ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

В.В. Платонов

ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ ПАРЛАМЕНТА

Препринт WP7/2004/03

Серия WP7
Теория и практика общественного выбора

Москва
ГУ ВШЭ
2004

УДК 519.2:328
ББК 22.172
П37

П37 **Платонов В.В.** Применение критериев согласия для оценки представительности парламента. Препринт. WP7/2004/03 — М.: ГУ ВШЭ, 2004. — 16 с.

Исследуется возможность применения статистических критериев согласия для оценки представительности парламентов, формируемых методом пропорционального представительства. Вводятся и анализируются индексы представительности парламента, соответствующие критериям согласия Колмогорова и Пирсона.

УДК 519.2:328
ББК 22.172

Препринты ГУ ВШЭ размещаются на сайте: http://www.hse.ru/science/preprint/

Введение

Индексы представительности парламента появились как один из инструментов анализа избираемых методом пропорционального представительства парламентов, который позволяет оценить степень соответствия результата выборов с идеалом «один избиратель — один голос». Здесь имеется в виду, что при формировании различного рода представительных органов предпочтения всех избирателей должны по возможности учитываться с равным весом, т.е. состав парламента должен как можно более точно отражать структуру предпочтений избирателей, в идеале стремясь к тому, чтобы доля мест в парламенте, полученных каждой партией (блоком, кандидатом), в точности совпала с долей полученных ею голосов.

Необходимость использования такого рода индексов обусловлена тем, что в общем случае достижение «идеального пропорционального представительства» невозможно из-за целочисленности мест, занимаемых в парламенте каждой из партий, а также различных законодательных ограничений (таких как ограничение на минимальный процент набранных голосов избирателей, на количество партий в парламенте и т.п.), специфических для выборов разного уровня в различных странах.

Практически все индексы представительности основаны на сравнении числа голосов, отданных избирателями за различные партии, и мест в парламенте, полученных этими партиями. К настоящему моменту изобретено множество индексов представительности, наиболее известными из которых являются индексы Рэ [10], Галлахера [6], Лузмора — Хэнби [9], д'Ондта [7] и др. (см. также [1, 8]). Идеями для создания многих из них послужили различные понятия, критерии и методы из разных областей математики, такие как, например, арифметическое среднее (индекс Рэ) или метод наименьших квадратов (Галлахера). В настоящей работе вводятся и исследуются два новых индекса представительности парламента, основанные на критериях согласия Колмогорова и Пирсона из математической статистики.

Автор выражает огромную признательность за постановку задачи и ряд ценных указаний Ф.Т. Алескерову, а также благодарит А.В. Кедрову, А.В. Соколову и В.И. Якубу за высказанные ими замечания, которые помогли существенно улучшить текст статьи.

Критерии согласия Колмогорова и Пирсона

Статистические критерии согласия применяются в так называемой задаче проверки согласия, суть которой заключается в следующем: по выборке G_n (размера n) из совокупности с некоторой генеральной функцией распределения G требуется проверить гипотезу H о совпадении этой функции с заданной функцией распределения F:

$$H : F = G.$$

Очевидно, что в зависимости от размера выборки n, полученная по этой выборке эмпирическая функция распределения G_n будет в той или иной степени отличаться от G. Чтобы контролировать это различие, необходимо подобрать хорошую меру расхождения между экспериментальными данными и теоретическим распределением. Критерии согласия задаются с помощью статистик, каким-либо образом измеряющих «расстояние» между эмпирической и гипотетической теоретической функциями распределения:

$$S = \rho\left(F, G_n\right).$$

Статистики подбираются таким образом, что значение S стремится к нулю с ростом выборки, если гипотеза H верна:

$$S = \rho\left(G, G_n\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и, соответственно, не стремится к нулю, если гипотеза H не верна.

