. По формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.1 \cdot 0.8 + 0.95 \cdot 0.2} = 8/27.$$

Заметим, что эта вероятность существенно снизилась по сравнению с априорной вероятностью $P(H_1)$.

52. В коробке лежат 30 яблок трех сортов: 15 яблок первого сорта и 6 яблок второго сорта. Вероятность того, что яблоко первого сорта окажется червивым, равна 0.2, второго сорта

– 0.5, а третьего сорта – 0.1. Найти вероятность того, что случайно выбранное яблоко окажется червивым.

53. Парламент состоит из 150 человек, разделенных на три партии: 75 человек от первой партии и 60 от второй. Вероятности того, что человек, состоящий в определенной партии, проголосует «ЗА» равны соответственно 0.3, 0.4 и 0.7. Найти вероятность того, что случайно выбранный человек проголосует «ЗА».

54. У школьника в рюкзаке было 10 тетрадей, из них 7 в клетку и 3 – в линейку. Одну из тетрадей он забыл в школе. После этого он наугад взял из рюкзака одну тетрадь. Какова вероятность, что эта тетрадь в клетку?

55. Вероятность продать недвижимость в течение двух месяцев при благоприятной экономической ситуации равна 0.7, а при неблагоприятной только 0.2. Эксперты считают, что вероятность благоприятной экономической ситуации в ближайшее время оценивается как 0.15. Какова вероятность продать недвижимость в течение двух ближайших месяцев? Если известно, что недвижимость была продана, то какова вероятность, что при этом была неблагоприятная экономическая ситуация?

56. В операционном отделении банка работают 90% опытных работников. Вероятность совершения ошибки опытным работником равна 0.02, а вероятность ошибки у неопытного работника 0.1. Вычислите вероятность совершения ошибки. Если ошибки не было, то какова вероятность, что работу выполнял неопытный сотрудник?

57. Некоторый кандидат баллотируется в областную думу по 3 избирательным округам, находящимся в разных населенных пунктах, в которых он имеет разную степень популярности. Вероятность того, что он будет избран в первом населенном пункте, равна 0.4, во втором – 0.2, в третьем –

0.8. Предполагая, что из всего числа участвовавших в голосовании избирателей в первом населенном пункте проживает 30%, во втором – 20% и в третьем – 50%, найдите вероятность того, что этот кандидат будет избран в областную думу.

58. Вероятность получить отличную оценку по математике на втором курсе при условии, что была отличная оценка по математике на первом курсе – 0.8. Вероятность получить отличную оценку по математике на втором курсе у остальных студентов – 0.15. Известно, что на первом курсе 10% студентов были отличниками по математике. Какова вероятность того, что случайно выбранный студент второго курса получит отличную оценку по математике?

59. Среди студентов 2 курса 20% имели отличную оценку по математике на первом курсе. При этом лишь 70% от числа студентов, имеющих отличную оценку по математике на первом курсе, получили отличную оценку по математике и на втором курсе. Кроме того, 25% от числа студентов, которые не были отличниками по математике на первом курсе, получили отлично по математике на втором курсе. Какой процент студентов второго курса имеют отличную оценку по математике за второй курс?

60. 75% жителей некоторого региона России проживает в городах, а остальные в сельской местности. Вероятность того, что горожанин проголосует за партию «Единая Россия» в этом регионе равна 0.4, аналогичная вероятность у сельского жителя равна 0.6. Какова вероятность того, что произвольно выбранный избиратель в этом регионе не проголосует за партию «Единая Россия»?

61. Из 80 студентов курса юноши составляют 25%. Вероятность того, что девушка получит отличную оценку на экзамене по теории вероятностей, равна 0.3, а у юноши аналогичная вероятность равна 0.2. Какова вероятность того, что произвольно выбранный студент из этого курса получит отличную оценку на экзамене?

62. На некотором предприятии вероятность производства бракованного изделия составляет 0.03. При контроле продукции этого предприятия совершаются ошибки: с вероятностью 0.05 бракованное изделие признается годным и с вероятностью 0.01 годное изделие признается бракованным. Случайно выбранное изделие было проконтролировано и признано бракованным. Какова вероятность, что это изделие годное?

63. В автомагазин поступают термостаты от 3-х производителей. Причем 20% всех поступивших термостатов изготовлено первым производителем, 45% – вторым, 35% – третьим. Вероятность брака у первого производителя равна 0.08, у второго – 0.02 и у третьего – 0.05. Наугад выбранный термостат оказался бракованным. Какова вероятность, что он изготовлен вторым производителем?

64. Из 60-ти студентов курса 15 отличников, 27 хорошистов и 18 середнячков. Вероятность того, что отличник оценивает положительно качество преподавания, равна 0.95. Для хорошиста эта вероятность равна 0.90 и для середнячка – 0.50. Наугад выбранный студент оценил качество преподавания неудовлетворительно. Какова вероятность, что этот студент – середнячок?

65. В первой урне лежат два белых шара и четыре черных, а во второй 3 белых и 2 черных. Из первой урны переложили во вторую один случайно выбранный шар. После этого из второй урны вытащили случайный шар. Какова вероятность того, что из первой урны переложили во вторую белый шар, если случайно вынутый шар из второй урны оказался черным?

66. В магазин поступает однотипный товар от трех поставщиков, при этом доля поставок первого поставщика составляет 60%, а второго – 30%. Вероятность брака у первого поставщика равна 0.05, а у второго 0.1, а у третьего 0.01. Покупатель приобрел исправный товар. Какова вероятность того, что он принадлежит второму поставщику?
67. Два аудитора проверяют 10 фирм (по 5 фирм каждый), у двух из которых имеются нарушения. Вероятность обнаружения нарушения первым аудитором равна 0.8, вторым – 0.9. Найти вероятность того, что оба нарушителя будут выявлены.
68. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что одного нарушителя обнаружил первый аудитор, а другого – второй.

6. Испытания Бернулли. Биномиальное распределение

Определение 1. Испытанием Бернулли называют случайный эксперимент с двумя возможными элементарными исходами: ω_1 и ω_2.

Один из этих исходов обычно условно именуют «успехом», а другой – «неудачей». Вероятность «успеха» обозначают через p, а вероятность «неудачи» – $q = 1 - p$.

Пример 1. Подбрасывание монеты можно считать испытанием Бернулли. Если монета симметричная, то вероятность выпадения орла и решки одинакова и равна $1/2$. Один из этих исходов, скажем, выпадение орла, можно условно назвать «успехом».

Пример 2. Если при подбрасывании игральной кости нас интересует лишь выпадение или невыпадение шестерки, то этот эксперимент тоже можно считать испытанием Бернулли. Если считать выпадение шестерки «успехом», то его вероятность будет равна $1/6$. «Неудачей» назовем выпадение любой другой грани. Вероятность «неудачи» будет равна $5/6$.

Определение 2. Последовательностью (или серией) из n испытаний Бернулли называют такой случайный эксперимент, в котором независимо повторяют испытание Бернулли n раз. При этом вероятность успеха p не меняется от опыта к опыту.

Число элементарных исходов в серии из n испытаний Бернулли равно 2^n. Вероятность любого элементарного исхода в серии из n испытаний Бернулли равна: $p^k q^{n-k}$, где k – число успехов в этой серии, а n-k – число неудач.

Пример 3. Монету подбросили 3 раза. Найти общее число элементарных исходов в этом эксперименте. Найти число элементарных исходов в событии «выпал ровно один орел». Найти вероятность события $A = \{$выпал ровно один орел$\}$.

Решение. Указанный эксперимент является серией из трех испытаний Бернулли. Общее число элементарных исходов в этом эксперименте равно $2^3 = 8$. Событию $A = \{$выпал ровно один орел$\}$ соответствуют три элементарных исхода «орр», «рор», «рро». Вероятность каждого из этих исходов равна $1/8$, следовательно $P(A) = 3/8$.

В серии из n испытаний Бернулли представляет интерес общее число успехов – S_n. Эта величина может принимать значения от 0 до n.

Определение 3. Распределение числа успехов в серии из n испытаний Бернулли называют биномиальным распределением. Вероятность того, что в серии из n испытаний Бернулли произойдет ровно k успехов, равна:

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Пример 4. В схеме из десяти испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании, равной 0.1, найти вероятность того, что произойдет хотя бы 2 успеха.

Решение. Для схемы Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.1$, числом испытаний $n = 10$ и $k = 0, 1, 2$ имеем

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$$

$$= 1 - C_{10}^{0}(0.9)^{0}(0.1)^{10} - C_{10}^{1}(0.9)^{1}(0.1)^{9} =$$

$$= 1 - (0.1)^{10} - 10 \cdot 0.9(0.1)^{9} = 1 - 9.1 \cdot (0.1)^{9} = 0.9999999909.$$

69. Вероятность того, что потребитель купит товар данной марки, равна 0.3. Какова вероятность того, что из 5 потребителей ровно три купят товар данной марки?

70. Случайная величина S – число успехов в 4 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p = 0.5$. Найти вероятность того, что $P(S < 2)$.

71. Вероятность того, что изделие удовлетворяет стандарту, равна 0.95. Найдите вероятность того, что из четырех изделий хотя бы одно не удовлетворяет стандарту.

72. В контрольной работе за второй курс студентам предложено 5 задач по разным темам в виде тестов. Для каждой задачи приведены 4 ответа, один из которых правильный. За правильный ответ на задачу начисляется один балл. Найти вероятность того, что студент, наугад выбирающий ответ в каждой задаче, наберет хотя бы 2 балла.

73. Правильную игральную кость бросают 4 раза. Найти вероятность того, что шестерка выпадет не более двух раз.

74. Хороший баскетболист забрасывает штрафной бросок с вероятностью 0.8. Какова вероятность того, что из четырех бросков он попадет не меньше двух раз?

75. Вероятность того, что футбольный голкипер отражает пенальти после матча, равна 0.1. Какова вероятность того, что из 5 пенальти он отразит не менее двух?

76. Тест состоит из 5 вопросов, в каждом вопросе по 4 варианта ответа. Найти вероятность угадать менее двух правильных ответов.

77. Игральная кость брошена 4 раза. Найти вероятность того, что выпало хотя бы 2 шестерки.

78. В тесте студентам предложено 5 задач. Для каждой задачи приведены 4 ответа, один из которых правильный. За правильный ответ на задачу начисляется один балл. Найти вероятность того, что студент, наугад выбирающий ответ в каждой задаче, наберет:

а) хотя бы 3 балла; б) ровно 5 баллов.

79. Вероятность того, что стрелок попадет в цель, равна 0.8. Найдите вероятность того, что из 5 выстрелов хотя бы один не попадет в цель.

80. Остап Бендер играет 8 партий против членов шахматного клуба. Вероятность выигрыша им каждой партии составляет 0,01. Найти вероятность того, что Остап выиграет

а) две партии; б) хотя бы одну партию.

81. Абитуриент подал заявления на 5 различных факультетов. Вероятность поступить одинаковая для каждого факультета и равна 0,8. Найти вероятность того, что абитуриент поступит

а) на все факультеты; б) ровно на 2 факультета.

82. Вероятность того, что изделие удовлетворяет стандарту, равна 0.95:

а) найдите вероятность того, что из 4-х изделий хотя бы одно не удовлетворяет стандарту;

б) найдите вероятность того, что из 4-х изделий ровно 3 изделия не удовлетворяют стандарту.

7. Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия

Определение 1. Случайная величина называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Пример 1. Игральную кость бросают один раз. Определим случайную величину X как выпавшее число очков. Ясно, что эта случайная величина дискретна. Она может принимать шесть значений.

Пример 2. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором стрелок стреляет в мишень до первого попадания. Определим случайную величину X как число выстрелов до первого попадания. Эта случайная величина может принимать значения 1 (если попал с первого раза), 2, 3, 4, ... Множество значений этой величины бесконечно, так как стрелок может вообще не попасть в мишень, но счетно.

Чтобы полностью описать дискретную случайную величину, надо указать множество ее возможных значений и вероятность каждого из этих значений.

Определение 2. Рядом распределения дискретной случайной величины X называется множество всех возможных значений случайной величины и их вероятностей.

Обычно ряд распределения дискретной случайной величины X записывают в виде таблицы. В первой строке таблицы указывают значения случайной величины, а во второй строке – их вероятности.

Случайная величина X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Вероятность $P(X = x_n)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Сумма вероятностей всех значений дискретной случайной величины равна 1

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Пример 3. В случайном эксперименте монету подбросили 2 раза. Определим случайную величину X как число выпавших орлов. Найти ряд распределения X.

Решение. Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2. Всего в этом эксперименте возможны 4 равновероятных исхода: $\{p, p\}$, $\{o, p\}$, $\{p, o\}$, $\{o, o\}$. Вероятность каждого исхода 1/4. Следовательно, ряд распределения X имеет вид:

X	0	1	2
$P(X = x_n)$	1/4	1/2	1/4

Определение 3. Математическим ожиданием дискретной случайной величины или ее средним значением называется

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Пример 4. Вычислить математическое ожидание числа выпавших орлов при двукратном бросании монеты.

Решение. Ряд распределения этой случайной величины задается таблицей

X	0	1	2
$P(X = x_n)$	1/4	1/2	1/4

Следовательно, $E(X) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1$.

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими **свойствами**:

1. $E(C) = C$, где C – константа;

2. $E(aX) = aE(X)$, где a – константа, а X – случайная величина;

3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

4. $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, если X и Y независимые случайные величины.

Определение 4. Дисперсией дискретной случайной величины называется

$$D(X) = E(X - E(X))^2.$$

Для расчетов дисперсии более удобна формула

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Пример 5. Вычислить дисперсию числа выпавших орлов при двукратном бросании монеты.

