

Труды

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 4, 2014

transactions.krc.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

СОДЕРЖАНИЕ

Ю. Г. Абакумов, М. А. Верхотурова, В. Г. Банин. ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ КОНСТАНТАХ В ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА LIP_1 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ БАСКАКОВА	3
Б. З. Белашев, А. В. Кабедев. АЛГОРИТМЫ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ	6
В. К. Болондинский, С. Н. Шереметьев. ПРИМЕНЕНИЕ КОСИНОР-АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СУТОЧНОЙ ДИНАМИКИ CO_2 - ГАЗООБМЕНА ПОБЕГОВ СОСНЫ	14
Г. А. Борисов, Т. П. Тихомирова. ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ НАГРУЗОЧНЫХ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕМЕНТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ	25
Р. В. Воронов, О. В. Лукашенко, А. П. Мошевикин. АВТОМАТИЧЕСКАЯ КАЛИБРОВКА ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ КАРТЫ СИЛ СИГНАЛОВ	29
М. Е. Галахова, А. Н. Кириллов. ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ	36
Х. Гао, В. В. Мазалов, Ц. Ху, А. В. Щипцова. РАВНОВЕСИЕ В ИГРЕ РАЗМЕЩЕНИЯ НА РЫНКЕ АВИАПЕРЕВОЗОК	41
Ю. В. Заика. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА	48
А. А. Ивашко. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ В УРНОВОЙ СХЕМЕ	62
А. Н. Кириллов, Н. В. Смирнов. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ В АЭРОТЕНКЕ	67

А. В. Колчин. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ РЕГИСТРОМ СДВИГА ..	75
А. В. Колчин, Н. Ю. Энатская. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК	80
А. В. Ласунский. О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИСТЕМЫ	87
А. Ю. Лукьянов, А. А. Когут, Б. З. Белашев. ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС МОНИТОРИНГА РАДОНА	93
С. Е. Михеев. О СГЛАЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ	100
С. Е. Михеев, П. Д. Морозов. ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИЭРМИТОВЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗВУКОВЫХ ФАЙЛОВ	106
Ю. С. Токарева. МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ	116
И. А. Чеплюкова. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА	121
И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ	130
И. А. Чернов, А. В. Толстикова. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ	137
Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин, А. В. Колчин. АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕРАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ	143
V. Kornikov, A. Repelyshev, A. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS	155
Хроника	
А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН – 15 лет	162
Е. К. Костикова, А. Н. Ретгиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (CITES-2013) (Петрозаводск, 25 августа – 5 сентября 2013 г.)	166
В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23–25 июня 2013 г.)	168
Е. Е. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе BOINC: фундаментальные исследования и разработки» (BOINC:FAST) (Петрозаводск, 9–13 сентября 2013 г.)	169
Е. Е. Ивашко. Национальный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26–29 ноября 2013 г.)	171
Юбилеи и даты	
Ю. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения)	173
А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировна Воинова (к 75-летию со дня рождения)	176
В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения)	178
Ю. В. Заика. Александр Николаевич Кириллов (к 60-летию со дня рождения)	181
Правила для авторов	183

Карельский научный центр
Российской академии наук

ТРУДЫ

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 4, 2014

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Петрозаводск
2014

Научный журнал
**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**
№ 4, 2014
Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Scientific Journal
**Proceedings of the Karelian Research Centre
of the Russian Academy of Sciences**
No 4, 2014
MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION
TECHNOLOGIES Series