В настоящей статье рассматриваются критерии Колмогорова и Пирсона [5]. Критерий согласия Колмогорова широко применяется для непрерывных функций распределения, однако, он может использоваться и для дискретного случая. Статистика Колмогорова задается следующим образом:

$$S^K = \sqrt{n} \sup_t \left|F(t) - G_n(t)\right|.$$

Критерий согласия Пирсона изначально вводится для дискретных функций распределения. Пусть множество действительных чисел $\mathbb{R}$ разбито на конечное число непересекающихся подмножеств $D_1, \ldots, D_l$; пусть P — вероятность, соответствующая заданной функции распределения $F(t)$. Обозначим $P_i = P(D_i)$, $i = \overline{1, l}$. Очевидно, выполнено соотношение

$$\sum_{i=1}^{l} P_i = 1.$$

Теперь рассмотрим независимую выборку $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и определим

$$n_i = \left|\left\{ j : x_j \in D_i \right\}\right|, \quad i = \overline{1, l}.$$

Статистика Пирсона вводится как мера совпадения эмпирических частот n_i / n и теоретических вероятностей P_i. Как показал Пирсон, статистика будет обладать рядом положительных свойств, если ввести ее следующим образом:

$$S^P = n \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{P_i} \left(\frac{n_i}{n} - P_i \right)^2.$$

Индексы представительности, основанные на критериях согласия

Вернемся к индексам представительности. Рассмотрим выборы в парламент, состоящий из n мест, за которые борются l партий. Для упрощения дальнейших обозначений присвоим каждой партии порядковый номер от 1 до l в соответствии с количеством набранных ею голосов, упорядочив их значения по убыванию (т.е. партию, набравшую наибольшее количество голосов, условно назовем первой, следующую — второй и т.д.). Пусть v_i — доля голосов избирателей, а n_i — число мест, полученных партией i $i = \overline{1, l}$. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n.$$

Обозначим долю мест партии i через r_i:

$$r_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = \overline{1, l}.$$

Теперь заметим, что формирование парламента методом пропорционального представительства можно в некоторой степени интерпретировать в статистических терминах. Так, результаты голосования избирателей можно рассматривать как исходную дискретную функцию распределения, в которой в роли непересекающихся подмножеств D_1, ..., D_l выступают политические партии, а вероятности P_i отнесения объекта к подмножеству D_i (вероятность того, что взятый наугад избиратель проголосовал за партию i), очевидно, соответствуют долям полученных партиями голосов v_i. Тогда сформированный методом пропорционального представительства парламент можно интерпретировать как независимую выборку размера n, в которой число объектов, принадлежащих к какому-либо классу i, соответствует количеству мест, полученных данной партией n_i.

Таким образом, статистики Колмогорова и Пирсона, задающие соответствующие критерии согласия, можно рассматривать как индексы представительности, измеряющие различие между результатом голосования (исходной дискретной функцией распределения) и результатом процедуры распределения мест в парламенте (эмпирической функцией распределения):

$$I^K = \sqrt{n}\max_i |v_i - r_i|,$$

$$I^P = n\sum_{i=1}^{l}\frac{(v_i - r_i)^2}{v_i}.$$

Свойства индексов представительности Колмогорова и Пирсона при отсутствии законодательных ограничений

Вначале рассмотрим случай, когда избирательный «порог» и другие законодательные ограничения отсутствуют, т.е. когда расхождения между долями голосов и мест в парламенте $|v_i - r_i|$, полученными каждой из партий i, возникают лишь из-за того, что размер парламента n уступает числу голосующих избирателей. Интуитивно понятно, что чем больше размер парламента, тем меньше должна быть величина подобных искажений, хотя в общем случае это не так (например, если из 100 избирателей за партии A и B проголосовали по 50, то при любом четном n имеем $|v_A - r_A| = |v_B - r_B| = 0$, а при нечетном, напротив,

$|v_A - r_A| = |v_B - r_B| \neq 0$). Тем не менее, можно показать, что $|v_i - r_i| \to 0$ при $n \to \infty$.

Обозначим через n_i^* «точное» число мест, которое должна была бы получить партия i, если бы места в парламенте можно было делить на дробные части:

$$n_i^* = nv_i$$

Тогда

$$|v_i - r_i| = \left|\frac{n_i^*}{n} - \frac{n_i}{n}\right| = \frac{|n_i^* - n_i|}{n}.$$

Большинство используемых в настоящее время процедур распределения мест в парламенте устроено так, чтобы разница между «точным» и полученным числом мест для каждой партии не могла составлять более одного целого места

$$|n_i^* - n_i| \le 1$$

таким образом,

$$|v_i - r_i| = \frac{|n_i^* - n_i|}{n} \le \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Покажем, что в этом случае значения индексов I^K и I^P также стремятся к нулю с ростом размера парламента n:

$$I^K = \sqrt{n}\max_i |v_i - r_i| \le \sqrt{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$$I^P = n\sum_{i=1}^{l}\frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} \le n\sum_{i=1}^{l}\frac{(1/n)^2}{v_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{v_i} \le \frac{const}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Чтобы проиллюстрировать данное свойство, рассчитаем значения вышеупомянутых индексов для разных размеров парламента при некотором заданном распределении голосов v_i, $i = \overline{1, l}$. Следует заметить, что избирательные системы пропорционального представительства в чистом виде встречаются крайне редко, так как снятие всех ограничений при достаточно большом размере парламента неизбежно приведет к появлению огромного числа мелких партий. Поэтому, как правило, процедура парламентских выборов состоит из двух этапов: на первом этапе определяются партии, выигравшие выборы, которые получают право быть представленными в парламенте, а уже затем места распределяются между победившими партиями пропорционально количеству набранных ими голосов.

В качестве примера воспользуемся результатами голосования в Государственную Думу РФ в 2003 г. [11]. Как известно, при проведении данных выборов действовало ограничение в виде избирательного порога в 5% голосов, поэтому мы рассмотрим уже финальный этап распределения мест между преодолевшими этот барьер партиями. В табл. 1 показано, как были распределены голоса избирателей между победившими партиями.

Таблица 1. *Результаты выборов в ГД РФ 2003 г. (партии, прошедшие в парламент)*

	% набранных голосов от общего числа избирателей	% набранных голосов от числа избирателей выигравших партий
Единая Россия	35,57	51,81
КПРФ	12,61	18,37
ЛДПР	11,45	16,68
Родина	9,02	13,14
Итого	68,65	100

Теперь приведем для данного распределения голосов v_i расчеты индексов Колмогорова и Пирсона (см. табл. 2). Для всех значений размера парламента n число голосов, которое должна получить каждая из партий, вычисляется методом квоты Хара (подробное описание метода см. в [1]), применяемом при формировании Государственной Думы РФ, в соответствии с законом о выборах депутатов Государственной Думы РФ [4].

Свойства индексов представительности Колмогорова и Пирсона при существенных законодательных ограничениях

В этом разделе мы рассмотрим более реальный случай, когда при формировании парламента принимаются в расчет различные законодательные ограничения, которые являются существенными, т.е. их наличие влияет на распределение мест в парламенте, сокращая число победивших партий.

Пусть места в парламенте получили партии 1, ..., k, $k < l$, набравшие наибольшее количество голосов из общего числа партий, участ-

Таблица 2. *Результаты расчетов индексов Колмогорова и Пирсона для выборов в Госдуму РФ 2003 г. (финальный этап – распределение мест между победившими партиями)*

Размер парламента n	Индекс Колмогорова I^K	Индекс Пирсона I^P
1	0,4683	0,8807
2	0,4546	1,7412
3	0,2807	1,3748
4	0,2553	0,8235
5	0,2855	0,7395
10	0,1199	0,1935
20	0,1238	0,2023
50	0,0585	0,0315
100	0,0232	0,0087
225	0,0313	0,0104
500	0,0116	0,0013
1000	0,0164	0,0025
2000	0,0124	0,0009
5000	0,0061	0,0007
10000	0,0028	0,0001

вовавших в выборах l. Соответственно, партии $k + 1$, ..., l выборы проигрывают, и проголосовавшие за них избиратели не получают своих представителей в парламенте.

Обозначим долю таких избирателей от общего числа через γ:

$$\gamma = \sum_{i=k+1}^{l} v_i.$$

Очевидно, что $\gamma \in [0, 1]$. Значение $\gamma = 0$ соответствует случаю, когда все партии получают хотя бы по одному месту в парламенте, который был рассмотрен выше. Максимальное значение $\gamma = 1$ соответствует ситуации, когда ни одна из партий не получает мест в парламенте; такое возможно, например, если выборы признаются несостоявшимися.

Заметим, что в законодательстве различных стран, как правило, существуют ограничения, не позволяющие величине γ принимать значения, близкие к 1. Так, например, по закону о выборах депутатов ГД РФ, выборы не могут быть признаны состоявшимися, если преодолевшие избирательный барьер партии набирают в сумме менее чем (или ровно) 50% голосов от общего числа принявших участие в голосовании избирателей. Соответственно, для состоявшихся выборов в парламент РФ γ может принимать значения строго из полуинтервала $\gamma \in [0,\ 0{,}5)$.

Теперь рассмотрим величину искажения $|v_i - r_i|$. Предположим, что число распределяемых мест достаточно велико, так что искажение, возникающее вследствие целочисленности парламентских мест (рассмотренное в предыдущем разделе), незначительно по сравнению с возникающим из-за отсутствия представительства в парламенте части партий, и им можно пренебречь.