Решение.

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Математическое ожидание $E(X) = 1$ (см. пример 4). Для вычисления дисперсии надо уметь вычислять математическое ожидание величины X^2. Ее ряд распределения

X	0	1	4
$P(X = x_n)$	1/4	1/2	1/4

Следовательно, $E(X^2) = 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 = 1.5$. Отсюда

$$D(X) = 1.5 - 1^2 = 0.5.$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C – константа;

2. $D(aX) = a^2 D(X)$, где a – константа;

3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y – независимые случайные величины.

4. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$, если X и Y – произвольные случайные величины, а $Cov(X,Y)=E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))$ – ковариация двух случайных величин. Более подробно понятие ковариации будет обсуждаться в параграфе 9.

Пример 6. Лотерея предлагает один приз 1500 рублей, два приза 750 рублей и десять призов 100 рублей. Продали одну тысячу билетов по 7 рублей за билет. Записать закон распределения выигрыша. Определите вероятность выиграть более 100 рублей. Найдите математическое ожидание выигрыша, если приобретен один билет.

Решение. Пусть случайная величина X означает чистый выигрыш. Тогда с вероятностью $1/1000$ чистый выигрыш составит $X=1500-7=1493$, $X=750-7=743$ с вероятностью $2/1000$, с вероятностью $10/1000$ чистый выигрыш $X=100-7=93$, а с вероятностью $987/1000$ теряется 7 рублей, то есть $X=-7$. Таким образом, получаем закон распределения

X	1493	743	93	-7
P	$0,001$	$0,002$	$0,01$	$0,987$

Выиграть более ста рублей можно в двух случаях: купить билет с призом 1500 рублей или 750 рублей, поэтому

$$P(X>100)=P(X=1493)+P(X=743)=0.001+0.002=0.003.$$

Математическое ожидание составляет $EX=1500\cdot 0.001+750\cdot 0.002+93\cdot 0.01-7\cdot 0.987=-3$.

83. Дискретная случайная величина X задана следующим рядом распределения:

X	-1	0	2	4
p	0.1	0.1		0.3

Дополнить таблицу и вычислить математическое ожидание случайных величин: X и $X^2 + 1$.

84. Дискретная случайная величина X задана следующим рядом распределения:

X	-1	0	2	3
p	0.2		0.1	0.3

Дополнить таблицу и вычислить математическое ожидание случайных величин: X и $3X - 5$.

85. В коробке находятся десять \$1 банкнот, пять \$5 банкнот, три \$20 банкноты, одна \$50 банкнота и одна \$100 банкнота. Человек платит \$20, чтобы вытащить одну банкноту. Найдите математическое ожидание и дисперсию выигрыша. Является ли игра справедливой?

86. Монету бросают до тех пор, пока не выпадет решка. Пусть случайная величина X – число бросков. Построить ряд распределения X и найти математическое ожидание, если это возможно.

87. Лотерея предлагает один приз 1000 рублей, один приз 500 рублей и пять призов 100 рублей. Продали одну тысячу билетов по 3 рубля за билет. Определите вероятность выиграть более 200 рублей. Найдите математическое ожидание выигрыша, если приобретен один билет.

88. В лотерее продано 500 билетов по 10 рублей каждый. Из них один билет выигрывает 1000 рублей, 8 билетов по 250 рублей и 10 билетов по 100 рублей. Записать закон распределения выигрыша. Определите вероятность выиграть более 100 рублей. Найти математическое ожидание чистого выигрыша для человека, купившего один билет.

89. Случайная величина X – число баллов за тест, в котором 10 вопросов и на каждый вопрос приведено 5 вариантов ответа. За правильный ответ начисляется 1 очко, за неправильный – 0. Предполагаем, что ответы выбираем наугад. Построить закон распределения X и найти математическое ожидание и дисперсию, если это возможно.

8. Распределение Пуассона

Во многих практических задачах теории массового обслуживания, страхования, надежности для описания случайного числа наступающих событий за некоторый промежуток времени хорошо подходит распределение Пуассона. В качестве таких событий могут выступать заявки на обслуживание, страховые случаи, отказы оборудования и т.п.

Определение. Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если она может принимать значения 0, 1, 2, 3, $\ldots$, k, $\ldots$, а вероятность конкретного значения задается формулой

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Математическое ожидание X: $E(X)=\lambda$. Другими словами, λ – это среднее число событий в единицу времени. Дисперсия X: $D(X)=\lambda$.

Пример 1. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Найти вероятность того, что $X \geq 2$.

Решение.

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=$$

$$=1-\frac{1^0}{0!}e^{-1}-\frac{1^1}{1!}e^{-1}=1-2e^{-1}\approx 0.24.$$

Пример 2. В офис некоторой компании в среднем поступает 90 звонков в час. Найти вероятность того, что в течение двух минут в офис поступит ровно 1 звонок.

Решение. Если в час в среднем поступает 90 звонков, то в течение 2 минут в среднем поступает $90 : 30 = 3$ звонка. То есть для интервала времени 2 минуты $\lambda = 3$. Тогда

$$P(X = 1) = \frac{3^1}{1!}e^{-3} = \frac{3}{e^3} \approx 0.152.$$

Утверждение. Пусть независимые случайные величины X и Y имеют распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Тогда случайная величина $X+Y$ также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1+\lambda_2$.

Пример 3. В лавку по ремонту обуви в среднем заходят 3 человека в час. Считая, что число посетителей распределено по закону Пуассона, найдите вероятность того, что в течение двадцати минут зайдут не менее трех человек.

Решение. Так как число посетителей X лавки в течение двадцати минут распределено по закону Пуассона со средним $\lambda = 1$, то

$$P(X \geq 3) = 1-P(X < 3) = 1-P(X = 0)-P(X = 1)-P(X = 2) =$$

$$= 1 - \frac{1^0}{0!}e^{-1} - \frac{1^1}{1!}e^{-1} - \frac{1^2}{2!}e^{-1} = 1 - \frac{5}{2e}.$$

90. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром 2. Найдите $P(X < 3)$.

91. Начинающий водитель в среднем совершает одну ошибку за 5 минут. Предполагая, что число совершенных таким водителем ошибок подчиняется закону Пуассона, найдите вероятность того, что водитель совершит за 5 минут не менее двух ошибок.

92. Число телефонных звонков на телефоны некоторой компании описывается распределением Пуассона. Известно,что в течение часа в среднем фиксируется 24 звонка. Какова вероятность того, что в течение пяти минут будет зафиксировано более 3 звонков?

93. За последние 2 года в России было зафиксировано 12 крупных авиационных аварий на пассажирских авиалиниях. Какова вероятность того, что в течение четырех ближайших месяцев произойдет не менее трех аварий?
94. Среднее число поступающих заказов в компанию по доставке пиццы равно 240 в течение 2-х часов. Какова вероятность того, что в течение минуты поступит от 2 до 3 заказов?
95. На некотором перекрестке дороги в среднем происходит 2 нарушения правил движения в час. Какова вероятность того, что за два часа будет зафиксировано менее 3 нарушений?
96. На заданном участке шоссе с интенсивным движением в дневное время в среднем происходит 1 авария за 2 часа. Считая, что число аварий имеет распределение Пуассона, найдите вероятность того, что в течение 8 дневных часов на этом участке произойдет более 2 аварий.
97. На платную парковку в среднем заезжает 12 автомобилей в час. Считая, что число приезжающих машин распределено по закону Пуассона, найдите вероятность того, что в течение 5 минут на парковку заедет не менее трех машин.

9. Совместное распределение двух дискретных величин. Ковариация и корреляция двух случайных величин

Определение 1. Говорят, что задано совместное распределение двух дискретных случайных величин, измеряемых в одном и том же случайном эксперименте, если для каждой пары значений этих величин (x_i, y_j) задана вероятность $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$, где x_i, $i = 1, \ldots, n$ – множество возможных значений X, а y_j , $j = 1, \ldots, m$ – множество всех возможных значений Y.

Совместное распределение двух дискретных случайных величин удобно записывать в виде таблицы:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

Сумма всех значений p_{ij}: $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Пример 1. Игральную кость бросают два раза. Определим случайную величину X как число выпавших шестерок. Случайная величина Y будет принимать значение 0, если хотя бы на одной кости выпадет нечетное, и 1, если на обеих костях выпадет четное. Выписать таблицу совместного распределения случайных величин X и Y.

Решение. Случайная величина X может принимать три значения – 0, 1, 2, а случайная величина Y – два значения 0, 1. Следовательно, таблица совместного распределения будет иметь вид:

$X \setminus Y$	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}
2	p_{31}	p_{32}

Осталось вычислить все вероятности $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Для этого множество всех элементарных исходов этого эксперимента надо разбить на части, соответствующие всем возможным парам значений (x_i, y_j).

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Легко видеть, что $p_{32} = P(X = 2, Y = 1) = 1/36$, так как ей соответствует только элементарный исход ω_e= {6, 6}.

$p_{31} = P(X = 2, Y = 0) = 0$.

$p_{22} = P(X = 1, Y = 1) = 4/36 = 1/8$, так как этому событию соответствуют 4 элементарных исхода: {6,2}, {6,4}, {2,6}, {4,6}.

$p_{21} = P(X = 1, Y = 0) = 6/36 = 1/6$, так как этому событию соответствуют 6 элементарных исходов: {6,1}, {6,3}, {2,5}, {1,6}, {3,6}, {5,6}.

$p_{12} = P(X = 0, Y = 1) = 4/36 = 1/8$, так как этому событию соответствуют исходы: {2,2}, {2,4}, {4,2}, {4,4}.

$p_{11} = P(X = 0, Y = 0)$ может быть вычислено как $1 - p_{12} - p_{21} - p_{22} - p_{31} - p_{32} = 1 - 4/36 - 6/36 - 4/36 - 0 - 1/36 = 21/36$. Таким образом, таблица совместного распределения X и Y в этом эксперименте имеет вид:

$X \setminus Y$	0	1
0	21/36	4/36
1	6/36	4/36
2	0	1/36

Из таблицы совместного распределения двух дискретных случайных величин можно получить распределение каждой из случайных величин X и Y. Такие распределения называются маргинальными или частными. Для того чтобы получить маргинальное распределение X, то есть найти вероятность $P(X = x_i)$, надо просуммировать вероятности в i-й строке таблицы совместного распределения:

$$P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{im}.$$

Для того чтобы получить маргинальное распределение Y, то есть найти вероятности $P(Y = y_i)$, надо просуммировать вероятности в j-м столбце таблицы совместного распределения:

$$P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{nj}.$$

Пример 2. Рассмотрим совместное распределение X и Y из предыдущего примера. Найти маргинальные распределения случайных величин X и Y.

Решение. Маргинальное распределение X задается таблицей:

X	0	1	2
p	25/36	10/36	1/36

Маргинальное распределение Y задается таблицей

Y	0	1
p	27/36	9/36

Утверждение. Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых i и j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$. Эту формулу можно использовать для проверки независимости двух дискретных случайных величин.

Пример 3. Рассмотрим случайные величины X и Y, определенные в примере 1. Являются ли эти случайные величины независимыми?

Решение. В примере 1 было получено совместное распределение X и Y, в частности: $p_{11} = P(X = 0, Y = 0) = 21/36$.

В примере 2 были получены маргинальные распределения X и Y, в частности: $P(X = 0) = 25/36$ и $P(Y = 0) = 27/36$.

Проверим выполнение условий независимости: $P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$

$$21/36 \neq 25/36 \cdot 27/36.$$

Следовательно, X и Y зависят друг от друга. В этом примере нам повезло, так как проверка ограничилась лишь исследованием равенства для $i = 1$ и $j = 1$. Так бывает не всегда. Если бы условие независимости выполнялось бы для p_{11}, то нам пришлось бы проверять это условие для всех остальных p_{ij}.

9.1 Ковариация

В тех случаях, когда случайные величины X и Y зависимы, представляет интерес сила их взаимосвязи. Для этого используется понятие ковариации (то есть совместной вариации) двух случайных величин.

Определение 2. Ковариацией двух случайных величин X и Y называется $Cov(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$.

На практике для вычисления $Cov(X, Y)$ чаще используется формула $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$.

Пример 4. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано таблицей:

$X \setminus Y$	0	1
0	0.1	0.3
1	0.4	

Найти $Cov(X, Y)$.

Решение. Заполним до конца таблицу совместного распределения $P(X = 1, Y = 1) = 1 - 0.1 - 0.3 - 0.4 = 0.2$.

Вычислим маргинальные распределения X и Y:

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	0	1
p	0.5	0.5

При этом $E(X) = 0.6$, а $E(Y) = 0.5$. Найдем распределение случайной величины $X \cdot Y$. Эта величина может принимать только два значения 0 и 1. $P(X \cdot Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) = 0.2$. Следовательно, $P(X \cdot Y = 0) = 1 - 0.2 = 0.8$ и распределение $X \cdot Y$ задается таблицей:

$X \cdot Y$	0	1
p	0.8	0.2

$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.2 - 0.6 \cdot 0.5 = 0.2 - 0.3 = -0.1$.

Свойства ковариации:

1. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$Cov(X, Y) = 0;$$

2. Пусть $X_1 = a_1 + b_1 x$ и $Y_1 = a_2 + b_2 Y$, тогда $Cov(X_1, Y_1) = b_1 b_2 Cov(X, Y)$.

Другими словами, величина ковариации между двумя случайными величинами зависит от их единиц измерения. Это очень неудобно для интерпретации значения ковариации как меры связи двух случайных величин.