Главный редактор

А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; В. Т. ВДОВИЦЫН, к. ф.-м. н., доцент; Т. ВИХАВАЙНЕН, доктор истории, проф.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; С. П. ГРИППА, к. г. н., доцент; Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; А. С. ИСАЕВ, академик РАН, д. б. н., проф.; В. Т. КАЛИННИКОВ, академик РАН, д. х. н., проф.; А. М. КРЫШЕНЬ (зам. главного редактора), д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Ф. П. МИТРОФАНОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; И. И. МУЛЛОНИН, д. фил. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. ОКРЕПИЛОВ, академик РАН, д. э. н.; О. Н. ПУГАЧЕВ, член-корр. РАН, д. б. н.; Ю. В. САВЕЛЬЕВ, д. э. н.; Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; S. P. GRIPPA, PhD (Geog.), Assistant Prof.; A. S. ISAEV, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. T. KALINNIKOV, RAS Academician, DSc (Chem.), Prof.; A. M. KRYSHEN' (Deputy Editor-in-Chief), DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; F. P. MITROFANOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; I. I. MULLONEN, DSc (Philol.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. OKREPILOV, RAS Academician, DSc (Econ.); O. N. PUGACHYOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); Yu. V. SAVELIEV, DSc (Econ.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); V. T. VDOVITSYN, PhD (Phys.-Math.), Assistant Prof.; T. VIHAVAINEN, PhD (Hist.), Prof.; A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Редакционная коллегия серии «Математическое моделирование и информационные технологии»

В. Т. ВДОВИЦЫН, к. ф.-м. н., доцент; Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; В. Ф. КОЛЧИН, д. ф.-м. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент.

Editorial Board of the «Mathematical Modeling and Information Technologies» Series

V. T. VDOVITSYN, PhD (Phys.-Math.), Assistant Prof.; YU. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. F. KOLCHIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; YU. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.

ISSN 1997-3217 (печатная версия)
ISSN 2312-4504 (онлайн-версия)

Зав. редакцией А. И. Мокеева
Адрес редакции: 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
тел. (8142)762018; факс (8142)769600
E-mail: trudy@krc.karelia.ru
Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>

© Карельский научный центр РАН, 2014

Научное издание

**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**

№ 4, 2014

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению
Президиума Карельского научного центра РАН*

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-48848 от 02.03.2012 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций

Редактор А. И. Мокеева
Оригинал-макет Е. Н. Спектор
Стилевой файл А. С. Румянцев

Подписано в печать 27.06.2014. Формат 60x84¹/₈.
Гарнитура CMR. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 21,16. Усл. печ. л. 21,86.
Тираж 500 экз. Изд. № 472. Заказ 226.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК

А. В. Колчин, Н. Ю. Энатская¹

¹Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Рассматриваются различные процедуры перечисления всех исходов схемы перестановок, устанавливается взаимно однозначное соответствие между ними и их номерами в каждой процедуре перечисления, приводятся способы моделирования исходов схемы.

Ключевые слова: перечислительные задачи комбинаторного анализа, схема размещения, перестановка.

A. V. Kolchin, N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME

We consider several procedures to number all outcomes of a permutation scheme, establish a one-to-one correspondence between the outcome and its number generated in the numbering procedure, and give some methods to simulate the outcomes.

Key words: enumerative combinatorics, allocation scheme, permutation.

1. ПРОЦЕДУРЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК

Схема перестановок длины r возникает при взаимном упорядочивании r различных элементов между собой или при размещении r различных частиц по r различным ячейкам, вмещающим по одной частице. Общее число исходов схемы равно $r!$.

Рассмотрим несколько способов перечисления исходов схемы.

1.1. Метод графов перечисления исходов схемы перестановок

Построим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до r номерами, размещая каждый из них последовательно и случайно относительно каждой перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого, и нумеруя слева напра-