В этом случае каждая из партий, прошедших в парламент, получает приблизительно следующую долю голосов:

$$r_i \approx \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{k} v_i} = \frac{v_i}{1 - \sum_{i=k+1}^{l} v_i} = \frac{v_i}{1-\gamma}, \quad i = \overline{1,\ k},$$

и, соответственно, для проигравших партий:

$$r_i = 0, \quad i = \overline{k+1,\ l}.$$

Исследуем, как ведут себя значения индексов Колмогорова и Пирсона в данном случае. Начнем с индекса Колмогорова. Очевидно, всегда выполняется следующее соотношение:

$$\max_{i=\overline{1,\ l}} |r_i - v_i| = \max \left\{ \begin{matrix} \max\limits_{i=\overline{1,\ k}} |r_i - v_i|, \\ \max\limits_{i=\overline{k+1,\ l}} v_i \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} \max\limits_{i=\overline{1,\ k}} |r_i - v_i|, \\ v_{k+1} \end{matrix} \right\}.$$

Так как в наших предположениях искажением, связанным с целочисленностью парламентских мест, можно пренебречь, подставим вместо r_i его приближенное значение, вычисленное выше.

Имеем:

$$\max_{i=\overline{1,\ l}} |r_i - v_i| = \max \left\{ \begin{matrix} \max\limits_{i=\overline{1,\ k}} \left| \frac{v_i}{1-\gamma} - v_i \right|, \\ v_{k+1} \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} \max\limits_{i=\overline{1,\ k}} \left| \frac{\gamma}{1-\gamma} v_i \right|, \\ v_{k+1} \end{matrix} \right\} = \max \left\{ \begin{matrix} \frac{\gamma}{1-\gamma} v_1, \\ v_{k+1} \end{matrix} \right\}.$$

Таким образом, значение индекса Колмогорова в данном случае будет определяться следующим образом:

$$I = \sqrt{n} \max \left\{ \frac{\gamma}{1-\gamma} v_1, v_{k-1} \right\}.$$

Как видим, величина индекса может вычисляться двумя различными способами в зависимости от соотношения набранных партиями голосов избирателей.

Проведем аналогичные преобразования для индекса Пирсона:

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} + \sum_{i=k+1}^{l} \frac{(v_i)^2}{v_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} + \gamma.$$

Подставим в первый член суммы выражение для значения r_i:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(v_i - \frac{v_i}{1-\gamma}\right)^2}{v_i} = \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{1-\gamma}\right)^2 \frac{(v_i)^2}{v_i} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 v_i = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{k} v_i\right) =$$

$$= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 (1-\gamma) = \frac{\gamma^2}{1-\gamma}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} + \gamma = \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Таким образом, получаем выражение для индекса Пирсона при заданных предположениях:

$$I^P = n \sum_{i=1}^{l} \frac{(v_i - r_i)^2}{v_i} = n \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Итак, мы получили формулы для приближенного вычисления индексов Колмогорова и Пирсона при существенных законодательных ограничениях, которые позволяют анализировать свойства этих величин в данном случае.

Как и в предыдущем разделе, исследуем поведение индексов при $n \to \infty$. Очевидно, что на этот раз значения I^K и I^P будут расти с ростом n, стремясь к бесконечности при любом ненулевом γ:

$$I^K \to \infty \text{ и } I^P \to \infty \text{ при } n \to \infty \quad \forall \gamma \neq 0,$$

обращаясь в нуль лишь при условии $\gamma = 0$, что соответствует случаю «чистого пропорционального представительства»:

$$I^K \to 0 \text{ и } I^P \to 0 \text{ при } n \to \infty \quad \forall \gamma = 0.$$

Такая ситуация возможна лишь, когда активные законодательные ограничения отсутствуют, т.е. все партии выигрывают выборы и допускаются к распределению мест, или же существуют проигравшие партии, не получившие ни одного голоса. Данный случай был рассмотрен выше.

Проиллюстрируем поведение индексов при $n \to \infty$. Для наглядности сделаем это на том же наборе v_i, используя результаты выборов в Госдуму РФ 2003 г. (на этот раз рассматривая выборы целиком, а не только финальный этап). Результаты расчетов приведены в Табл. 3.

Таблица 3. *Результаты расчетов индексов Колмогорова и Пирсона для выборов в Госдуму РФ 2003 г.*

Размер парламента n	*Индекс Колмогорова* I^K	*Индекс Пирсона* I^P
1	0,62	1,67
2	0,53	3,30
3	0,50	3,20
4	0,27	2,85
5	0,50	3,13
10	0,39	4,45
20	0,78	8,63
50	1,17	20,90
100	1,55	41,73
225	2,37	93,88
500	3,51	208,59
1000	4,96	417,17
2000	7,01	834,34
5000	11,07	2085,85
10000	15,65	4171,69

Как видим, при достаточно больших n значения индексов Колмогорова и Пирсона растут пропорционально $\sqrt{n}$ и n, соответственно. Таким образом, очевидно, что данные индексы действительно можно использовать как критерии для оценки «пропорциональности» процедуры распределения мест в парламенте — они принимают значения, близкие к нулю, когда искажений предпочтений избирателей почти нет, и растут по мере их накопления.

Заметим, что абсолютные величины индексов Колмогорова и Пирсона не несут значительной смысловой нагрузки, однако их сравнение для разных парламентских выборов позволяет оценить относительную «представительность» различных парламентов, степень их соответствия политическим предпочтениям избирателей.

Покажем, как менялись значения рассматриваемых индексов для различных депутатских составов Госдумы РФ с 1993 по 2003 гг. В Табл. 4 приведены результаты расчетов индексов для соответствующих выборов. Исходные данные при расчетах были введены в соответствии с [2—3, 11—12].

Таблица 4. *Значения индексов Колмогорова и Пирсона для выборов в Госдуму РФ 1993 – 2003 г.*

	1993	*1995*	*1999*	*2003*
Индекс Колмогорова I^K	0,61	3,26	0,82	2,37
Индекс Пирсона I^P	24,0	210,0	39,7	93,9

Как видим, из четырех избранных за всю историю российских парламентов наиболее удовлетворял предпочтениям избирателей самый первый, созыва 1993 года, а самым «непропорциональным», наиболее искажающим предпочтения избирателей — второй, избранный в 1995 г. Заметим, что значения индексов для действующего, последнего созыва парламента достаточно велики и значительно превосходят результаты 1993 и 1999 гг., что говорит о его относительно более низкой «представительности». Для сравнения добавим, что максимально возможные теоретические значения индексов Колмогорова и Пирсона, при которых выборы в Госдуму РФ могут быть признаны состоявшимися (согласно [4]) — 7.5 и 225, соответственно.

Список литературы

Алескеров Ф.Т., Платонов В.В. *Системы пропорционального представительства и индексы представительности парламента*. Препринт WP7/2003/5 — М.: ГУ ВШЭ, 2003.

Выборы депутатов Государственной Думы Федерального Собрания 1999. Электоральная статистика. — М., Издательство “Весь мир”, 2000.

Выборы депутатов Государственной Думы 1995. Электоральная статистика. — М.: Весь мир, 1996.

Закон о выборах депутатов Государственной Думы Федерального Собрания Российской Федерации. — М.:Приор, 1999.

Манита А.Д. *Теория вероятностей и математическая статистика*. М.:МГУ, 2001 г.

Gallagher, M., ‘Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems’, *Electoral Studies*, 10, 1991.

Grilli di Cortona, P., Manzi, C., Pennisi, A., Ricca, F., and Simeone, B., *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

Lijphart, A. et al., *Electoral Systems and Party Systems: a Study of Twenty-Seven Democracies 1945-1990* . New York: Oxford University Press, 1994.

Loosemore, J., Hanby, V., ‘The Theoretical Limits of Maximum Distortion: Some Analytic Expressions for Electoral Systems’, *British Journal of Political Science*, 1, 1971.

Rae, D., *The Political Consequences of Electoral Laws*, 2nd edn. New Haven, Conn.: Yale University Press, 1971.

www.cikrf.ru

www.elections.spb.ru

Оглавление

Препринт WP7/2004/03
Серия WP7
Теория и практика общественного выбора

Редакторы серии *Ф.Т. Алескеров, Р.М. Нуреев*

Виталий Валерьевич Платонов

Применение критериев согласия для оценки представительности парламента

Публикуется в авторской редакции

Зав. редакцией *Е.В. Попова*
Выпускающий редактор *А.В. Заиченко*
Технический редактор *С.Д. Зиновьев*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 0,81. Усл. печ. л. 0,93. Заказ № 245. Изд. № 456

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3