9.2 Корреляция

Определение 3. Корреляцией двух случайных величин называется:

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

Свойства корреляции:

1. Если X и Y независимы, то $Cor(X,Y) = 0$.

2. $|Cor(X,Y)| \leq 1$.

3. Если $Cor(X,Y) = 1$, то $Y = a + bX$, где $b > 0$.

Если $Cor(X,Y) = -1$, то $Y = a + bX$, где $b < 0$.

4. Пусть $X_1 = a_1 + b_1 X$ и $Y_1 = a_2 + b_2 Y$, тогда $Cor(X_1, Y_1) = Cor(X,Y)$, если $b_1 \cdot b_2 > 0$ и $Cor(X_1, Y_1) = -Cor(X,Y)$, если $b_1 \cdot b_2 < 0$.

Пример 5. Для данных примера 4 вычислите $Cor(X,Y)$.

Решение. В примере 4 найдено, что $Cov(X,Y) = -0.1$, а также найдены маргинальные распределения X и Y. Следовательно

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$

Отсюда: $Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{-0.1}{\sqrt{0.24}\sqrt{0.25}} \approx -0.4$.

Пример 6. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \setminus Y$	0	1	3
0	0.15	0.05	0.3
-1	0	0.15	0.1
-2	0.15	0	0.1

Найдите

а) закон распределения случайной величины X и закон распределения случайной величины Y;

б) EX, EY, DX, DY, $cov(X,Y)$, а также математическое ожидание и дисперсию случайной величины $V = 6X - 4Y + 3$.

в) условное математическое ожидание $E(X|Y = 0)$.

Решение. Для того чтобы найти законы распределений X и Y, нужно просуммировать вероятности по строкам и столбцам соответственно:

X	0	-1	-2
P	$0,5$	$0,25$	$0,25$

Y	0	1	3
P	$0,3$	$0,2$	$0,5$

Зная законы распределений вычисляем математические ожидания, дисперсии и ковариацию:

$$EX = 0 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.25 - 2 \cdot 0.25 = -0.75, \quad EY = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.5 = 1.7,$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = 0^2 \cdot 0.5 + (-1)^2 \cdot 0.25 + (-2)^2 \cdot 0.25 - (-0.75)^2 =$$
$$= 1.25 - 0.5625 = 0.6875,$$

$$DY = E(Y^2) - (EY)^2 = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.5 - (1.7)^2 =$$
$$= 4.7 - 2.89 = 1.81,$$

$$cov(X;Y) = E(XY) - EX \cdot EY =$$
$$= -1 \cdot 1 \cdot 0.15 - 1 \cdot 3 \cdot 0.1 - 2 \cdot 3 \cdot 0.1 + 0.75 \cdot 1.7 = 0.225.$$

Математическое ожидание и дисперсию случайной величины V проще вычислить по свойствам:

$$EV = E(6X - 4Y + 3) = 6EX - 4EY + 3 =$$
$$= -6 \cdot 0.75 - 4 \cdot 1.7 + 3 = -8.3,$$
$$DV = D(6X - 4Y + 3) = 36DX + 16DY + 2 \cdot 6 \cdot (-4) cov(X;Y) =$$
$$= 36 \cdot 0.6875 + 16 \cdot 1.81 - 48 \cdot 0.225 = 53.71 - 10.8 = 42.91.$$

Составим условное распределение X от Y, пользуясь формулой $P(X|Y=0) = \frac{P(X \cap Y=0)}{P(Y=0)}$:

$$P(X=0|Y=0)=\frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{0.15}{0.3}=1/2,$$

$$P(X=-1|Y=0)=\frac{P(X=-1,Y=0)}{P(Y=0)}=0,$$

$$P(X=-2|Y=0)=\frac{P(X=-2,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{0.15}{0.3}=1/2,$$

откуда

$$E(X|Y=0)=0\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 0-2\cdot\frac{1}{2}=-1.$$

98. В случайном эксперименте независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределений:

X	0	1
p	0.1	0.9

Y	-1	0	1
p	0.2	0.3	0.5

Построить таблицу их совместного распределения.

99. В случайном эксперименте бросают монету и игральную кость. Пусть X – число выпавших гербов на монете, а Y – число выпавших шестерок на кости. Составить таблицу совместного распределения этих случайных величин.

100. В случайном эксперименте бросают две монеты и две игральные кости. Пусть X – число выпавших гербов, а Y – число выпавших пятерок. Составить таблицу совместного распределения X и Y.

101. Страховая компания заключает договор страхования, предусматривающий выплату 50 000 рублей в случае мелкого ущерба и 100 000 рублей в случае крупного ущерба. Страховой взнос по договору составляет 4 000. Вероятность мелкого ущерба 0.05, а крупного – 0.01. Составить таблицу совместного распределения выплат по двум таким независимым договорам.

102. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей

$X \setminus Y$	0	1
0	0.2	0.3
1	0.2	0.3

Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Выписать ряд распределений случайной величины $X \cdot Y$.

103. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей

$X \setminus Y$	-1	0	2
-1	0.08	0.12	0.2
1	0.12	0.18	

Выписать маргинальные распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Выписать ряд распределений случайной величины $X \cdot Y$.

104. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей

$X \setminus Y$	1	2	3
0		0	0.1
2	0.4	0.1	0.3

Выписать маргинальные распределения случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Выписать ряд распределений случайных величин $X \cdot Y$, $X + Y$.

105. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей

$X \setminus Y$	-1	0	2
-2	0.1	0.3	0.4
1	0.2	0	

Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Выписать ряд распределений случайных величин $X \cdot Y$. Найти $E(X \cdot Y)$.

106. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \setminus Y$	-2	-1	0
0	2/16	1/16	1/16
1	1/16	3/16	2/16
2	5/16		1/16

Найдите:

а) закон распределения случайной величины X (ее значения в вертикальном столбце);

б) EX, DX, $E(X^2 - 3)$;

в) $cov(X, Y)$.

107. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-0.5	3/25	2/25	0
0	7/25	3/25	3/25
0.5	0		2/25

Найдите:

а) закон распределения случайной величины Y (ее значения в первой строке таблицы);

б) $E(Y)$, $D(Y)$, $E(Y^3 - 4)$;

в) ковариацию $cov(X, Y)$ и корреляцию $cor(X, Y)$.

108. Найдите дисперсию случайной величины $V = 3X - 2Y$, если совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей задачи 107.

109. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей (значения случайной величины X

приведены в первом столбце):

$X \setminus Y$	-2	0	1
0	0.1	0.1	0.2
1	0.3		0.2

Найдите:

а) закон распределения случайной величины XY;

б) $E(Y)$, $D(Y)$, $cov(2X - 3Y + 5, Y - 3X + 2)$;

в) ковариационную матрицу Σ.

110. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \setminus Y$	0	-1	3
0	0.2	0	0.1
1	0.05	0.1	0
2	0.3	0	0.25

Найдите **а)** закон распределения случайной величины X и закон распределения случайной величины Y; **б)** EX, EY, DX, DY, $cov(X, Y)$, а также математическое ожидание и дисперсию случайной величины $V = 2X - 5Y - 1$.

111. Корреляция двух случайных величин является мерой (укажите в ответе номера верных утверждений):

А) Причинно-следственной связи между двумя случайными величинами.

Б) Мерой произвольной функциональной связи между двумя случайными величинами.

В) Мерой линейной взаимосвязи между двумя случайными величинами.

Г) Мерой монотонной взаимосвязи между двумя случайными величинами.

112. Коэффициент корреляции может принимать следующие значения (укажите в ответе номера верных утверждений):

А) любое значение на числовой прямой;

Б) только неотрицательные значения на числовой прямой;

В) значения от минус единицы до плюс единицы;

Г) значения по модулю, не превосходящие единицы.

113. Для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен (укажите в ответе номера верных утверждений):

А) 0;

Б) 1;

В) 0.5;

Г) может принимать различные значения в зависимости от распределений этих случайных величин.

114. Известно, что коэффициент корреляции двух случайных величин X и Y равен 1. Укажите в ответе номера верных утверждений:

А) X и Y независимые случайные величины;

Б) $Y = 2 + 3X$;

В) $Y = 5 - 2X$;

Г) $Y = 6 + 7X + 3X^2$.

115. Известно, что коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y равен половине. Вычислите значение коэффициента корреляции между случайными величинами $(3X - 1)$ и $(4 - Y)$.

116. Известно, что коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y равен минус 0.3. Вычислите значение коэффициента корреляции между случайными величинами $(5X - 2)$ и $(Y - 2)$.

10. Непрерывные случайные величины

Наряду с дискретными случайными величинами важную роль в практических задачах играют непрерывные случайные величины. Совокупность возможных значений таких величин образует непрерывное множество. Таким множеством может быть отрезок числовой прямой, числовой луч, вся числовая прямая. Задание распределения вероятностей непрерывных случайных величин принципиально отличается от дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин нельзя задать их распределение, просто указывая вероятности каждого отдельного значения. Часто распределение непрерывных случайных величин можно задать с помощью плотности вероятности.

Определение 1. Плотностью вероятности называют функцию $\rho(x)$, заданную для всех x на числовой прямой, такую что:

1. $\rho(x) \geq 0$ для всех x.
2. Площадь под функцией плотности равна 1, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1.$$

Если непрерывная случайная величина принимает свои значения только на части числовой прямой Ω, то полагают, что $\rho(x) = 0$ для x, не принадлежащих Ω.

Пример 1. Пусть

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1; 1] \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

Тогда $\rho(x)$ является функцией плотности распределения.

Доказательство. Очевидно, что $\rho(x) \geq 0$ на всей числовой прямой. Покажем, что площадь под кривой плотности равна 1.

На отрезке $[-1, 1]$ график $\rho(x)$ и ось абсцисс образуют равнобедренный треугольник с основанием 2 и высотой 1.

Его площадь равна 1. Следовательно, условие 2 из определения выполнено.

Функция плотности вероятности позволяет находить вероятность того, что непрерывная случайная величина попадет в некоторую область, например отрезок $[a, b]$:

$$P(X \in [a, b]) = \int\limits_a^b \rho(x)dx.$$

Другой способ поиска вероятности того, что непрерывная случайная величина примет значения на некотором отрезке, связан с заданием функции распределения $F(x)$ случайной величины.

Определение 2. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшее или равное x, то есть $F(x) = P(X \leq x)$.

Если случайная величина имеет плотность $\rho(x)$, то ее функция распределения задается в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^x \rho(t)dt.$$

Пример 2. Случайная величина X принимает значения на отрезке $[0; 1]$ и ее функция плотности вероятности на этом отрезке равна $\rho(x) = 2x$ (на всей остальной части числовой прямой $\rho(x) = 0$). Найти $F(x)$.

Решение. По определению для $x \in [0; 1]$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^x \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^0 0dt + \int\limits_0^x 2tdt = t^2|_0^x = x^2.$$

Для $x < 0$ $F(x) = 0$, а для $x > 1$ $F(x) = 1$, т.к. для $x > 1$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} 2tdt + \int\limits_{1}^{x} 0dt = t^2|_0^1 = 1.$$

Вероятность того, что $X \in [a; b]$, может быть записана с помощью $F(x)$ в виде:

$$P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{-\infty}^{b} \rho(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{a} \rho(x)dx = F(b) - F(a).$$

Свойства функции распределения:

1. $F(x) \geq 0$ для любого x.
2. Для $x_1 < x_2$ $F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.

С помощью функции плотности распределения вероятностей можно определить математическое ожидание $E(X)$ непрерывной случайной величины X и ее дисперсию $D(X)$.

Определение 3. Математическое ожидание $E(X)$ непрерывной случайной величины X равно:

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx.$$

Определение 4. Дисперсия $D(X)$ непрерывной случайной величины X равна:

$$D(X) = E(X - EX)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\rho(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx\right)^2.$$

Пример 4. Функция плотности вероятности случайной величины X имеет следующий вид

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ a \ln x, & x \in (1; e] \\ 0, & x > e. \end{cases}$$

а) Определите коэффициент a и вычислите математическое ожидание;

б) найдите функцию распределения $F(x)$;

в) определите вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(-2; \sqrt{e})$.

Решение. По свойству функции плотности вероятности имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = \int\limits_{1}^{e} a \ln x dx =$$

$$= a(x \ln x|_1^e - \int\limits_{1}^{e} x\frac{1}{x}dx) = a(e - e + 1) = a = 1.$$

Здесь мы воспользовались методом интегрирования по частям. Вычислим математическое ожидание

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx = \int\limits_{1}^{e} x \ln x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x|_1^e - \int\limits_{1}^{e} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Функция распределения находится по формуле:

$$F(x) = P(X \leq x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ \int\limits_{1}^{x} \ln t dt = x \ln x - x + 1, & x \in (1; e] \\ 1, & x > e. \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал $(-2; \sqrt{e})$ вычисляется подстановкой граничных точек в функцию распределения

$$F(\sqrt{e}) - F(-2) = \sqrt{e}\ln\sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 - 0 = -\frac{1}{2}\sqrt{e} + 1.$$

117. Плотность распределения случайной величины имеет следующий вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -3 \\ 10ax^4, & x \in (-3; 2] \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Определить коэффициент a. Определить вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(-2; 3)$. Написать функцию распределения.

118. Непрерывная случайная величина может принимать значения только на отрезке $[0; +\infty)$. Может ли функция $p(x) = e^{-ax}$ быть плотностью распределения вероятностей этой случайной величины?

119. Плотность непрерывного распределения вероятностей на отрезке $[1; 3]$ задана функцией $p(x) = -ax$. В остальных точках числовой прямой плотность равна нулю. Найти константу a. Найти вероятность попасть на отрезок $[0; 2]$.