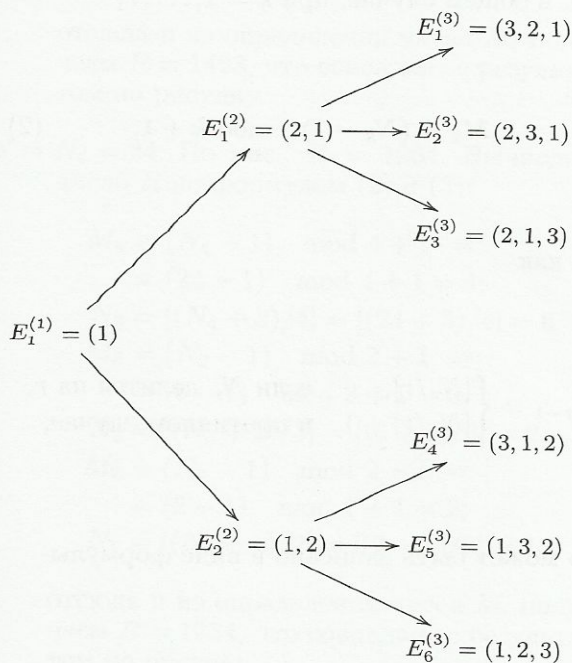
во получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, то есть при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, \dots, a_j)$ i -е состояние процесса (то есть i -ю перестановку a_1, \dots, a_j) на j -м шаге. Тогда граф переходов будет иметь вид, показанный на рисунке.

1.2. Монотонное перечисление исходов схемы перестановок

Будем сопоставлять каждой i -й из $r!$ перестановок длины r число R_i , составленное из номеров ее элементов, $i = 1, \dots, r!$, и будем перечислять все исходы схемы, например, в порядке роста чисел R_i . Тогда среди $r!$ чи-

сел образуется $r!/r = (r-1)!$ групп соответствующих перестановок длины r с фиксированными первыми элементами в порядке их роста от 1 до r , и в каждой из них имеется $(r-1)!/(r-1) = (r-2)!$ групп перестановок с фиксированными первыми двумя элементами в порядке роста номеров второго элемента, исключая номер первого фиксированного элемента, и так далее. Перечисляя таким образом перестановки элементов до последней с фиксированными остальными $r-1$ элементами, получаем все перестановки в порядке роста чисел R_i .

Продemonстрируем эту процедуру монотонного перебора перестановок на примере.



Граф переходов

Пример 1. 1. Пусть $r = 3$, $r! = 3! = 6$, $(r-1)! = 2$, $(r-2)! = 1$. Получаем очевидную последовательность перестановок в порядке роста чисел R_i : (123), (132), (213), (231), (312), (321).

2. Пусть $r = 4$, $r! = 4! = 24$, $(r-1)! = 3! = 6$, $(r-2)! = 2$, $(r-3)! = 1$. Получаем следующую последовательность перестановок в порядке роста чисел R_i , причем среди $r = 4$ групп по $(r-1)! = 6$ элементов с фиксированным первым элементом в порядке его роста, среди каждой из которых по $(r-2)! = 2$ элемента с фиксированным вторым элементом, а третий и четвертый элементы перечисляются в

2! = 2 порядках по мере роста чисел R_i : (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (2134), (2143), (2314), (2341), (2413), (2431), (3124), (3142), (3214), (3241), (3412), (3421), (4123), (4132), (4213), (4231), (4312), (4321).

1.3. Метод отбраковки монотонного перечисления исходов схемы перестановок

Из предыдущего параграфа следует, что все исходы схемы перестановок находятся для описанных там же чисел R_i в диапазоне от числа $(1\ 2 \dots r)$ до числа $(r\ (r-1) \dots 1)$ в порядке их роста. Если считать составляющие их цифры номерами элементов и провести в каждом из них сначала отбраковку чисел с цифрами больше r и затем маркировку цифр по частотам их присутствия в числе, то для получения всех требуемых перестановок в порядке роста чисел R_i нужно оставить в исходной последовательности только числа с единичными маркировками. В результате получаем перечисление перестановок в том же порядке, что и в предыдущем параграфе. Покажем это на примере.

Пример 2. Пусть $r = 3$. Тогда числа R_i лежат в диапазоне от 123 до 321. Выкинем из них числа, состоящие из цифр, отличных от данных: 1, 2, 3. Получим растущие числа 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321. Из них с единичными маркировками останутся числа 123, 132, 213, 231, 312, 321, которые и являются всеми перечисленными в монотонно возрастающем порядке (в смысле R_i) исходами схемы перестановок длины 3.

2. НУМЕРАЦИЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК

Установление полноты перебора всех исходов схемы перестановок и удобство дальнейшего ее использования требует для каждой из предложенных процедур решения обратной и прямой задач нахождения соответствия чисел R_i и их номеров, то есть, соответственно, нахождения номера N по заданному числу R и нахождения числа R для данного номера N , где, как и раньше, число R представляет данную перестановку.

2.1. Нумерация исходов схемы перестановок, перечисленных методом графов

Обратная задача. Пусть задана перестановка размера r или число R , ей соответствующее. Требуется найти его номер N , который

в силу процедуры формирования перестановок (см. п.1, рис.) определяется числами M_i , $i = 1, \dots, r$, где M_i — номер места элемента i среди элементов перестановки от 1 до i , считая слева направо. Тогда для номера N получаем формулу

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + M_r, \quad (1)$$

или, так как $M_1 = 1$ и $r!/i! = 1$ при $i = r$, формулу (1) можно представить в виде

$$N = \sum_{i=2}^r (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + 1.$$

Покажем, как работает формула (1) при нахождении номера N по данному числу R на примерах.

Пример 3. Пусть $r = 4$.

$R = 2431$. По рис., $N = N_4 = 6$. Вычислим N по (1):

$$M_1 = 1, \quad M_2 = 1, \quad M_3 = 2, \quad M_4 = 2,$$

откуда следует, что

$$N = N_4 = (1 - 1)(4!)/(2!) + (2 - 1)(4!)/(3!) + 2 = 6.$$

$R = 1423$. По рис., $N = N_4 = 22$. Вычислим N по (1):

$$M_1 = 1, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = 3, \quad M_4 = 2,$$

откуда следует, что

$$N = N_4 = (2 - 1)(4!)/(2!) + (3 - 1)(4!)/(3!) + 2 = 22.$$

$R = 1234$. По рис., $N = N_4 = 24$. Вычислим N по (1):

$$M_1 = 1, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = 3, \quad M_4 = 4,$$

откуда следует, что

$$N = N_4 = (2 - 1)(4!)/(2!) + (3 - 1)(4!)/(3!) + 4 = 24.$$

Прямая задача. Пусть задан номер $N = N_r$ перестановки R размера r или числа R . Требуется найти число R . В силу процедуры формирования перестановок (см. п.1, рис.) число R определяется числами M_i , $i = 1, \dots, r$, где M_i — номер позиции элемента i среди чисел

перестановки от 1 до i , считая слева направо. Обозначим через N_k номер перестановки длины k в данной процедуре, порождающей искомую перестановку длины r с данным номером $N = N_r$. Тогда, так как $M_r = r$, если N делится на r , и $M_r = N \pmod{r}$ в противном случае, что может быть записано в виде формулы

$$M_r = (N_r - 1) \pmod{r + 1},$$

или, в общем случае, при $k = 1, \dots, r$,

$$M_k = (N_k - 1) \pmod{k + 1}, \quad (2)$$

так как

$$N_{r-1} = \begin{cases} [N_r/r], & \text{если } N_r \text{ делится на } r, \\ [N_r/r] + 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

что может быть записано в виде формулы

$$N_{r-1} = \left\lfloor \frac{N_r + r - 1}{r} \right\rfloor,$$

где $[Z]$ — целая часть числа Z , или, в общем случае, при $k = 1, \dots, r$,

$$N_{k-1} = \left\lfloor \frac{N_k + r - k}{r - k + 1} \right\rfloor. \quad (3)$$

Покажем, как использовать формулы (2) и (3) для нахождения числа R по данному номеру $N = N_r$ на примерах.