120. Плотность непрерывного распределения вероятностей на отрезке $[-1; 3]$ задана функцией $p(x) = ax^2$. В остальных точках числовой прямой плотность равна нулю. Найти константу a. Найти вероятность попасть на отрезок $[0; 4]$.

121. Плотность непрерывного распределения вероятностей на отрезке $[1; 3]$ задана функцией $p(x) = 1 - ax$. В остальных точках числовой прямой плотность равна нулю. Найти константу a. Найти вероятность попасть на отрезок $[0; 2]$.

122. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1; 1]$. Найдите $E(X)$, $D(X)$, $med(X)$.

123. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[2; 6]$. Найти $E(2X - 1)$, $D(2X - 1)$ и

$med(X)$.

124. Случайная величина X принимает свои значения на отрезке $[2;4]$ и задана своей плотностью распределения $p(x) = ax$ на отрезке $[2;4]$. Найти константу a, $E(X)$ и $D(X)$.

125. Непрерывная случайная величина X задана на отрезке $[0;2]$ с плотностью распределения $p(x) = ax^3$. Найти константу a. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

126. Непрерывная случайная величина X задана на отрезке $[-2;2]$ с плотностью распределения $p(x) = ax^2$. Найти константу a. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

127. Случайная величина X принимает свои значения на отрезке $[0;2]$ и имеет плотность распределения $p(x) = ax^2$. Найти функцию распределения этой случайной величины. Для $p = 0.2$ найти квантиль x_p.

128. Случайная величина X принимает значения на отрезке $[-1;1]$ с плотностью вероятности $p(x) = 1 - |x|$. Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины и ее верхнюю и нижнюю квартили.

129. Плотность распределения случайной величины имеет следующий вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ 16a^2x + 3a, & x \in (-1;3] \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Определить коэффициент a. Найти математическое ожидание. Определить вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(-2;0)$.

130. Плотность распределения случайной величины имеет следующий вид

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \leqslant -2 \\ b^2 x + 0,9b, & x \in (-2; 3] \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Определить коэффициенты a и b. Найти математическое ожидание и дисперсию. Определить вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(-3; 1)$.

131. Плотность распределения случайной величины имеет следующий вид

$$\rho(x) = \begin{cases} C(1 - x^2), & x \in [-1; 1] \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

а) Определить коэффициент C, математическое ожидание EX и дисперсию DX. Вычислить вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(1/4; 3/4)$.

б) Найти функцию распределения.

132. Плотность распределения случайной величины имеет следующий вид

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-a; a] \\ 0, & x \neq (-a; a]. \end{cases}$$

а) Определить коэффициент a. Определить вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(0; 1)$.

б) Найти функцию распределения.

133. Плотность распределения случайной величины имеет следующий вид

$$\rho(x) = \begin{cases} C(5 - x), & x \in [-2; 1] \\ 0, & x \notin [-2; 1]. \end{cases}$$

Определить коэффициент C, математическое ожидание и дисперсию. Вычислить вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(0; 3)$.

134. Построить график плотности и график функции распределения для равномерно распределенной на отрезке $[1; 2]$ случайной величины. Вычислить медиану и межквартильный размах.

135. Автобус некоторого маршрута идет строго по расписанию с интервалом в 8 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее пяти минут.

136. Найти функцию распределения, плотность, математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[2, 4]$.

137. Найти функцию распределения, плотность, математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[1, 5]$.

11. Нормальное распределение

Нормальное распределение вероятностей играет ключевую роль в большинстве задач статистического анализа данных: в экономических, социальных, естественных и технических науках.

Определение 1. Непрерывная случайная величина X имеет нормальное (гауссовское) распределение вероятностей на всей числовой прямой, если ее плотность распределения для всех $x \in \mathbb{R}$ выражается формулой:

$$\rho(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$ и a – произвольные числа.

Величины a и σ^2 называются параметрами нормального распределения.

Запись $X \sim N(a, \sigma^2)$ означает, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2. Смысл параметров a и σ^2 вытекает из следующих соотношений: $E(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

Определение 2. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$, т.е. $N(0, 1)$ – называют стандартным нормальным распределением.

Для обозначения стандартной нормальной случайной величины используют символ Z: $Z \sim N(0, 1)$. Плотность стандартного нормального распределения задается формулой:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Случайная величина $X \sim N(a, \sigma^2)$ может быть выражена через стандартную нормальную случайную величину $Z \sim N(0, 1)$:

$$X = a + \sigma Z.$$

Функцию распределения стандартной нормальной случайной величины $Z \sim N(0, 1)$ обозначают $\Phi(x)$. По определению она есть:

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$

Для функции $\Phi(x)$ составлены подробные таблицы, позволяющие находить вероятность того, что случайная величина Z попадает в некоторый отрезок $[a; b]$:

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Функция распределения $F(x)$ произвольной нормальной случайной величины $X \sim N(a, \sigma^2)$ выражается через $\Phi(x)$:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Пример 1. Среднее время для решения задачи по теории вероятностей для студентов второго курса составляет 20 минут с дисперсией 4. Найти вероятность, что студенту потребуется от 16 до 24 минут для решения задачи, считая, что это время имеет нормальное распределение.

Решение. Пусть X – время для решения одной задачи, тогда $X \sim N(\mu = 20; \sigma^2 = 4)$. Находим вероятность

$$P(16 < X < 24) = P\left(\frac{16-20}{2} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{24-20}{2}\right) =$$
$$= P(-2 < Z < 2),$$

где Z – стандартная нормальная величина. Окончательно,

$$P(16 < X < 24) = P(-2 < Z < 2) =$$
$$= 2\Phi(2) - 1 \approx 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545.$$

Теорема. Сумма двух независимых нормальных случайных величин $X \sim N(a_1, \sigma_1^2)$ и $X \sim N(a_2, \sigma_2^2)$ является нормальной случайной величиной:

$$X_1 + X_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Пример 2. Случайные величины Z_1 и Z_2 имеют стандартные нормальные распределения и независимы. Случайная величина $X = 6Z_1 + 8Z_2 + 3$. Найти математическое ожидание X, дисперсию X, вероятность того, что $X < 14$. Найти квантиль уровня 0,8.

Решение. Пользуясь тем, что для стандартных нормальных величин математическое ожидание равно нулю, а дисперсия – единице, находим:

$$E(X) = E(6Z_1 + 8Z_2 + 3) = 6EZ_1 + 8EZ_2 + 3 = 3,$$

$$D(X) = 6^2 D(Z_1) + 8^2 DZ_2 = 36 + 64 = 100.$$

Так как линейная комбинация независимых нормальных случайных величин также является нормальной случайной величиной, то $X \sim N(\mu = 3; \sigma^2 = 100)$. Таким образом, $X = 3 + 10Z$, где $Z \sim N(0; 1)$. Далее,

$$P(X < 14) = P(3+10Z < 14) = P\left(Z < 1.1\right) = \Phi(1.1) \approx 0.8643.$$

Квантиль $z_{0.8}$ стандартного нормального распределения равна
$\Phi^{-1}(0.8) \approx 0.8416$, тогда искомая квантиль равна

$$x_{0.8} = 3 + 10 z_{0.8} \approx 3 + 10 \cdot 0.8416 = 11.416.$$

138. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение. Найдите вероятность $P(-1.55 < Z < -0.65)$.

139. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение. Найдите вероятность

а) $P(-1.75 < Z < 0.25)$;

б) $P(Z > 2.75)$;

в) $P(-3 < Z < -0.7)$;

г) $P(Z < -1.5)$.

140. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним 46 и дисперсией 36. Найти вероятность $P(37 < X < 49)$ и квантиль x_p уровня $p = 0.05$.

141. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 2$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$, т.е. $X \sim N(2, 4)$. Найдите:

а) $P(X > 5)$;

б) квантиль уровня 0,1.

142. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 7$ и дисперсией $\sigma^2 = 25$, т.е. $X \sim N(7, 25)$. Найдите:

а) $P(X > 9)$;

б) квантиль уровня 0,05.

143. Студенты тратят на выполнение домашнего задания по математике в среднем 1 час в неделю со стандартным отклонением 15 минут. Найти вероятность, что случайно выбранный студент делает домашнее задание по математике от 30 до 75 минут в день. Предполагается, что время выполнения домашнего задания подчиняется нормальному закону.

144. Москвичи проводят в метро в среднем 40 минут в день с дисперсией 16. Найти вероятность, что москвич проводит в метро от 36 до 48 минут в день.

145. Школьники добираются до школы в среднем за 25 минут с дисперсией 9. Найти вероятность, что школьник едет до школы от 16 до 43 минут.

146. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним 18 и стандартным отклонением 2. Найти вероятность $P(17 < X < 21)$ и квантиль x_p уровня $p = 0.75$.

147. Случайные величины Z_1 и Z_2 имеют стандартное нормальное распределение и независимы. Случайная величина X задана соотношением: $X = 5Z_1 - 3Z_2 - 4$. Указать закон распределения X. Найти вероятность того, что $X > 0$.

148. Случайные величины Z_1 и Z_2 имеют стандартные нормальные распределения и независимы. Случайная величина $X = 3Z_1 + 4Z_2 + 1$. Найти: математическое ожидание X, дисперсию X, вероятность того, что $X > 3.5$. Найти квантиль x_p при $p = 0.9$.

149. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют нормальные распределения: $X_1 \sim N(20, \sigma^2 = 4)$, $X_2 \sim N(40, \sigma^2 = 9)$. Случайная величина $Y = 3X_1 - X_2 + 10$. Указать закон распределения Y. Найти $P(Y > 40)$.

150. Даны три независимых случайных величины, имеющих нормальные распределения: $X_1 \sim N(10, \sigma^2 = 1)$, $X_2 \sim N(25, \sigma^2 = 4)$, $X_3 \sim N(40, \sigma^2 = 9)$. Случайная величина $Y = 2X_1 + 2X_2 + X_3$.

а) Укажите закон распределения случайной величины Y;

б) Найдите вероятность $P(Y < 100)$;

в) Для $p = 0.95$ найдите квантиль y_p.

151. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение вероятностей. Найти $P(|Z + 1| > 0.5)$.

152. Ошибка X при взвешивании на весах описывается нормальным законом распределения со средним ноль и стандартным отклонением 5 грамм. Какова вероятность того, что погрешность взвешивания на этих весах будет в пределах трех грамм?

153. Вес шоколадного батончика имеет нормальное распределение со средним 50 грамм и стандартным отклонением 1 грамм. Какова вероятность того, что вам попадется батончик, вес которого превышает 53 грамм?

154. Дневная выручка магазина X описывается нормальным законом распределения со средним значением 1000 условных единиц и дисперсией 2500. Найти вероятности следующих событий: $P(X < 925)$; $P(900 < X < 1025)$; $P(X > 1120)$.

155. Биржевая стоимость акции X описывается нормальным законом распределения со средним значением 20 условных единиц и дисперсией 4. Найти вероятности следующих событий:

а) $P(X < 17)$;

б) $P(15 < X < 18)$;

в) $P(X > 23)$.

156. Явка на избирательный участок X описывается нормальным законом распределения со средним значением 60% и дисперсией 100. Какова вероятность того, что а) явка опустится ниже 45%;

б) явка окажется в пределах от 35 до 50%;

в) явка превысит 73%?

157. Число пенсионеров на тысячу человек в некотором регионе X описывается нормальным законом распределения со средним значением 300 и дисперсией 900. Найти вероятности того, что в некотором городе этого региона:

а) $P(X < 275)$;

б) $P(290 < X < 320)$;

в) $P(X > 350)$.

158. Средний рост баскетболиста составляет 202 см и имеет нормальное распределение со стандартным отклонением 5 см. Найти вероятность того, что рост баскетболиста:

а) более 2 метров;

б) от 195 до 205 см.

159. Средний вес борца сумо составляет 130 кг и имеет нормальное распределение со стандартным отклонением 20 кг. Найти вероятность того, что вес борца сумо:

а) менее 100 кг;

б) от 100 до 150 кг.

160. Ковариация двух нормально распределенных случайных величин равна некоторому положительному числу. Что можно сказать о взаимосвязи этих случайных величин. Укажите в ответе верные утверждения:

А) Случайные величины зависимы;

Б) Чем больше величина ковариации, тем сильнее линейная зависимость между этими случайными величинами;

В) О зависимости или независимости случайных величин нельзя сказать ничего определенного;

Г) Рассматриваемые случайные величины независимы.

161. Ковариация двух нормально распределенных случайных величин X и Y равна некоторому положительному числу C. Что можно сказать о ковариации случайных величин $3X$ и $Y+1$. Укажите в ответе верные утверждения:

А) Значение ковариации не изменится;

Б) Значение ковариации увеличится в три раза;

В) Значение ковариации станет больше на 1;

Г) Значение ковариации будет равно $3C+1$.

162. Пусть Z_1 и Z_2 – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Вычислить коэффициент корреляции между Z_1 и $(4Z_1+3Z_2)$.

163. Пусть Z_1 и Z_2 – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Вычислить коэффициент корреляции между Z_1 и $(3Z_1-4Z_2)$.

12. Неравенство Чебышева, теорема Муавра–Лапласа и Центральная предельная теорема

Неравенство Чебышева (общая формулировка). Пусть Y – неотрицательная случайная величина, причем $E(Y)$ - существует. Тогда для любого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство:

$$P(Y\geq\varepsilon)\leq\frac{E(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Если в качестве случайной величины Y рассмотреть $Y=|X-E(X)|$, где X – произвольная случайная величина, у которой существует дисперсия, то получим важный *частный случай неравенства Чебышева.*

Неравенство Чебышева. Пусть X – произвольная случайная величина такая, что ее дисперсия $D(X)$ существует. Тогда для любого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство:

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}D(X).$$

Пример 1. Правильную монету бросили $n=100$ раз. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что выпавшее число гербов отклонится от 50 более чем на 40.