Пример 4. Пусть $r = 4$.

$N = N_4 = 22$. По рис., $R = 1423$. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$\begin{aligned}M_4 &= (N_4 - 1) \bmod 4 + 1 = \\&= (22 - 1) \bmod 4 + 1 = 2; \\N_3 &= [(N_4 + 3)/4] = [(22 + 3)/4] = 6; \\M_3 &= (N_3 - 1) \bmod 3 + 1 = \\&= (6 - 1) \bmod 3 + 1 = 3; \\N_2 &= [(N_3 + 2)/3] = [(6 + 2)/3] = 2; \\M_2 &= (N_2 - 1) \bmod 2 + 1 = \\&= (2 - 1) \bmod 2 + 1 = 2; \\N_1 &= [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1;\end{aligned}$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем $R = 1423$, что совпадает с результатом по рисунку.

$N = N_4 = 24$. По рис., $R = 1234$. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$\begin{aligned}M_4 &= (N_4 - 1) \bmod 4 + 1 = \\&= (24 - 1) \bmod 4 + 1 = 4; \\N_3 &= [(N_4 + 3)/4] = [(24 + 3)/4] = 6; \\M_3 &= (N_3 - 1) \bmod 3 + 1 = \\&= (6 - 1) \bmod 3 + 1 = 3; \\N_2 &= [(N_3 + 2)/3] = [(6 + 2)/3] = 2; \\M_2 &= (N_2 - 1) \bmod 2 + 1 = \\&= (2 - 1) \bmod 2 + 1 = 2; \\N_1 &= [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1;\end{aligned}$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем $R = 1234$, что совпадает с результатом по рисунку.

$N = N_4 = 13$. По рис., $R = 4312$. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$\begin{aligned}M_4 &= (N_4 - 1) \bmod 4 + 1 = \\&= (13 - 1) \bmod 4 + 1 = 1; \\N_3 &= [(N_4 + 3)/4] = [(13 + 3)/4] = 4; \\M_3 &= (N_3 - 1) \bmod 3 + 1 = \\&= (4 - 1) \bmod 3 + 1 = 1; \\N_2 &= [(N_3 + 2)/3] = [(4 + 2)/3] = 2; \\M_2 &= (N_2 - 1) \bmod 2 + 1 = \\&= (2 - 1) \bmod 2 + 1 = 2; \\N_1 &= [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1;\end{aligned}$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем $R = 4312$, что совпадает с результатом по рисунку.

2.2. Нумерация исходов схемы перестановок при их монотонном перечислении

Под монотонным перечислением подразумеваем перебор исходов схемы перестановок в порядке роста чисел R_i , представляющих перестановки.

Заметим, что при двух представленных в п.1 способах перечисления исходов схемы перестановок в итоге получаем их в монотонно возрастающем порядке в смысле чисел R_i , поэтому соответствие этих чисел и их номеров одинаково для обеих процедур перечисления исходов схемы.

Обратная задача. Пусть задана перестановка R размера r . Требуется найти ее номер $N = N_r$ при монотонно возрастающем перечислении всех исходов схемы перестановок. Искомый номер N определяется числами M_i , $i = 1, \dots, r - 1$, где M_i есть порядковый номер по возрастанию для элемента на i -м месте среди элементов правее i -го места от 1 до i . Тогда из процедуры перечисления перестановок в п.1 следует, что искомый номер $N = N_r$ определяется по формуле

$$N_r = \sum_{i=1}^{r-2} (M_i - 1)(r - 1)! + M_{r-1}. \quad (4)$$

Покажем на примерах решение обратной задачи по формуле (4).

Пример 5. Пусть $r = 4$. Для всех R при их перечислении как в п.1.2 в количестве $r! = 4! = 24$ найдем их номера по (4) при заранее известных номерах для проверки и представим результаты решения в таблице.

Прямая задача. Пусть задан номер $N = N_r$ перестановки длины r или числа R при монотонно возрастающем порядке перечисления чисел R , описанном в п.1.2. Требуется найти это число R , которое, как следует из процедуры перечисления перестановок, определяется численностями групп исходов с совпадающими первыми, первыми двумя, тремя и так далее элементами, которые соответственно равны $r!/r = (r - 1)!$, $(r - 1)!/(r - 1) = (r - 2)!$, и так далее. Поэтому, если искомое число $R = I_1 I_2 \dots I_r$, где I_1, I_2, \dots, I_r — номера элементов перестановки, составляющих число R , то задача сводится к нахождению этих номеров. Пусть i_1, i_2, \dots, i_r — соответствующие числам I_1, I_2, \dots, I_r их относительные порядковые номера по возрастанию: i_1 — порядковый номер числа I_1 среди чисел I_1, I_2, \dots, I_r ,

i_2 — порядковый номер числа I_2 среди чисел I_2, I_3, \dots, I_r , и так далее. Тогда определение числа $R = I_1 I_2 \dots I_r$ сводится к нахождению значений i_1, i_2, \dots, i_r и производится путем следующих последовательных вычислений:

$$i_1 = \begin{cases} [N_r / (r-1)!] + 1, & \text{если число } N_r \text{ не} \\ & \text{делится на } (r-1)!, \\ [N_r / (r-1)!] = i_1^* & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

что можно записать в виде единой формулы

$$i_1 = [(N_r + (r-1)! - 1) / (r-1)!]; \\ N_{r-1} = N_r - i_1^*(r-1)!;$$

аналогично

$$i_2 = [(N_{r-1} + (r-2)! - 1) / (r-2)!]; \\ N_{r-2} = N_{r-1} - i_2^*(r-2)!;$$

а в общем случае вычисления проводятся по формулам

$$i_k^* = [N_{r-k+1} / (r-k)!], \\ i_k = [(N_{r-k+1} + (r-k)! - 1) / (r-k)!], \quad (5) \\ N_{r-k} = N_{r-k+1} - i_k^*(r-k)!,$$

где $k = 1, \dots, r-1$.

Замечание 1. Если в процессе вычисления окажется, что $i_k = 0$, то это, в силу выбранной процедуры нумерации перестановок в п.1.2, означает, что в перестановке с $(k-1)$ первыми фиксированными номерами элементов I_1, \dots, I_{k-1} все остальные не найденные еще номера элементов перечисляются в порядке их убывания, так как это соответствует последней перестановке из ненайденных номеров в группе, то есть максимальному числу из не использованных еще номеров после $k-1$ первых фиксированных.

Покажем порядок вычислений для определения числа R по данному $N = N_r$ на примерах.