Решение. Обозначим через S_n – выпавшее число гербов при 100 бросках монеты

$$E(S_n) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50,$$

$$D(S_n) = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Тогда $P(|S_n - E(S_n)| \geq 40) \leq \frac{D(S_n)}{40^2} = \frac{25}{40^2} = \frac{1}{64} \approx 0.0156.$

Теорема Муавра–Лапласа. Пусть S_n – число успехов в n испытаниях Бернулли (число n не случайное; оно не зависит от результатов испытаний). Пусть p – вероятность успеха в одном испытании $0 < p < 1$. Тогда равномерно относительно a и b, где $-\infty < a < b < +\infty$:

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a) \text{ при } n \to \infty,$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения. Другими словами, нормированное число успехов S_n в серии из n испытаний Бернулли с ростом n начинает вести себя как стандартная нормальная случайная величина $Z \sim N(0,1)$ или

$$S_n \sim np + Z\sqrt{np(1-p)}.$$

Пример 2. Стрелок попадает в цель при одном выстреле с вероятностью 3/4. Найти приближенную вероятность того, что число попаданий в цель при 1200 выстрелах лежит в пределах между 870 и 915.

Решение. Пусть $n = 1200$, а вероятность того, что стрелок попадет в цель, равна $p = 3/4$. Число попаданий в цель

S есть случайная биномиальная величина, поэтому математическое ожидание $ES = np = 900$ и дисперсия $DX = np(1-p) = 225$. По теореме Муавра–Лапласа случайная величина S имеет асимптотически нормальное распределение, поэтому приближенно можем считать выполненным равенство $S = 900 + \sqrt{225}Z = 900 + 15Z$, где $Z \sim N(0;1)$. Используя таблицу для функции распределения стандартной нормальной величины, находим

$$P(870 < S < 915) \approx P(870 < 900 + 15Z < 915) =$$

$$= P\left(-2 < Z < 1\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \approx 0.841345 + 0.97725 - 1 = 0.818595.$$

Центральная предельная теорема является обобщением теоремы Муавра–Лапласа на случай, когда рассматриваются суммы произвольных случайных величин.

Название «Центральная предельная теорема» объединяет серию теорем, различающихся лишь условиями, наложенными на суммируемые величины.

Центральная предельная теорема для независимых и одинаково распределенных случайных величин. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $E(X_i^2) < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через a их математическое ожидание, через σ^2 – дисперсию, и пусть $\sigma > 0$. Тогда равномерно относительно u и v, где $-\infty \leq u \leq v \leq +\infty$:

$$P\left(u \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq v\right) \to \Phi(v) - \Phi(u) \text{ при } n \to \infty.$$

Другими словами, сумма независимых одинаково распределенных случайных величин с ростом числа слагаемых начинает вести себя как нормальная случайная величина $N(na, n\sigma^2)$:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \simeq na + \sqrt{n}\sigma \cdot Z.$$

Пример 3. Игральную кость бросили $n = 100$ раз. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков превысит 385.

Решение. Обозначим через X_i – число выпавших очков при i-м броске. X_i – случайная величина, принимающая целые значения от 1 до 6 с равными вероятностями. $E(X_i) = 3.5$, $D(X_i) \approx 2.9166$ и $\sigma = \sqrt{D(X_i)} \approx 1.708$.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 385\right) = P(100 \cdot +\sqrt{100} \cdot 1.708 \cdot z \geq 385) \approx$$

$$\approx P(17.08 \cdot Z \geq 35) \approx P(Z \geq 2.05) =$$

$$= 1 - \Phi(2.05) \approx 1 - 0.9798 = 0.0202.$$

164. При наборе текста наборщик делает ошибку в слове с вероятностью 0.01. Определить вероятность того, что в набранной статье, насчитывающей 5000 слов, будет от 40 до 60 ошибок.

165. Каждый из 100 компьютеров в интернет-кафе занят клиентами в среднем в течение 80% рабочего времени. Какова вероятность того, что в некоторый момент клиентами будет занято от 70 до 90 компьютеров?

166. Пусть S_n число успехов в 150 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p = 1/2$, найдите приближенно вероятность $P(S_n > 80)$.

167. Известно, что доля потребителей некоторого товара составляет 20%. Вычислите приближенно, используя теорему Муавра–Лапласа, вероятность того, что при случайном опросе 500 респондентов более 120 заявят, что они являются потребителями этого товара.

168. Правильную монету подбрасывают 144 раз. Вычислите приближенно, используя теорему Муавра–Лапласа, вероятность того, что число выпавших гербов в этом эксперименте S будет в пределах от 60 до 80, т.е. $P(60 < S < 80)$.

169. Вероятность обнаружить приверженца некоторой торговой марки равна 0.20. В социологическом опросе опрошено 1600 человек. Найдите примерную вероятность того, что среди них окажется более 350 приверженцев этой торговой марки.

170. Вероятность обнаружить при случайном опросе приверженца некоторой торговой марки равна 0.10. В социологическом опросе опрошено 900 человек. Найдите примерную вероятность того, что среди них окажется менее 80 приверженцев этой торговой марки.

171. Страховая компания заключила 40 000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 0.02. Найти вероятность того, что таких случаев будет от 828 до 870.

172. Сколько избирателей нужно опросить, чтобы вероятность отклонения реальной доли p избирателей Зюганова менее чем на 3% от полученной из опроса была более 0.95 (то есть найти n такое, что $P(|\frac{k}{n} - p| < 0.03) > 0.95$)? Предполагается, что выборка является репрезентативной, а доля избирателей Зюганова составляет 10%.

173. Сколько избирателей нужно опросить, чтобы вероятность отклонения реальной доли избирателей Жириновского от полученной из опроса менее чем на 5% была более 0.9? Предполагается, что выборка является репрезентативной, а доля избирателей Жириновского составляет 7%.

174. Страховая компания хотела бы получить доход не менее 100 000, при этом средний размер страховой суммы 1000, вероятность наступления страхового случая 0.05 и ожидаемое количество договоров 1200. Какова должна быть минимальная величина страхового тарифа, чтобы компания могла получить указанный размер дохода с вероятностью не менее 0.99? Страховой тариф – величина страхового взноса с единицы страховой суммы (или объекта страхования).

175. Портфель страховой компании состоит из 1000 договоров, заключенных 1 января и действующих в течение текущего года. При наступлении страхового случая по каждому из договоров компания обязуется выплатить 2000 ден.ед. Вероятность наступления страхового события по каждому из договоров равна 0.05 и не зависит от наступления страховых событий по другим контрактам. Каков должен быть совокупный размер резерва страховой компании для того, чтобы с вероятностью 0.99 она могла бы удовлетворить требования, возникающие по указанным договорам? При вычислении числа страховых событий использовать нормальное распределение.

176. Случайные величины X_i независимы и имеют одинаковые равномерные распределения на отрезке $[0;2]$. Величина S равна сумме 100 случайных величин X_i. Найдите примерное значение вероятности $P(90 < S < 105)$.

177. Случайные величины X_i независимы и имеют одинаковые дискретные распределения со значениями: -20, 0, 40, принимаемые с вероятностями 0.2, 0.6 , 0.2 соответственно. Величина S равна сумме 100 случайных величин X_i. Найдите примерное значение вероятности $P(30 < S < 45)$.

178. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия – 0,1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 49,5 и не более 50,5 см.

179. В среднем 10% работоспособного населения некоторого региона – безработные. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11%.

13. Двумерное непрерывное распределение

На практике часто возникают ситуации, когда результатом случайного эксперимента является точка на числовой плоскости или ее части. В таких случаях говорят, что мы имеем дело со случайным вектором (X, Y), каждая из координат которого является случайной величиной.

Распределение случайного вектора (X, Y) на плоскости в большинстве практически важных приложений можно задать с помощью плотности распределения $\rho(x, y)$.

Определение 1. Функция $\rho(x, y)$ называется плотностью распределения вероятностей на плоскости, если выполнены два условия:

1. $\rho(x, y) \geq 0$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y) dx dy = 1$.

Второе условие означает, что совокупный объем фигуры, заключенный между поверхностью, заданной функцией $\rho(x, y)$, и плоскостью (x, y), равен 1.

Если известно, что случайный вектор (X, Y) может принимать значения в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$, то $\rho(x, y) = 0$ для любой точки (x, y), не принадлежащей области Ω.

Пример 1. Вектор (x, y) может принимать значения только на квадрате $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Пусть $\rho(x, y) = 1$ для всех $x, y \in \Omega$ и $\rho(x, y) = 0$ для всех $x, y \notin \Omega$.

Тогда $\rho(x,y)$ является плотностью распределения вероятностей.

Доказательство. Условие 1 определения плотности очевидно выполнено. Проверим условие 2:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} 1dxdy = \int\limits_{0}^{1}\left(y|_0^1\right)dx = \int\limits_{0}^{1} 1dx = 1.$$

Зная распределение вектора (X,Y), можно получить распределение каждой из его координат. Такие распределения называются маргинальными распределениями. Плотность маргинального распределения X задается соотношением:

$$\rho_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x;y)dy.$$

Плотность маргинального распределения Y задается соотношением:

$$\rho_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x;y)dx.$$

Координаты X и Y случайного вектора (X,Y) являются обычными непрерывными случайными величинами с плотностями $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ соответственно.

Определение 2. Математическим ожиданием (средним значением) случайного вектора (X,Y) называется вектор $(E(X),E(Y))$. Для характеристики изменчивости случайного вектора (X,Y) используется ковариационная матрица Σ:

$$\begin{pmatrix} D(X) & cov(x,y) \\ cov(x,y) & D(Y) \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали матрицы Σ стоят дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$, а на побочной диагонали $Cov(X,Y)$.

Пример 2. Для случайного вектора $(X;Y)$ равномерно распределенного в прямоугольнике $\Pi = \{(x;y)|0 \le x \le 2; 1 \le y \le 4\}$ найти

а) маргинальные плотности вероятности $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$;

б) математические ожидания EX и EY;

в) ковариацию $cov(X;Y)$.

Решение. Так как площадь прямоугольника Π равна шести, то функция плотности вероятности имеет вид $\rho(x;y) = 1/6$, при $x \in \Pi$ (и равна нулю в остальных точках). Маргинальные плотности находятся по формулам

$$\rho_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x;y)dy = \int\limits_{1}^{4} \frac{1}{6}dx = 1/2,$$

$$\rho_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x;y)dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{6}dx = 1/3.$$

Вычисляем математические ожидания:

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho_1(x)dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\bigg|_0^2 = 1,$$

$$EY = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\rho_2(y)dy = \int\limits_{1}^{4} \frac{y}{3}dy = \frac{y^2}{6}\bigg|_1^4 = \frac{5}{2}.$$

Теперь вычисляем ковариацию

$$cov(X;Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\rho(x;y)dxdy - EX \cdot EY =$$

$$= \int\limits_0^2 \int\limits_1^4 \frac{xy}{6} dxdy - 1 \cdot \frac{5}{2} = \int\limits_1^4 \frac{y}{3} dy - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0.$$

Этот результат можно было бы получить проще, заметив, что случайные величины X и Y независимы, так как $\rho(x;y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$.

Теорема. Координаты случайного вектора (X,Y), имеющего совместную плотность распределения $\rho(x,y)$, являются независимыми случайными величинами тогда и только тогда, когда плотность распределения вероятностей этого вектора $\rho(x,y) = \rho_1(x) \cdot \rho_2(y)$, где $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ – частные плотности распределения случайных величин X и Y.

180. Случайные величины X и η независимы

$$\rho_X(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in [-3;3] \\ 0, & . \end{cases}$$

$$\rho_\eta(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in [0;4] \\ 0, & . \end{cases}$$

Вычислите вероятность того, что случайная точка $(X;\eta)$ попадет:

а) в прямоугольник $\Pi = \{(x;y)|0 \le x \le 5; 0 \le y \le 2\}$;

б) в фигуру $\Phi = \{(x;y)|-\pi/2 \le x \le \pi/2; 0 \le y \le 3\cos x\}$.

181. Для случайного вектора $(X;Y)$, равномерно распределенного в треугольнике с вершинами $(0;0)$, $(4;0)$ и $(0;4)$, найти маргинальные плотности вероятности $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$.

182. Для случайного вектора $(X;Y)$ с плотностью axy и носителем на прямоугольнике $[1;2] \times [2;4]$ найти

а) коэффициент a и маргинальные плотности вероятности $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$;

б) математические ожидания EX и EY;

в) ковариационную матрицу.

183. Пусть X и Y –независимые стандартные нормальные величины. Найдите вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в квадрат с центром в начале координат и стороной 2.

184. Пусть X и Y – независимые стандартные нормальные величины. Найдите вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами $2a$ и $2b$.

14. Основные темы для подготовки к коллоквиуму

1. Дискретные пространства элементарных событий и их описание. Комбинаторные формулы.

2. Вероятности событий в классической схеме задания вероятностей.

3. Формулы сложения и умножения вероятностей.

4. Зависимые и независимые события. Условная вероятность событий.

5. Формула полной вероятности. Полные системы событий. Формула Байеса.

6. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики. Дискретные распределения: биномиальное, Пуассона.

7. Непрерывные случайные величины. Плотность и функция распределения. Числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, медиана, квантили, квартили.

8. Свойства математического ожидания и дисперсии.

9. Совместные распределения дискретных случайных величин. Ковариация и ее свойства.

10. Нормальное распределение вероятностей и его свойства: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, медиана, квартили, квантили. Распределение суммы независимых нормальных случайных величин.

11. Неравенство Чебышева. Сходимость по вероятности. Теорема Бернулли.

15. Типовые варианты коллоквиума

15.1 Вариант 1

1. Игральную кость подбросили 3 раза. Найдите число элементарных событий в этом эксперименте.

2. Правильную монету подбросили 4 раза. Вычислите вероятность события: выпал ровно один герб.

3. Два события A и B не могут произойти одновременно. Отметьте верные из следующих утверждений:

А) Эти события независимы;

Б) Эти события не пересекаются;

В) Событие A содержится в дополнении события B;

Г) Объединение этих событий всегда дает все пространство элементарных событий.

4. Правильную игральную кость подбросили дважды. Вычислите вероятность того, что в сумме на двух костях выпало девять, при условии, что при первом броске выпало нечетное число очков.

5. На завод поставляют одну и ту же деталь два поставщика. При этом доля первого поставщика составляет 70% от всего объема поставок. Вероятность обнаружить бракованную деталь у первого поставщика равна 0.05, а у второго – 0.1. Вычислите вероятность обнаружения бракованной детали среди всех поставленных на завод этими поставщиками.

6. Дискретная случайная величина задана своим рядом распределения:

X	-2	1	3
p	0.4	0.1	a

Найдите a и вычислите математическое ожидание случайной величины X^2.

7. Математическое ожидание случайной величины (отметьте перечень верных утверждений):

А) характеризует значение случайной величины в среднем;

Б) равно самому вероятному (ожидаемое в случайном эксперименте) значению случайной величины;

В) характеризует изменчивость случайной величины;

Г) равно среднему квадрата отклонения случайной величины от своего среднего значения.

8. Дисперсия случайной величины может принимать (отметьте перечень верных утверждений):

А) Любые значения на числовой прямой;

Б) Значения от минус единицы до плюс единицы;

В) Только неотрицательные значения;

Г) Только целые значения.

9. Чему равно стандартное отклонение случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение.

10. Чему равна вероятность того, что случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, примет отрицательное значение? (отметьте перечень правильных утверждений):

А) 0;

Б) близка к единице;

В) близка к нулю;

Г) 0.5.

11. Случайные величины Z_1 и Z_2 имеют стандартные нормальные распределения и независимы. Вычислите дисперсию случайной величины $X = 5Z_1 - 3Z_2 + 4$.

12. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним значением 20 и дисперсией 16. Чему равна вероятность того, что эта случайная величина примет значение в интервале от 8 до 32? Отметьте перечень верных утверждений:

А) 0;

Б) близка к единице;

В) близка к нулю;

Г) 0.5.

13. Плотность распределения $p(x)$ непрерывной случайной величины X (отметьте правильные из перечисленных утверждений):

А) всегда меньше или равна 1;

Б) может принимать только неотрицательные значения;

В) равна $P(0 < X < x)$;

Г) удовлетворяет условию, что общая площадь под кривой плотности всегда равна 1.

14. Непрерывная случайная величина может принимать значения только на отрезке $[0; 3]$. Может ли функция $p(x) = x - 1$ быть плотностью распределения вероятностей этой случайной величины?

15. Проведено шесть испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании, равной 0.5. Найдите вероятность того, что произойдет ровно 5 успехов.

16. Теорема Бернулли утверждает, что с ростом числа испытаний (отметьте правильные из перечисленных утверждений):

А) доля числа успехов равна вероятности успеха в одном испытании;

Б) доля числа успехов имеет асимптотически нормальное распределение вероятностей;

В) доля числа успехов сходится по вероятности к вероятности успеха в одном испытании Бернулли;

Г) математическое ожидание числа успехов равно вероятности успеха.

Ответы: 1. 216; **2**. 0.25; **3**. Б, В; **4**. 1/9; **5**. $0,065$; **6**. $a = 0.5$; 6.2; **7**. А; **8**. В; **9**. 1; **10**. Г; **11**. 34; **12**. Б; **13**. Б, Г; **14**. нет; **15**. $\frac{3}{32}$; **16**. В.

15.2 Вариант 2

1. Монету подбросили 4 раза. Найдите число элементарных событий в этом эксперименте.

2. Правильную игральную кость подбросили 2 раза. Вычислите вероятность события: в сумме на двух костях выпало 3.

3. Два события A и B являются независимыми и вероятность каждого из них отлична от нуля. Отметьте верные утверждения из перечисленных ниже.

А) События A и B не пересекаются (то есть не могут произойти одновременно).

Б) Условная вероятность события A при условии B равна безусловной вероятности.

В) Событие B является дополнением события A.

Г) Вероятность пересечения событий A и B равна произведению их вероятностей.

4. Правильную игральную кость подбросили дважды. Вычислить вероятность того, что в сумме на двух костях выпало пять, при условии, что при первом броске выпало четное число очков.

5. В операционном отделении банка работают 90% опытных работников. Вероятность совершения ошибки опытным работником равна 0.02, а вероятность ошибки у неопытного работника 0.1. Вычислите вероятность совершения ошибки.

6. Дискретная случайная величина задана своим рядом распределения

X	-1	2	3
p	0.5	a	0.2

Найдите a и вычислите математическое ожидание случайной величины X^2.

7. Дисперсия случайной величины (отметьте правильные из перечисленных утверждений):

А) характеризует значение случайной величины в среднем;

Б) равна среднему модуля отклонения случайной величины от нуля;

В) характеризует изменчивость случайной величины относительно своего среднего значения;

Г) равна среднему квадрата отклонения случайной величины от своего среднего значения.

8. Дисперсия константы равна (отметьте правильные из перечисленных утверждений):

А) Этой константе .

Б) Квадрату константы .

В) Нулю.

Г) Не существует.

9. Чему равна медиана случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение?

10. Чему равна вероятность того, что случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, примет значение большее 5? Отметьте правильные из перечисленных утверждений:

А) 0.5;

Б) близка к нулю;

В) близка к единице;

Г) 0.

11. Случайные величины Z_1 и Z_2 имеют стандартные нормальные распределения и независимы. Вычислите дисперсию случайной величины $X = 2Z_1 + 3Z_2 - 5$.

12. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним значением 10 и дисперсией 25. Чему равна вероятность того, что эта случайная величина примет значение большее 25? Отметьте правильные из перечисленных утверждений:

А) 0;

Б) близка к единице;

В) близка к нулю;

Г) 0.5.

13. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X (отметьте правильные из перечисленных утверждений):

А) монотонно неубывающая;

Б) стремится к нулю при x стремящемся к бесконечности;

В) равна $P(0 < X < x)$;

Г) всегда больше или равна 0.

14. Полная система событий (отметьте правильные из перечисленных утверждений):

А) Разбивает все пространство элементарных событий на попарно не пересекающие события, в объединении дающие все пространство элементарных событий;

Б) Произвольный набор событий, в объединении дающие все пространство элементарных событий;

В) Произвольный попарно не пересекающий набор событий;

Г) Набор событий, имеющий хотя бы один общий элементарный исход.

15. Непрерывная случайная величина может принимать ненулевые значения только на отрезке $[0; 2]$. Может ли функция $p(x) = 2 - x$ быть плотностью распределения вероятностей этой случайной величины.

16. Проведено пять испытаний Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании, равной 0.5. Найдите вероятность того, что произойдет ровно 2 успеха.

Ответы: **1**. 16; **2**. $\frac{1}{18}$; **3**. Б) и Г); **4**. $\frac{2}{9}$; **5**. 0.028; **6**. $a = 0.3$ и $E(X^2) = 3.5$; **7**. В) и Г); **8**. В); **9**. 0; **10**. Б); **11**. $D(X) = 13$; **12**. Б); **13**. А) и Г); **14**. А); **15**. Нет; **16**. $\frac{5}{16}$.

15.3 Решение варианта 2

1. Пространство элементарных событий состоит из наборов вида $(x_1; x_2; x_3; x_4)$. При этом x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, может принимать только два значения – орел или решка. Таким образом, всего возможно $2^4 = 16$ элементарных исходов.

2. Условию задачи удовлетворяют только 2 элементарных события: $(1; 2)$ и $(2; 1)$. Так как все вероятностное пространство состоит из 36 элементарных исходов, то вероятность указанного события равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

3. Из условия независимости событий следует, что $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, причем эта вероятность не равна нулю. Из этого следует, что события A и B имеют пересечение, иначе $P(A \cap B) = 0$, поэтому пункты А) и В) не являются верными утверждениями. Пункт Г) верен по определению независимости, а утверждение Б) следует из формулы $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

4. Перечислим элементарные события, которые удовлетворяют событию A=$\{$сумме на двух костях выпало 5 очков$\}$: $(1; 4)$, $(4; 1)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$, откуда находим $P(A) = \frac{4}{36}$. Событие B=$\{$на первой кости выпало четное число$\}$ происходит в половине случаев, поэтому $P(B) = \frac{1}{2}$. Окончательно, по формуле для условной вероятности, имеем $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/36}{1/2} = \frac{2}{9}$.

5. Введем обозначения для следующих событий A=$\{$произошла ошибка$\}$, H_1=$\{$операцию выполнял опытный работник$\}$ и H_2=$\{$операцию выполнял неопытный работник$\}$. Из условия известны вероятности $P(H_1) = 0.9$, $P(H_2) = 0.1$, $P(A|H_1) = 0.02$ и $P(A|H_2) = 0.1$. Так как события H_1 и H_2 составляют полную группу событий, то, пользуясь формулой полной вероятности, находим ответ

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) =$$

$$= 0.02 \cdot 0.9 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.028.$$

6. Сумма вероятностей дискретной случайной величины равна единице, поэтому $0.5 + a + 0.2 = 1$, а значит, $a = 0.3$. Для вычисления математического ожидания воспользуемся формулой $Ef(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot p_i$, $f(X)$ – некоторая функция случайной величины X:

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 = 3.5.$$

7. По определению дисперсии $D(X) = E(X - EX)^2$, то есть она равна среднему квадрата отклонения случайной величины от своего среднего значения, что, в свою очередь, характеризует изменчивость случайной величины относительно его математического ожидания. Поэтому верными являются пункты В) и Г).

8. Дисперсия константы равна нулю.

9. Так как плотность стандартной нормальной величины Z есть четная функция $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, она симметрична относительно нуля, поэтому $P(Z > 0) = P(Z < 0) = 1/2$.

10. По правилу «трех сигм» вероятность отклонится более чем на 3 стандартных отклонения от математического ожидания составляет менее 0.003. То есть для стандартной нормальной величины Z $P(|Z| > 3) < 0.003$, откуда $P(Z > 5)$ близка к нулю.

11. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий. Так как дисперсия стандартной нормальной величины равна единице, то из свойств дисперсии следует

$$D(X) = D(2Z_1 + 3Z_2 - 5) = 2^2 D(Z_1) + 3^2 D(Z_2) = 4 + 9 = 13.$$

12. Для того чтобы найти требуемую вероятность, перейдем к стандартной нормальной величине $Z = \frac{X-10}{\sqrt{25}}$ и воспользуемся таблицей для нормального распределения

$$P(X > 25) = P\left(\frac{X-10}{5} > \frac{25-10}{5}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) \approx 1 - 0.99865 = 0.00135.$$

13. По определению функция распределения удовлетворяет свойствам А) и Г).

14. В пункте А) приведено определение полной группы событий.

15. По свойству функции плотности $\rho(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1.$$

В нашем же случае $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = \int\limits_{0}^{2}(2-x)dx = (2x - \frac{x^2}{2})|_0^2 = 2.$

16. Для схемы Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.5$, числом испытаний $n = 5$ и $k = 2$ имеем

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^2 0.5^2 \cdot 0.5^3 = \frac{5!}{2!3!} 0.5^5 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}.$$

16. Типовые варианты экзамена

16.1 Вариант 1

1. Студенческая группа состоит из 5 юношей и 10 девушек. Из них случайным образом отбирают трех студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных есть хотя бы один юноша.

2. У школьника в рюкзаке было 10 тетрадей, из них 8 в клетку и 2 – в линейку. Одну из тетрадей он забыл в школе. После этого он наугад взял из рюкзака одну тетрадь. Какова вероятность, что эта тетрадь в клетку?

3. Игральную кость бросают два раза. Событие A – в сумме выпало больше 9, событие B – при втором броске выпало четное число очков. Найти $P(A \cup B)$. Найти $P(A|B)$. Являются ли события A и B независимыми и почему?

4. Случайная величина S – число успехов в 4 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании $p = 0.5$. Найти вероятность того, что $P(S < 2)$.

5. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \setminus Y$	-2	-1	0
0	2/16	1/16	1/16
1	1/16	3/16	2/16
02	5/16	0	

Найдите

а) закон распределения случайной величины X (ее значения в вертикальном столбце);

б) EX, DX, $E(X^2 - 3)$;

в) $cov(X, Y)$.

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним 46 и дисперсией 36. Найти вероятность $P(37 < X < 49)$ и квантиль x_p уровня $p = 0.05$.

7. Случайные величины Z_1 и Z_2 имеют стандартное нормальное распределение и независимы. Случайная величина X задана соотношением: $X = 5Z_1 - 3Z_2 - 4$. Указать закон распределения X. Найти вероятность того, что $X > 0$.

8. Известно, что доля потребителей некоторого товара составляет 20%. Вычислите приближенно, используя теорему Муавра–Лапласа, вероятность того, что при случайном опросе 500 респондентов более 120 заявят, что они являются потребителями этого товара.