Решение обратной задачи по формуле

N	R	M_1	M_2	M_3	расчет $N = N_4$ по (4)
1	1234	1	1	1	$N = (1-1)3! + (1-1)2! + 1 = 1$
2	1243	1	1	2	$N = (1-1)3! + (1-1)2! + 2 = 2$
3	1324	1	2	1	$N = (1-1)3! + (2-1)2! + 1 = 3$
4	1342	1	2	2	$N = (1-1)3! + (2-1)2! + 2 = 4$
5	1423	1	3	1	$N = (1-1)3! + (3-1)2! + 1 = 5$
6	1432	1	3	2	$N = (1-1)3! + (3-1)2! + 2 = 6$
7	2134	2	1	1	$N = (2-1)3! + (1-1)2! + 1 = 7$
8	2143	2	1	2	$N = (2-1)3! + (1-1)2! + 2 = 8$
9	2314	2	2	1	$N = (2-1)3! + (2-1)2! + 1 = 9$
10	2341	2	2	2	$N = (2-1)3! + (2-1)2! + 2 = 10$
11	2413	2	3	1	$N = (2-1)3! + (3-1)2! + 1 = 11$
12	2431	2	3	2	$N = (2-1)3! + (3-1)2! + 2 = 12$
13	3124	3	1	1	$N = (3-1)3! + (1-1)2! + 1 = 13$
14	3142	3	1	2	$N = (3-1)3! + (1-1)2! + 2 = 14$
15	3214	3	2	1	$N = (3-1)3! + (2-1)2! + 1 = 15$
16	3241	3	2	2	$N = (3-1)3! + (2-1)2! + 2 = 16$
17	3412	3	3	1	$N = (3-1)3! + (3-1)2! + 1 = 17$
18	3421	3	3	2	$N = (3-1)3! + (3-1)2! + 2 = 18$
19	4123	1	1	1	$N = (4-1)3! + (1-1)2! + 1 = 19$
20	4132	4	1	2	$N = (4-1)3! + (1-1)2! + 2 = 20$
21	4213	4	2	1	$N = (4-1)3! + (2-1)2! + 1 = 21$
22	4231	4	2	2	$N = (4-1)3! + (2-1)2! + 2 = 22$
23	4312	4	3	1	$N = (4-1)3! + (3-1)2! + 1 = 23$
24	4321	4	3	2	$N = (4-1)3! + (3-1)2! + 2 = 24$

Пример 6. Пусть $r = 4$. Тогда все перестановки $r! = 4! = 24$ перечислены со своими номерами в примере 5. Будем вычислять числа R по данным N по формулам (5) с проверкой по примеру 5.

$N = N_4 = 22$. По примеру 5, $R = 4231$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [22/6] = 3; \quad i_1 = [(22 + 6 - 1)/6] = 4; \\ N_3 = 22 - 3(4 - 1)! = 4;$$

I_1 есть i_1 -й, то есть четвертый по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 4$;

$$i_2^* = [4/2] = 2; \quad i_2 = [(4 + 2 - 1)/2] = 2; \\ N_2 = 4 - 2(3 - 1)! = 0;$$

I_2 есть i_2 -й, то есть второй по величине элемент из элементов 1, 2, 3, отсюда получаем, что $I_2 = 2$;

$$i_3^* = [0/1] = 0; \quad i_3 = [(0 + 1 - 1)/1] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 1 и 3 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_3 = 3$, $I_4 = 1$, тогда получаем $R = 4231$, что совпадает с 22-й перестановкой из примера 5.

$N = N_4 = 13$. По примеру 5, $R = 3124$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [13/6] = 2; \quad i_1 = [(13 + 6 - 1)/6] = 3; \\ N_3 = 13 - 2(4 - 1)! = 1;$$

I_1 есть i_1 -й, то есть третий по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 3$;

$$i_2^* = [1/2] = 0; \quad i_2 = [(1 + 2 - 1)/2] = 1; \\ N_2 = 1 - 0(3 - 1)! = 1;$$

I_2 есть i_2 -й, то есть первый по величине элемент из элементов 1, 2, 4, отсюда получаем, что $I_2 = 1$;

$$i_3^* = [1/1] = 1; \quad i_3 = [(1 + 1 - 1)/1] = 1,$$

I_3 есть i_3 -й, то есть первый по величине элемент из элементов 2, 4, отсюда получаем, что $I_3 = 2$, значит, $I_4 = 4$. Тогда получаем, что $R = 3124$, что совпадает с 13-й перестановкой из примера 5.

$N = N_4 = 24$. По примеру 5, $R = 4321$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [24/6] = 4; \quad i_1 = [(24 + 6 - 1)/6] = 4; \\ N_3 = 24 - 4(4 - 1)! = 0;$$

I_1 есть i_1 -й, то есть четвертый по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 4$;

$$i_2^* = [0/2] = 0; \quad i_2 = [(0 + 2 - 1)/2] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 1, 2 и 3 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_2 = 3$, $I_3 = 2$, $I_4 = 1$, тогда получаем, что $R = 4321$, что совпадает с 24-й перестановкой из примера 5.