9. Случайная величина X принимает свои значения на отрезке $[0; 4]$ и задана своей плотностью распределения $p(x) = ax$ на отрезке $[0; 4]$. Найти константу a, $E(X)$ и $D(X)$.

Ответы. 1. $\frac{67}{91}$; **2**. 0.8; **3**. $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$; $P(A|B) = \frac{2}{9}$; зависимы; **4**. $\frac{5}{16} = 0.3125$; **5**. а)

X	0	1	2
p	1/4	3/8	3/4

; б) $EX = \frac{9}{8} = 1.125$; $DX = \frac{39}{64}$,$E(X^2 - 3) = -\frac{9}{8}$; в) $cov(x, y) = -\frac{5}{32}$; **6**. ≈ 0.6247, $x_{0.05} \approx 36.1$; **7**. $X \sim N(-4; 34)$, $P(X > 0) \approx 0.245$; **8**. ≈ 0.0125; **9**. $a = \frac{1}{8}$, $EX = \frac{8}{3}$, $DX = \frac{8}{9}$.

16.2 Вариант 2

1. Совет директоров компании состоит из 8 человек, среди которых 5 хорошо владеют английским языком. Какова вероятность того, что при простом случайном выборе трех членов совета директоров для поездки в Англию, в делегацию попадет хотя бы один человек, не владеющий английским?

2. Игральную кость бросают трижды. Событие A – в сумме на трех костях выпало больше 15. Событие B – при втором броске выпало четное число очков. Найти $P(A \cup B)$. Найти $P(A|B)$. Являются ли события A и B независимыми и почему?

3. Вероятность продать недвижимость в течение двух месяцев при благоприятной экономической ситуации равна 0.7, а при неблагоприятной только 0.2. Эксперты считают, что вероятность благоприятной экономической ситуации в ближайшее время оценивается как 0.15. Какова вероятность продать недвижимость в течение двух ближайших месяцев?

4. Начинающий водитель в среднем совершает одну ошибку за 5 минут. Предполагая, что число совершенных таким водителем ошибок подчиняется закону Пуассона, найдите вероятность того, что водитель совершит за 10 минут не менее двух ошибок.

5. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-0.5	$3/25$	$2/25$	0
0	$7/25$	$3/25$	$3/25$
0.5	0	$5/25$	

Найдите

а) закон распределения случайной величины Y (ее значения в вертикальном столбце);

б) EY, DY, $E(Y^3 - 4)$;

в) $cov(X, Y)$.

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним 16 и стандартным отклонением 2. Найти вероятность $P(15 < X < 19)$ и квантиль x_p уровня $p = 0.75$.

7. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют нормальные распределения: $X_1 \sim N(20, \sigma^2 = 4)$, $X_2 \sim N(40, \sigma^2 = 9)$. Случайная величина $Y = 3X_1 - X_2 + 10$. Указать закон распределения Y. Найти $P(Y > 40)$.

8. Правильную монету подбрасывают 144 раз. Вычислите приближенно, используя теорему Муавра–Лапласа, вероятность того, что число выпавших гербов в этом эксперименте S будет в пределах от 60 до 80, т.е $P(60 < S < 80)$.

9. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1; 1]$. Найдите $E(X)$ и $D(X)$.

Ответы. 1. $\frac{23}{28}$; **2**. $P(A \cup B) = \frac{37}{72}$; $P(A|B) = \frac{7}{108}$; зависимы; **3**. 0.275; **4**. $1 - \frac{3}{e^2}$; **5**. а)

X	-1	0	1
p	$2/5$	$2/5$	$1/5$

; б) $EX = -\frac{1}{5} = -0.2$; $DX = \frac{14}{25} = 0.56$, $E(Y^3 - 4) = -4.2$; в) $cov(x, y) = 0.108$; **6**. ≈ 0.6247, $x_{0.75} \approx 17.34$; **7**. $X \sim N(30; 45)$, $P(Y > 40) \approx 0.068$; **8**. ≈ 0.8854; **9**. $EX = 0$, $DX = \frac{1}{3}$.

16.3 Вариант 3

1. Студенческая группа состоит из 8 юношей и 12 девушек. Из них случайным образом отбирают трех студентов. Найти вероятность того, что отобраны 2 юноши и 1 девушка.

2. Два признака A и B независимы. Вероятность встретить признак A у случайно выбранного респондента равна 0.4, а признак B – 0.9. Какова вероятность того, что у случайно выбранного респондента обнаружатся не более одного из этих признаков?

3. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение вероятностей. Найти $P(|Z-1|>0.5)$.

4. На некотором предприятии вероятность производства бракованного изделия составляет 0.03. При контроле продукции этого предприятия совершаются ошибки: с вероятностью 0.05 бракованное изделие признается годным и с вероятностью 0.01 годное изделие признается бракованным. Случайно выбранное изделие было проконтролировано и признано бракованным. Какова вероятность, что это изделие годное?

5. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \setminus Y$	-2	-1	0
0	1/27	3/27	5/27
1	2/27		5/27
2	6/27	1/27	0

Найдите

а) закон распределения случайной величины X (ее значения в вертикальном столбце);

б) EX, DX, $E(2X^2 - 3)$;
в) $cov(X, Y)$.

6. Случайная величина X имеет нормальное распределение со средним 100 и стандартным отклонением 16. Найти вероятность $P(74 < X < 92)$ и квантиль x_p уровня $p = 0.95$.

7. Случайные величины Z_1 и Z_2 имеют стандартное нормальное распределение и независимы. Случайная величина $X = 8Z_1 - 2Z_2 - 1$. Указать закон распределения X. Найти вероятность того, что $X < 0$.

8. Известно, что доля потребителей некоторого товара составляет 25%. Вычислите приближенно, используя теорему Муавра–Лапласа, вероятность того, что при случайном опросе 1000 респондентов от 230 до 280 заявят, что они являются потребителями этого товара.

9. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[2; 6]$. Найти $E(2X - 1)$, $D(2X - 1)$, $E(X^3)$.

Ответы: 1. $\frac{28}{95}$; **2** 0.64; **3** 0.7583; **4** 0.2539;
5. а)

X	0	1	2
p	9/27	11/27	7/27

; б) $EX = \frac{25}{27}$; $DX \approx 0.587$; $E(2X^2 - 3) = -\frac{1}{9}$; в) $cov(x, y) \approx -0.367$; **6**. ≈ 0.256; ≈ 126.4; **7**. $X \sim N(-1; 68)$; ≈ 0.5478; **8**. ≈ 0.9096; **9**. $E(2X - 1) = 7$, $D(2X - 1) = 16/3$, $E(X^3) = 80$.

16.4 Решение варианта 3

1. Общее число способов выбрать трех человек из двадцати равно $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 3 \cdot 19 \cdot 20$. Имеется 12 вариантов выбрать одну девушку, а количество способов выбрать двух юношей из восьми равно $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$. Пусть A означает требуемое событие, тогда вероятность $P(A)$ находится по

формуле
$$P(A) = \frac{12C_8^2}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 28}{3 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{28}{95}.$$
2. Рассмотрим обратное событие, которое состоит в том, что у респондента обнаружатся оба признака, вероятность этого равна $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36$ (здесь мы воспользовались независимостью двух признаков). Поэтому вероятность искомого события равна
$$1 - P(A \cap B) = 1 - 0.36 = 0.64.$$
3. $P(|Z-1| > 0.5) = 1-P(|Z-1| < 0.5) = 1-P(-0.5 < Z < 1.5) = 1-\Phi(1.5)+\Phi(0.5) = 1-0.9332+0.6915 = 0.7583$. Здесь $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения, значения которой можно найти в таблице.

4. Рассмотрим события A={изделие признано бракованным}, H_1={изделие является бракованным} и H_2={изделие годное}. По условию даны вероятности $P(H_1) = 0.03$, $P(H_2) = 0.97$, $P(\overline{A}|H_1) = 0.05$ и $P(A|H_2) = 0.01$. Чтобы найти вероятность $P(H_2|A)$, воспользуемся формулой Байеса
$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} =$$
$$= \frac{0.01 \cdot 0.97}{0.95 \cdot 0.03 + 0.01 \cdot 0.97} = 0.2539.$$
5. Сначала заметим, что в пустой клетке должна стоять дробь $4/27$, поскольку сумма всех вероятностей должна равняться единице. Маргинальное распределение случайной величины X получается суммированием вероятностей по строкам данной таблицы

X	0	1	2
p	$9/27$	$11/27$	$7/27$

Математическое ожидание $EX = 0 \cdot \frac{9}{27} + 1 \cdot \frac{11}{27} + 2 \cdot \frac{7}{27} = \frac{25}{27}$.

Прежде чем найти дисперсию, найдем математическое ожидание квадрата случайной величины

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{9}{27} + 1^2 \cdot \frac{11}{27} + 2^2 \cdot \frac{7}{27} = \frac{39}{27} = \frac{13}{9}.$$

Теперь находим дисперсию DX и $E(2X^2 - 3)$:

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{13}{9} - \left(\frac{25}{27}\right)^2 \approx 0.587,$$

$$E(2X^2 - 3) = 2E(X^2) - 3 = 2 \cdot \frac{13}{9} - 3 = -\frac{1}{9}.$$

Так как $cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$, то для нахождения ковариации достаточно найти EY и $E(XY)$:

$$EY = -2 \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{6}{27}\right) - 1 \cdot \left(\frac{3}{27} + \frac{4}{27} + \frac{1}{27}\right) = -\frac{26}{27},$$

$$E(XY) = -2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{27} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{27} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{6}{27} - 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{27} = -\frac{34}{27}.$$

Теперь вычисляем ковариацию

$$cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = -\frac{34}{27} - \frac{25}{27}(-\frac{26}{27}) \approx -0.367.$$

6. Выразим случайную величину X через стандартную нормальную величину Z:

$$X = 100 + 16Z.$$

Тогда $P(Z) = P(74 < 100 + 16Z < 92) = P(-\frac{26}{16} < Z < -\frac{8}{16}) = P(-1.625 < Z < -0.5) = \Phi(1.625) - \Phi(0.5) \approx 0.9474 - 0.6915 = 0.256$

Квантиль стандартного нормального распределения уровня $p = 0.95$ составляет $z_p \approx 1.65$, поэтому

$$x_p \approx 100 + 16 \cdot 1.65 = 126.4.$$

7. Линейная комбинация независимых нормальных случайных величин также является нормальной случайной величиной. По свойствам найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины X:

$$E(X) = E(8Z_1 - 2Z_2 - 1) = 8EZ_1 - 2EZ_2 - 1 = -1,$$

$$D(X) = 8^2 D(Z_1) + (-2)^2 DZ_2 = 64 + 4 = 68.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для стандартных нормальных величин математическое ожидание равно нулю, а дисперсия – единице. Таким образом, $X = -1 + \sqrt{68}Z$, где $Z \sim N(0;1)$. Далее,

$$P(X > 0) = P(-1 + \sqrt{68}Z < 0) = P\left(Z < \frac{1}{\sqrt{68}}\right) \approx$$

$$\approx P(Z < 0.12) = \Phi(0.12) \approx 0.5478.$$

8. Вероятность того, что респондент является потребителем этого товара, составляет $p = 1/4$. Число респондентов S, являющихся потребителями данного товара, есть случайная биномиальная величина. Тогда можем вычислить математическое ожидание $ES = np = 250$ и дисперсию $DX = np(1-p) = 187.5$. По теореме Муавра–Лапласа случайная величина S имеет асимптотически нормальное распределение, поэтому приближенно можем считать выполненным равенство $S = 250 + \sqrt{187.5}Z$, где $Z \sim N(0;1)$. Используя таблицу для функции распределения стандартной нормальной величины, находим

$$P(230 < S < 280) \approx P(230 < 250 + \sqrt{187.5}Z < 280) =$$

$$= P\left(-\frac{20}{\sqrt{187.5}} < Z < \frac{30}{\sqrt{187.5}}\right) \approx P(-1.46 < Z < 2.19) =$$

$$= \Phi(2.19) + \Phi(1.46) - 1 \approx 0.9817 + 0.9279 - 1.$$

9. Носитель плотности случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$, имеет вид $\rho(x) = \frac{1}{b-a}$, а математическое ожидание и дисперсия задаются формулами

$$EX = \frac{b+a}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Поэтому в нашей задаче $EX = \frac{6+2}{2} = 4$ и $DX = \frac{(6-2)^2}{12} = \frac{4}{3}$. Пользуясь свойствами математического ожидания, находим

$$E(2X-1) = 2EX - 1 = 7, \quad D(2X-1) = 2^2 DX = 16/3.$$

Чтобы вычислить третий момент $E(X^3)$, вычислим интеграл

$$\int\limits_2^6 \frac{1}{4} x^3 dx = \frac{1}{16} x^4 |_2^6 = 81 - 1 = 80.$$

17. Таблица функции $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1.0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2.0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2.6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2.7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2.8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2.9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3.0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3.1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3.2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3.3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3.4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3.5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

18. Ответы

1. 1 726 272. **Решение**. В российском автомобильном номере 3 буквы и 3 цифры, поэтому число различных комбинаций из букв равно 12^3, а из цифр – $10^3 - 1$ (вычитаем единицу, так как номеров с тремя нулями не существует). Поэтому общее число способов равно $12^3(10^3 - 1) = 1\,726\,272$.

2. 10 000.

3. $3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 3 = 33$.

4. 10 000.

5. 160 000. **Решение**. Если один и тот же ученик может выйти к доске только один раз, то с учетом очередности у преподавателя есть $A_{20}^4 = 116\,280$ вариантов, а без учета – $C_{20}^4 = 4\,845$. Если же он на каждую задачу может вызвать любого из двадцати учеников, то число вариантов составляет $20^4 = 160\,000$.

6. 2 180. **Решение**. Общее число способов достать три карты из 36 равно C_{36}^3. Число способов вытащить три карты так, чтобы там не было ни одного туза, равно C_{32}^3. Остальные способы удовлетворяют условию, их общее число $C_{36}^3 - C_{32}^3 = \frac{36!}{3!33!} - \frac{32!}{3!29!} = \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{3!} - \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3!} = 34 \cdot 35 \cdot 6 - 32 \cdot 31 \cdot 5 = 2\,180$.

7. 120.

8. а) 16!, б) $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3\,360$.

9. 57.

10. $3C_{20}^5$.

11. 72, $\frac{1}{12}$.

12. 16, 15/16.

13. 5/36.

14. $\frac{1}{54}$.

15. $6^{-4} = \frac{1}{1296}$.

16. 5/18.

17. $\frac{3}{10000}$.

18. $\frac{k}{n}$.

19. 253.
20. 7/38.
21. 47/91.
22. 49/57.
23. 369/460.
24. 54/91.
25. 31/91.
26. 5/6.
27. 2/13.
28. 7/19.
29. $1-\left(\frac{C_{15}^5+C_8^1C_{15}^4}{C_{23}^5}\right)$; $\left(\frac{C_8^2}{C_{23}^5}\right)$.
30. $\left(\frac{C_{25}^3C_5^1+C_{25}^4}{C_{30}^4}\right)\left(\frac{C_{18}^3C_6^1+C_{18}^4}{C_{24}^4}\right)$.
31. а) $\frac{7}{36}$, б) $\frac{7}{18}$, в) $\frac{1}{2}$, г) $\frac{1}{2}$, д) $\frac{19}{36}$.
32. а) 0.12; б) 0.46; в) 0.42; г) 0.28.
33. 5/18.
34. 0.64.
35. 0.85.
36. 0.54.
37. 0.76.
38. 0.38.
39. 0.82; 0.42.
40. 0.15; 0.5.
41. 0.32; 0.68.
42. $\frac{1}{3}$.
43. $\frac{1}{2}$.
44. нет; 0.6.
45. нет; 0.625.
46. 5/9, 2/9, нет.
47. нет; 0.8.
48. 37/72; 7/108; нет.
49. нет; 0.25.

50. 2/3, нет.

51. 2/3.

52. 0.23.

53. 0.38.

54. 0.7.

55. 0.275, 34/55.

56. 0.028; $\frac{5}{54}$.

57. 0.56.

58. 0.215.

59. 34%.

60. 0.55.

61. 0.275.

62. $\frac{97}{382}$.

63. $\frac{18}{85}$.

64. 60/83.

65. 0.4.

66. 90/313.

67. $\frac{13}{18}$.

68. $\frac{36}{65}$.

69. 0.1323.

70. 5/16.

71. $1-(0.95)^4$.

72. 47/128.

73. 425/432.

74. 608/625.

75. 0.08146.

76. $\frac{81}{128}$.

77. $\frac{19}{144}$.

78. $\frac{53}{512}$; $\frac{1}{1024}$.

79. $1-(\frac{4}{5})^5$.

80. а) $28\cdot(0.01)^2(0.99)^6$; б) $1-(0.99)^8$.

81. а) ≈ 0.33; б) ≈ 0.05.

82. а) ≈ 0.185, б) ≈ 0.000475.

83. 0.5; 2.1; 7.9.

84. 0.4; 0.9; -2.3.

85. $EX = -7.75$; $DX = \frac{8667}{16}$; нет.

86.

x	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\dots$	$\frac{1}{2^n}$	$\dots$

$EX = 2$.

87. 0.002; -1.

88.

Чистый выигрыш	990	240	90	-10
P	0.002	0.016	0.02	0.962

, 0.018, $MX = -2$.

89. $P(X = k) = C_{10}^{k}(0.2)^k(0.8)^{10-k}$, $EX = 2$; $DX = 1.6$.

90. $5e^{-2}$.

91. $1 - 2e^{-1}$.

92. $1 - \frac{19}{3}e^{-2}$.

93. $1 - 5e^{-2}$.

94. $\frac{10}{3}e^{-2}$.

95. $13e^{-4}$.

96. $1 - 13e^{-4}$.

97. $1 - \frac{5}{2}e^{-1}$.

98.

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	0.02	0.03	0.05
1	0.18	0.27	0.45

.

99.

$X \setminus Y$	0	1
0	5/12	1/12
1	5/12	1/12

.

100.

$X \setminus Y$	0	1	2
0	25/144	5/144	1/144
1	25/72	5/72	1/72
2	25/144	5/144	1/144

.

101.

$X \setminus Y$	0	50000	100000
0	0.94^2	$0.94 \cdot 0.05$	$0.94 \cdot 0.01$
50000	$0.94 \cdot 0.05$	0.01^2	$0.01 \cdot 0.05$
100000	$0.01 \cdot 0.94$	$0.01 \cdot 0.05$	0.01^2

.

102. да,

$X \cdot Y$	0	1
p	0.7	0.3

.

103.

X	-1	1
p	0.4	0.6

,

Y	-1	0	1
p	0.2	0.3	0.5

, да,

XY	-2	-1	0	1	2
p	0.2	0.12	0.3	0.08	0.3

.

104.

X	0	2
p	0.2	0.8

,

Y	1	2	3
p	0.5	0.1	0.4

, нет,

XY	0	2	4	6
p	0.2	0.4	0.1	0.3

,

$X+Y$	1	2	3	4	5
p	0.1	0	0.5	0.1	0.3

.

105. нет,

XY	-4	-1	0	2
p	0.4	0.2	0.3	0.1

; -1.6.

106. а)

X	0	1	2
p	1/4	3/8	3/8

; б) $9/8$; $39/64$; $-9/8$ в) $-5/32$.

107. а)

Y	-1	0	1
p	0.4	0.4	0.2

; б) -0.2; 0.56; -4.2 в) 0.108; ≈ 0.42.

108. 2066/625.

109. а)

XY	-2	0	1
p	0.3	0.5	0.2

; б) -0.4; 1.84; -8.72 в) $\begin{pmatrix} 0.24 & -0.16 \\ -0.16 & 1.84 \end{pmatrix}$;.

110. а)

X	0	1	2
P	0.3	0.15	0.55

,

Y	-1	0	3
P	0.1	0.55	0.35

; б) $1.25,\ 0.95,\ 0.7875,\ 2.3475,\ 0.2125,\ -3.25,\ 61.8375$.

111. В).

112. В) и Г).

113. А).

114. Б).

115. -0.5.

116. -0.3.

117. $a = \frac{1}{550}$; $P = \frac{64}{275}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \frac{x^5+243}{275}, & x \in (-3; 2] \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

118. да, при $a = 1$.

119. $-1/4$; $3/8$.

120. $3/28$; $27/28$.

121. $1/4$; $5/8$.

122. 0; $1/3$; 0.

123. 7; $16/3$; 4.

124. $1/6$; $28/9$; $26/81$.

125. $1/4$; $8/5$; $8/75$.

126. $3/16$; 0; $12/5$.

127. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{8}, & x \in [0; 2] \\ 1, & x > 2. \end{cases}$; $\sqrt[3]{1.6}$.

128. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \in [-1; 0] \\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \in (0; 1] \\ 1, & x > 1. \end{cases}$; $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

129. $a = \frac{1}{32}$; $EX = \frac{25}{48}$; $P = \frac{11}{128}$.

130. $a = 0$; $b = 1/5$; $EX = 11/12$; $DX = 347/144$; $12/25$.

131. а) $C = \frac{3}{4}$, $EX = 0$, $DX = 0.2$, $P = \frac{35}{128}$; б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}, & x \in (-1; 1] \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

132. а) $a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, $P = 1/3$; б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}, & x \in (-a; a] \\ 1, & x > a. \end{cases}$

133. $\frac{2}{33}$, $-\frac{7}{11}$, $\frac{128}{363}$, $\frac{3}{11}$.

134. $\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1;2] \\ 0, & x \notin (1;2]. \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x-1, & x \in (1;2] \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

135. $\frac{5}{8}$.

136. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{x-2}{2}, & x \in [2;4] \\ 1, & x > 2. \end{cases}$, $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ \frac{1}{2}, & x \in [2;4]. \end{cases}$,

3, 1/3.

137. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{4}, & x \in [1;5] \\ 1, & x > 5. \end{cases}$, $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ \frac{1}{4}, & x \in [1;5]. \end{cases}$,

3, 4/3.

138. ≈ 0.1972.

139. а) ≈ 0.56; б) ≈ 0.003; в) ≈ 0.24; г) ≈ 0.07.

140. ≈ 0.6247; ≈ 36.13.

141. а) ≈ 0.0668; б) ≈ -0.56.

142. а) ≈ 0.3446; б) ≈ -1.2.

143. ≈ 0.82.

144. ≈ 0.8185.

145. ≈ 0.9987.

146. ≈ 0.6247; ≈ 19.34.

147. $X \sim N(-4; \sigma^2 = 34)$; ≈ 0.2451.

148. $EX = 1$, $DX = 25$, $P(X > 3,5) \approx 0.31$, $x_p \approx 7.4$.

149. $Y \sim N(30; \sigma^2 = 21)$; ≈ 0.0146.

150. а) $Y \sim N(110, \sigma^2 = 29)$, б) ≈ 0.0314, в) ≈ 118.86.

151. ≈ 0.3753.

152. ≈ 0.4514.

153. ≈ 0.00135.

154. ≈ 0.07; ≈ 0.67; ≈ 0.0082.

155. а) ≈ 0.07; б) ≈ 0.1525; в) ≈ 0.07.

156. а) ≈ 0.07; б) ≈ 0.1525; в) ≈ 0.1.

157. а) ≈ 0.2333; б) ≈ 0.3779; в) ≈ 0.0475.

158. а) ≈ 0.6554; б) ≈ 0.6449.
159. а) ≈ 0.0668; б) ≈ 0.7745.
160. А).
161. Б).
162. 0.8.
163. 0.6.
164. ≈ 0.8444.
165. ≈ 0.9876.
166. ≈ 0.2061.
167. ≈ 0.01.
168. ≈ 0.8854.
169. ≈ 0.03.
170. ≈ 0.1335.
171. ≈ 0.1525.
172. 385.
173. 71.
174. 148.
175. 134000.
176. ≈ 0.766.
177. ≈ 0.2976.
178. 0.6.
179. 0.91.
180. а) 1/4; б) 1/4.
181. $\rho_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ \frac{4-x}{8}, & x \in [0;4]. \end{cases}, \rho_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ \frac{4-y}{8}, & y \in [0;4]. \end{cases}.$
182. а) $a = \frac{1}{9}$, $\rho_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ \frac{x}{2}, & x \in [1;2]. \end{cases}, \rho_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ \frac{y}{6}, & y \in [1;2]. \end{cases};$
б) $EX = \frac{14}{9}$, $EY = \frac{28}{9}$; в) $\begin{pmatrix} \frac{13}{162} & 0 \\ 0 & \frac{7316}{81} \end{pmatrix}$.
183. ≈ 0.466.
184. $(2\Phi(a) - 1)(2\Phi(b) - 1)$.

Список литературы

[1] Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов. М.:ЮНИТИ, 1988. 1022 с.
[2] Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. 2-е изд. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2014. 473 с.
[3] Битнер Г.Г. Теория вероятностей. Ростов н/Д: Феникс, 2012. 329 с.
[4] Буре В.М., Парилина Е.М. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. СПб.: Издательство «Лань», 2013. 416 с.
[5] Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учебное пособие. 8-е изд. стер. М.: КНОРУС, 2014. 496 с.
[6] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для бакалавров 12-е изд. М.: Издательство Юрайт, 2014. 479 с.
[7] Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. 11-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2013. 404 с.
[8] Григорьев-Голубев В.В., Васильева Н.В., Кротов Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Руководство по решению задач: Учебник. СПб.: БХВ - Петербург, 2014. 256 с.
[9] Золотаревская Д.И. Теория вероятностей. Задачи с решениями: Учебное пособие. 6-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 168 с.
[10] Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В. Теория вероятностей и математическая статистике. Базовый курс с примерами и задачами: Учебник. 3-е изд., перераб. и доп.

М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 232 с.
[11] Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: Учебное пособие. М. ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005. 480 с.
[12] Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. 551 с.
[13] Мхитарян В.С., Астафьева Е.В., Миронкина Ю.Н., Трошин Л.И. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. 336 с.
[14] Писемский Д. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. 6-е изд. М.: Айрис-пресс, 2013. 288 с.
[15] Просветов Г.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Задачи и решения: Учебно-практическое пособие. М.: Изд-во «Альфа-Пресс», 2009. 272 с.
[16] Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Симонова Г.И. Теория вероятностей: Учебник для экономических и гуманитарных специальностей. М.: МЦНМО, 2009. 256 с.
[17] Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика. 2-е изд., переработанное. М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2008. 256 с.
[18] Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. М.: МЦНМО, 2014. 248 с.
[19] Фадеева Л.Н., Лебедев А.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. М.: Рид Групп, 2011. 496 с.

Об авторах

Макаров Алексей Алексеевич — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой Высшей математики НИУ ВШЭ;

Ивин Евгений Александрович — кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой Эконометрики и математических методов экономики МШЭ МГУ;

Курбацкий Алексей Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Эконометрики и математических методов экономики МШЭ МГУ.