$N = N_4 = 14$. По примеру 5, $R = 3142$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [14/6] = 2; \quad i_1 = [(14 + 6 - 1)/6] = 3; \\ N_3 = 14 - 2(4 - 1)! = 2;$$

I_1 есть i_1 -й, то есть третий по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 3$;

$$i_2^* = [2/2] = 1; \quad i_2 = [(2 + 2 - 1)/2] = 1; \\ N_2 = 2 - 1(3 - 1)! = 0;$$

I_2 есть i_2 -й, то есть первый по величине элемент из элементов 1, 2, 4, отсюда получаем, что $I_2 = 1$;

$$i_3^* = [0/1] = 0; \quad i_3 = [(0 + 1 - 1)/1] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 2 и 4 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_3 = 4$, $I_4 = 2$, тогда получаем, что $R = 3142$, что совпадает с 14-й перестановкой из примера 5.

3. СПОСОБЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕСТАНОВОК

1. Если установлено взаимно однозначное соответствие между всеми перестановками R и их номерами N , что было сделано в п.2, то моделирование перестановок производим методом маркировки (см. [1]), при котором отрезок $[0, 1]$ делим на $r!$ равных частей. Генерируем случайное число x и считаем смоделированной перестановку с номером части отрезка $[0, 1]$, на которую попадает число x .

Замечание 2. Если $r!$ так велико, что $1/r!$ меньше точности генерируемого случайного числа, то оно будет соответствовать нескольким номерам частей отрезка $[0, 1]$. Тогда среди них равновероятно методом маркировки выбираем одну конкретную перестановку.

2. Можно моделировать перестановки без их предварительной нумерации путем выполнения следующих шагов при их размере r :

1. генерируем r случайных чисел $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$;
2. строим для последовательности \bar{x} вариационный ряд $\bar{x}_\bullet = (x_{(1)}, \dots, x_{(r)})$;
3. выписываем номера элементов \bar{x} в порядке просмотра вектора $\bar{x}_{(\bullet)}$, тем самым получаем перестановку R .

Замечание 3. В шаге 3 можно поменять местами векторы \bar{x} и $\bar{x}_{(\bullet)}$.

О МЕТОДЕ МАРКИРОВКИ

Для полноты изложения приведем кратко основные сведения о методе маркировки (см. [1]).

Метод маркировки является одним из методов генерирования («разыгрывания») дискретной случайной величины с заданным законом распределения

$$P(X = x_k) = p_k.$$

На отрезке $[0, 1]$ изобразим точки вида $\sum_{k=1}^s p_k$, $s = 1, 2, \dots$

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Колчин Андрей Валентинович
к. ф.-м. н.
эл. почта: andrei.kolchin@gmail.com

Энатская Наталия Юрьевна
доцент, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. М. Пioneрская, 12, Москва,
Россия, 113054
эл. почта: nat1943@mail.ru

Пусть r — возможное значение случайной величины R , равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, тогда

$$\begin{aligned} P(0 < r < p_1) &= p_1, \\ P(p_1 < r < p_1 + p_2) &= p_2, \dots, \\ P\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r < \sum_{i=1}^k p_i\right) &= p_k, \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что попадание случайного числа R на k -й отрезок моделирует полученное значение случайной величины $X = x_k$.

Замечание. Для многих основных распределений так называемый коэффициент воспроизводимости $\gamma_k = p_{k+1}/p_k$ имеет для всех k удобное общее выражение как функции от k . Поэтому в данном случае при использовании метода маркировки нет необходимости загрузки в память всего ряда распределения, вместо этого $\{p_k\}$ вычисляется по мере необходимости по формуле

$$p_{k+1} = \gamma_k p_k.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н. Ю., Хакиммуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012.

Kolchin, Andrey
e-mail: andrei.kolchin@gmail.com

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
Higher School of Economics
12 M. Pioneerskaya St.
113054 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru