Автоматика и телемеханика, № 3, 2003

Управление в социально-экономических системах

Н. К. ХАЧАТРЯН
(Центральный экономико-математический институт, Москва)

О РЕШЕНИЯХ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ОДНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ

Описана модель железнодорожных грузоперевозок на большие расстояния с большим числом промежуточных станций и заданной системой контроля.

1. Введение

Цель настоящей статьи – изучение процесса грузовых перевозок, осуществляемых железнодорожным транспортом, на большие расстояния с большим числом промежуточных станций. Существующие работы на эту тему в основном были посвящены проблемам планирования транспортных потоков [1, 2]. В [3] начато исследование модели грузоперевозок с заданной системой контроля, предложенной в [4]. В рамках такой модели получен ответ на следующий важный вопрос: можно ли организовать грузопоток с заданной системой контроля и какими при этом будут значения характеристики системы контроля? Другой не менее важный вопрос, на который также дан ответ, следующий: существуют ли стабилизирующиеся (стационарные) режимы перевозок и какова их устойчивость?

2. Описание модели

Рассматривается модель транснациональных транспортных перевозок. Имеется протяженный участок пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Движение поездов происходит в одном направлении.

Вследствие большого количества станций будем предполагать (идеальная модель), что множество промежуточных станций является бесконечным (счетным). Работа всех станций состоит из приема и отправки грузов. Прием и отправка грузов осуществляется посредством двух технологий. Рассмотрим эти технологии.

Первая технология связана с приемом и отправкой грузов с основных путей. Обозначим через $x_n(t)$ объем грузов, находящихся на станции с номером n в момент времени t. Для каждой станции с номером n существуют правила взаимодействия с предыдущей, $(n-1)$-й, и последующей, $(n+1)$-й, станциями. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, произвольная станция с номером n обязана принимать груз с $(n-1)$-й станции с интенсивностью, пропорциональной разности объемов грузов $(n-1)$-й и n-й станций и равной $\alpha(x_{n-1}-x_n)$, если объем грузов на

n-й станции меньше объема грузов на $(n-1)$-й станции. В противном случае станция с номером n отправляет груз на $(n+1)$-ю станцию с интенсивностью $-\alpha(x_{n-1}-x_n)$. Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, произвольная станция с номером n обязана отправлять груз на $(n+1)$–ю станцию с интенсивностью, пропорциональной разности объемов грузов n-й и $(n+1)$-й станций и равной $\beta(x_n - x_{n+1})$, если объем грузов на n-й станции больше объема грузов на $(n+1)$-й станции. В противном случае станция с номером n принимает груз с $(n-1)$-й станции с интенсивностью $-\beta(x_n - x_{n+1})$. Нормативы α и β задаются правилами взаимодействия с предыдущей и последующей станциями.

Вторая технология связана с приемом и отправкой грузов с тупиковых путей. Данная технология – значительно более дорогостояща. При небольших объемах грузов на станциях использование данной технологии – неэффективно, и поэтому в этом случае она не используется. Каждая станция дополнительно принимает и отправляет грузопоток независимо от первой технологии с некой интенсивностью. Согласно данной технологии с увеличением объема грузов на станциях интенсивность приема по этой технологии должна возрастать и в точке x_{opt} стать максимальной. Далее, при увеличении объема грузов, интенсивность приема по этой технологии должна убывать и в точке Δ стать нулевой, после чего должна осуществляться только лишь отправка грузов. Функцию, описывающую эту интенсивность, обозначим через φ. Из сказанного выше следует, что функция φ на интервале $(0, x_{\text{opt}})$ является возрастающей, в точке x_{opt} принимает максимальное значение. На полупрямой $(x_{\text{opt}}, +\infty)$ функция φ убывающая. В точках 0 и Δ функция φ принимает нулевое значение, и соответственно для значений аргумента, больших Δ, функция φ будет отрицательной. На полупрямой $(-\infty, 0)$ функцию φ определим следующим образом: $\varphi \equiv 0$.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий прием и отправка грузов для n-й станции будет описываться следующим уравнением:

$$\dot{x}_n(t) = \alpha(x_{n-1} - x_n) - \beta(x_n - x_{n+1}) + \varphi(x_n), \quad n \in Z, \quad t \in R_+ = [0, +\infty). \tag{2.1}$$

Перепишем уравнение (2.1) в следующем виде:

$$\dot{x}_n(t) = \alpha x_{n-1} - (\alpha + \beta)x_n + \beta x_{n+1} + \varphi(x_n), \quad n \in Z, \quad t \in R_+. \tag{2.2}$$

Предполагаем, что функция φ – дважды непрерывно дифференцируема, с равномерно ограниченными первой и второй производными. Очевидно, что такая функция и ее производная удовлетворяют условию Липшица с некоторыми константами L и $\overline{L}$.

Для грузоперевозок необходимо иметь действующую систему контроля. В качестве наблюдаемой характеристики системы контроля может быть использовано следующее балансовое соотношение: *равенство объемов грузопотоков на соседних станциях с определенной (единой для всех станций) разницей во времени.* Формально, такое условие можно описать в следующем виде: существует число $\tau > 0$, не зависящее от t и n, такое что при всех $n \in Z$ и $t \in R_+$ выполнено равенство:

$$x_n(t) = x_{n+1}(t + \tau). \tag{2.3}$$

Решения системы дифференциальных уравнений (2.2), удовлетворяющие условию (2.3), называются решениями типа *бегущей волны.* Константа τ характеризует периоды сравниваемых(контрольных) замеров объемов грузопотока на соседних станциях. Ее мы будем называть *периодом бегущей волны.* Окончательно наша модель в виде системы грузоперевозок и их контроля описывается счетной системой дифференциальных уравнений и условием, задающим бегущую волну:

$$\dot{x}_n(t) = \alpha x_{n-1} - (\alpha + \beta)x_n + \beta x_{n+1} + \varphi(x_n), \quad n \in Z, \quad t \in R_+, \tag{2.4}$$

$$x_n(t) = x_{n+1}(t + \tau), \quad n \in Z, \quad t \in R_+. \tag{2.5}$$

Для системы (2.4)–(2.5) необходимо изучить множество возможных изменений параметра τ (характеристика системы контроля), при которых существует решение (существует грузопоток с заданной системой контроля).

Набор абсолютно непрерывных функций $\{x_n(\cdot)\}_{n\in Z}$, определенных на R_+, называется решением системы дифференциальных уравнений (2.4), если при любых $n \in Z$ и почти всех $t \in R_+$ функции $\{x_n(\cdot)\}_{n\in Z}$ удовлетворяют этой системе.

Система (2.4)–(2.5) является системой дифференциальных уравнений (2.4) с однопараметрическими (параметр τ) нелокальными линейными ограничениями (2.5).

С помощью простой замены времени $t \to \tau t$ систему (2.4)–(2.5) можно преобразовать в следующую однопараметрическую (параметр τ) систему дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями:

$$\dot{y}_n(t) = \tau^{-1}[\alpha y_{n-1} - (\alpha+\beta)y_n + \beta y_{n+1} + \varphi(y_n)], \quad n \in Z, \quad t \in R_+, \tag{2.6}$$

$$y_n(t) = y_{n+1}(t+1), \quad n \in Z, \quad t \in R_+. \tag{2.7}$$

Решения систем (2.4)–(2.5) и (2.6)–(2.7) связаны соотношением: $y_n(t) = x_n(\tau t)$, $n \in Z$. Полученную однопараметрическую систему дифференциальных уравнений с нелокальными линейными ограничениями сведем к однопараметрическому семейству дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Для этого рассмотрим следующее уравнение с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{y}(t) = \tau^{-1}[\alpha y(t+1) - (\alpha+\beta)y(t) + \beta y(t-1) + \varphi(y(t))], \quad t \in R. \tag{2.8}$$

Абсолютно непрерывная функция $y(t)$, определенная на R, называется решением уравнения (2.8), если при почти всех $t \in R$ функция $y(t)$ удовлетворяет этому уравнению.

Лемма 2.1. *Всякому решению $\{y_n(\cdot)\}_{n\in Z}$ системы (2.6)–(2.7) соответствует решение $y(t)$ уравнения (2.8) и наоборот. Такие решения связаны между собой соотношением $y_n(t) = y(t-n)$ для любых $n \in Z$, $t \in R_+$.*

3. Теорема существования и единственности решения типа бегущей волны

Пусть заданы начальный момент времени $\overline{t}$ и номер станции $\overline{n}$. Нас интересует следующий вопрос: можно ли при заданном начальном объеме грузопотока $x_{\overline{n}}(\overline{t}) = a$, $a > 0$ организовать контролируемый грузопоток? Какими при этом могут быть режимы контроля грузопотоков, т.е. значения периодов замеров τ объемов грузопотока? Вопрос об организации такого грузопотока имеет следующую математическую трактовку. Существуют ли для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = \alpha x_{n-1} - (\alpha+\beta)x_n + \beta x_{n+1} + \varphi(x_n), \quad n \in Z, \quad t \in R_+, \\ x_n(t) = x_{n+1}(t+\tau), \quad n \in Z, \quad t \in R_+, \\ x_{\overline{n}}(\overline{t}) = a, \quad a > 0, \quad \overline{n} \in Z \end{cases} \tag{3.1}$$

с заданным $\tau > 0$ положительные решения? Из результатов предыдущего параграфа следует, что система (3.1) эквивалентна следующей начальной задаче:

$$\dot{y}(t) = \tau^{-1}[\alpha y(t+1) - (\alpha+\beta)y(t) + \beta y(t-1) + \varphi(y(t))], \quad t \in R, \tag{3.2}$$

$$y(r) = a, \quad a > 0, \quad r = \left(\frac{\overline{t}}{\tau} - \overline{n}\right). \tag{3.3}$$

В этом разделе мы сформулируем и докажем теорему о существовании и единственности решения начальной задачи (3.2)–(3.3), а следовательно, и системы (3.1).

Воспользуемся теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом из [5]. Там рассматривается дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом

$$\dot{y}(t) = g(y(t+n_1), y(t+n_2), \dots, y(t+n_s)), \quad t \in R \tag{3.4}$$

и начальными условиями

$$y(r) = \overline{y}, \quad r \in R, \quad \overline{y} \in R^n. \tag{3.5}$$

Правая часть дифференциального уравнения (3.4) удовлетворяет условию Липшица с константой M.

Для любого $\mu \in (0,\ 1)$ определяется банахово пространство функций

$$\mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(R) = \left\{ y(\cdot) \in C^{(k)}(R, R^n),\ \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in R} \left\| y^{(r)}(t) e^{-\delta|t|} \right\|_{R^n} < +\infty \right\}, \quad \mu = e^{-\delta}$$

с нормой

$$\|y(\cdot)\|_\mu^{(k)} = \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in R} \left\| y^{(r)}(t) e^{-\delta|t|} \right\|_{R^n}.$$

Т е о р е м а *3.1* ([5]). *Если для некоторого* $\mu \in (0,1)$ *выполняется неравенство*

$$M \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1}, \tag{3.6}$$

то для любых $\overline{y} \in R^n$, $r \in R$ *существует решение* $y(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R, R^n)$ *начальной задачи* (3.4)–(3.5). *Такое решение – единственно.*

Вернемся к начальной задаче (3.2)–(3.3) и применим к ней теорему 3.1. Для этого положим

$$M(\tau) = \tau^{-1} \max[(\alpha + \beta), L].$$

Условие (3.6) из теоремы 3.1 в применении к уравнению (3.2) будет иметь вид:

$$M(\tau)[1 + 2\mu^{-1}] < \ln \mu^{-1}, \quad \mu \in (0,1). \tag{3.7}$$

Определим функции

$$g(\tau, \mu) = M(\tau)[1 + 2\mu^{-1}] - \ln \mu^{-1}, \quad g_1(\tau, \mu) = M(\tau)[1 + 2\mu^{-1}],$$
$$g_2(\mu) = \ln \mu^{-1}, \quad \tau \in (0, +\infty), \quad \mu \in (0,1).$$

Нас интересуют решения неравенства $g(\tau, \mu) < 0$, что эквивалентно неравенству $g_1(\tau, \mu) < g_2(\mu)$. Последнее неравенство решаем для каждого фиксированного $\tau > 0$. Из определения функции $M(\tau)$ следует, что существует $\overline{\tau} > 0$ такое, что на интервале $(0, \overline{\tau})$ неравенство $g_1(\tau, \mu) < g_2(\mu)$ не имеет решения. При $\tau = \overline{\tau}$ уравнение $g_1(\overline{\tau}, \mu) = g_2(\mu)$ имеет единственное решение $(\overline{\tau}, \overline{\mu})$. Очевидно, что данное решение удовлетворяет системе

$$\begin{cases} g'_\mu(\overline{\tau}, \overline{\mu}) = 0, \\ g(\overline{\tau}, \overline{\mu}) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Из первого уравнения мы получаем, что $\overline{\mu} = 2M(\overline{\tau})$. Подставив данное значение во второе уравнение, получаем следующее уравнение относительно $M(\overline{\tau})$:

$$(3.9) \qquad 1 + M(\overline{\tau}) = \ln(2M(\overline{\tau}))^{-1}.$$

Уравнение (3.9) относительно $M(\overline{\tau})$ имеет единственное решение $\overline{M}$. Тогда $\overline{\tau}$ находится из уравнения $M(\overline{\tau}) = \overline{M}$. При каждом $\tau \in (\overline{\tau}, +\infty)$ уравнение $g_1(\tau, \mu) = g_2(\mu)$ имеет два решения $(\tau, \mu_1), (\tau, \mu_2)$ и при этом для любых $\tau \in (\overline{\tau}, +\infty)$, $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ справедливо неравенство $g_1(\tau, \mu) < g_2(\mu)$. Так как μ_1 и μ_2 однозначно определяются значением $\tau \in (\overline{\tau}, +\infty)$, то эти зависимости обозначим соответственно в виде функций $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$.

Таким образом, для любого $\tau \in (\overline{\tau}, +\infty)$ на интервале $(\mu_1(\tau),\ \mu_2(\tau))$ выполняется условие (3.6). Функция $\mu_1(\tau)$ монотонно убывающая, причем, $\mu_1(\tau) \to 0$ при $\tau \to \to \infty$. Функция $\mu_2(\tau)$ монотонно возрастающая и $\mu_2(\tau) \to 1$ при $\tau \to \infty$. Для $\overline{\tau}$ выполняется условие $\overline{\mu} = \mu_1(\overline{\tau}) = \mu_2(\overline{\tau})$, а неравенство (3.6) переходит в равенство.

Т е о р е м а 3.2. *Для любых начальных данных $a > 0$, $r \in R$ и периодов τ, удовлетворяющих условию $\overline{\tau} < \tau < +\infty$, где $\overline{\tau}$ – решение уравнения* (3.9), *существует единственное решение $y(t)$ уравнения* (3.2), *удовлетворяющее начальному условию $y(r) = a$ и принадлежащее пространству $\mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(R)$ для любого $\mu \in (\mu_1(\tau),\ \mu_2(\tau))$.*

Дадим переформулировку теоремы 3.2 в терминах исходной системы (2.4)–(2.5).

Т е о р е м а 3.3. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\overline{n} \in Z$, $\overline{t} \in R_+$ и периодов τ, удовлетворяющих условию $\overline{\tau} < \tau < +\infty$, где $\overline{\tau}$ – решение уравнения* (3.9), *существует единственное решение $\{x_n(\cdot)\}_{n\in Z}$ уравнения* (2.4) *типа бегущей волны* (*условие* (2.5)) *с периодом τ, удовлетворяющее начальному условию $x_{\overline{n}}(\overline{t}) = a$ и для любого $n \in Z$ функция $x_n(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}(R)$ для любого $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$*

4. Исследование на устойчивость стационарных решений

В данном разделе мы хотим получить ответ на следующий вопрос: *существуют ли стационарные режимы перевозок и являются ли они устойчивыми.* Система (2.4)–(2.5) имеет два стационарных режима: $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \{\ldots, 0, 0, 0, \ldots\}$, $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \{\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots\}$.

О п р е д е л е н и е 4.1. *Стационарное решение $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \{c_n\}_{n\in Z}$ системы уравнений* (2.4) *называется устойчивым по Ляпунову, если для всякого натурального числа $N > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что произвольное решение $\{x_n(t)\}_{n\in Z}$ системы уравнений* (2.4), *удовлетворяющее условию $|x_n(0) - c_n| < \gamma$ для $n \in [-N, N]$, определено для всех положительных t и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $0 < \sigma < \gamma$ такое, что при $|x_n(0) - c_n| < \sigma$, $n \in [-N, N]$ справедливо условие $|x_n(t) - c_n| < \varepsilon$ для всех $t > 0$ и $n \in [-N, N]$.*

О п р е д е л е н и е 4.2. *Стационарное решение $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \{c_n\}_{n\in Z}$ системы* (2.4)–(2.5) *называется устойчивым по Ляпунову, если существует $\gamma > 0$ такое, что произвольное решение $\{x_n(t)\}_{n\in Z}$ системы* (2.4)–(2.5), *удовлетворяющее условию $|x_0(0) - c_0| < \gamma$, определено для всех положительных t и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $0 < \sigma < \gamma$ такое, что при $|x_0(0) - c_0| < \sigma$ справедливо условие $|x_0(t) - c_0| < \varepsilon$ для всех $t > 0$.*

Стационарное решение $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \{\ldots, 0, 0, 0, \ldots\}$ не представляет интереса, и поэтому мы его в дальнейшем рассматривать не будем.

Как мы уже показывали, системе (2.4)–(2.5) соответствует дифференциальное уравнение опережающе-запаздывающего типа (2.8).

Уравнение (2.8) имеет стационарные решения: $y(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv \Delta$. Стационарному решению $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \{\dots,0,0,0,\dots\}$ системы (2.4)–(2.5) соответствует стационарное решение $y(t) \equiv 0$ уравнения (2.8), а стационарному решению $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \equiv \{\dots,\Delta,\Delta,\Delta,\dots\}$ – стационарное решение $y(t) \equiv \Delta$.

Определение 4.3. *Стационарное решение* $y(t) \equiv b$ *уравнения* (2.8) *называется устойчивым по Ляпунову, если существует* $\gamma > 0$ *такое, что произвольное решение* $y(t)$ *уравнения* (2.8), *удовлетворяющее условию* $|y(0) - b| < \gamma$, *определено для всех положительных* t *и для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $0 < \sigma < \gamma$ *такое, что при* $|y(0) - b| < \sigma$ *справедливо условие* $|y(t) - b| < \varepsilon$ *для всех* $t > 0$.

Лемма 4.1. *Из устойчивости стационарного решения* $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv \{\dots,\Delta,\Delta,\Delta,\dots\}$ *системы уравнений* (2.4)–(2.5) *следует устойчивость стационарного решения* $y(t) \equiv \Delta$ *уравнения* (2.8) *и наоборот.*

Согласно формализму, изложенному в [5], исследование уравнения с отклоняющимся аргументом сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения в некотором подходящем пространстве бесконечных последовательностей, каноническим образом порожденный исходным дифференциальным уравнением. Рассмотрим некоторые элементы такого подхода. Общий вид дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (уравнение 3.4) и условия, которым удовлетворяет правая часть уравнения (функция g), были даны в третьем разделе.

Определим пространство

$$K^n = \prod_{-\infty}^{+\infty} R_i, \quad R_i = R^n, \quad i \in Z$$

со стандартной топологией полного прямого произведения. Элементами пространства K^n будут бесконечные последовательности $\varkappa = \{z_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $z_i \in R$, $i \in Z$. Топология пространства K^n совместима с метрикой ρ, задаваемой разделяющим семейством полунорм

$$p_N(\varkappa) = \left[\sum_{-N}^{N} |z_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad N = 0,1,\dots,$$

где

$$\rho(\varkappa_1,\varkappa_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|i|}\frac{p_i(\varkappa_1-\varkappa_2)}{1+p_i(\varkappa_1-\varkappa_2)}.$$

По функции g определяется новое отображение $G: K^n \to K^n$ по следующему правилу: для любых $i \in Z$, $t \in R$, $\varkappa \in K^n$ $(G(\varkappa))_i = g_i(\varkappa) = g(z_{i+n_1},\dots,z_{i+n_s})$. Определяется оператор сдвига T: $\forall\varkappa \in K^n$, $\forall i \in Z$ $(T\varkappa)_i = z_{i+1}$. Операторы T и G перестановочны, т.е. $TG = GT$.

Определим следующую систему:

(4.1) $\quad \dot\varkappa(t) = G(\varkappa), \quad t \in [0,1],$

(4.2) $\quad T\varkappa(0) = \varkappa(1).$

Здесь $\dot\varkappa(t) = \{\dot{z_n}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$ и является производной по Гато.

Выделим в пространстве K^n однопараметрическое семейство гильбертовых подпространств $K^n_{2\mu}$, $\mu \in (0,1)$

$$K^n_{2\mu} = \left\{\varkappa : \varkappa \in K^n;\ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|z_i\|^2_{R^n}\mu^{2|i|} < +\infty\right\}$$

с нормой

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|z_i\|^2_{R^n} \mu^{2|i|} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad 0 < \mu < 1.$$

Л е м м а 4.2 ([5]). *Если $g : R^{n\times s} \to R$ – непрерывное отображение и удовлетворяет условию Липшица, то для любого $\mu \in (0,1)$ ограничение отображения G на подпространство $K^n_{2\mu}$, обозначаемое через $G_{2\mu}$, действует из $K^n_{2\mu}$ в $K^n_{2\mu}$ непрерывно и также удовлетворяет условию Липшица.*

Очевидно, что ограничение оператора T на подпространство $K^n_{2\mu}$ является преобразованием этого подпространства. В таком случае для любого $\mu \in (0,1)$ систему (4.1)–(4.2) мы можем рассматривать в пространстве $K^n_{2\mu}$ и она будет иметь следующий вид:

(4.3) $\quad \dot{\varkappa}(t) = G_{2\mu}(\varkappa), \quad t \in [0,1],$

(4.4) $\quad T\varkappa(0) = \varkappa(1).$

Решением уравнения (4.3) в фазовом пространстве $K^n_{2\mu}$ называется всякая сильно абсолютно непрерывная функция $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{2\mu})$ (почти всюду дифференцируема по Фреше, производная интегрируема по Бохнеру, а сама функция является первообразной своей производной), почти всюду удовлетворяющая уравнению (4.3).

Т е о р е м а 4.1 ([5]). *Если функция $y(\cdot) \in \mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(R)$, $\mu \in (0,1)$ есть решение уравнения (3.4), то $\varkappa(\cdot)$, где для произвольных $n \in Z$, $t \in [0,1]$ $(\varkappa(t))_n = y(t+n)$ – решение системы (4.3)–(4.4) и $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{2(\mu-\xi)})$ со сколь угодно малым положительным числом ξ.*

Если $\varkappa(\cdot) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{2\mu})$, $\mu \in (0,1)$ есть решение системы (4.3)–(4.4), то $y(\cdot)$, где $y(t) = (\varkappa(t-n))_n$ – решение уравнения (3.4), причем $y(t) \in \mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(R)$.

Определим систему:

(4.5) $\quad \dot{\varkappa}(t) = G(\varkappa), \quad t \in [0,+\infty),$

(4.6) $\quad T\varkappa(t) = \varkappa(t+1).$

Л е м м а 4.3. *Ограничение произвольного решения системы (4.5)–(4.6) на $[0,1]$ является решением системы (4.1)–(4.2), а всякое решение системы (4.1)–(4.2), продолженное на $(1,+\infty)$ по формуле $\varkappa(t) = T\varkappa(t-1)$, является решением системы (4.5)–(4.6).*

Очевидно, что для любого $\mu \in (0,1)$ ограничение произвольного решения системы

(4.7) $\quad \dot{\varkappa}(t) = G_{2\mu}(\varkappa), \quad t \in [0,+\infty),$

(4.8) $\quad \varkappa(t) = \varkappa(t+1)$

на $[0,1]$ есть решение системы (4.3)–(4.4), а всякое решение системы (4.3)–(4.4), продолженное на $(1,+\infty)$ по формуле $\varkappa(t) = T\varkappa(t-1)$, есть решение системы (4.7)–(4.8).

Рассмотрим результаты данного подхода применительно к нашему уравнению (2.8). Введем некоторые обозначения. Через A обозначим следующую бесконечномерную трехдиагональную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -(\alpha+\beta) & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -(\alpha+\beta) & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & -(\alpha+\beta) & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Через $\phi(\varkappa)$ обозначим столбец $(\dots\varphi(z_{-n}),\dots,\varphi(z_0),\dots,\varphi(z_n),\dots)^{\mathrm{T}}$. В этом случае система (4.5)–(4.6) примет вид

$$\dot{\varkappa}(t)=\tau^{-1}[A\varkappa+\phi(\varkappa)],\quad t\in R_+,\tag{4.9}$$
$$\varkappa(t+1)=T\varkappa(t).\tag{4.10}$$

Так как правая часть уравнения (2.8) удовлетворяет условию Липшица, то согласно лемме 4.2 ограничение отображения $G=A\varkappa+\phi(\varkappa)$ на подпространство $K^1_{2\mu}$, обозначаемое как $A_{2\mu}\varkappa+\phi_{2\mu}(\varkappa)$, действует из $K^1_{2\mu}$ в $K^1_{2\mu}$ непрерывно и также удовлетворяет условию Липшица. Тогда система

$$\dot{\varkappa}(t)=\tau^{-1}[A_{2\mu}\varkappa+\phi_{2\mu}(\varkappa)],\quad t\in R_+,\tag{4.11}$$
$$\varkappa(t+1)=T\varkappa(t),\tag{4.12}$$

где в левой части уравнения (4.11) стоит производная по Фреше, корректно определена на фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$ и задача Коши для уравнения (4.11) всегда имеет решение. Уравнение (4.11) будем называть уравнением с параметром μ.

Так как мы будем изучать вопросы устойчивости, то нам понадобится линеаризовать правую часть уравнения (4.11). Для этого сформулируем лемму.

Лемма 4.4. *Для любого $\mu\in(0,1)$ оператор $\phi_{2\mu}(\varkappa)=\{\varphi(z_n)\}_{n\in Z}$, действующий из $K^1_{2\mu}$ в $K^1_{2\mu}$, дифференцируем по Фреше.*

Система (4.11)–(4.12) имеет два стационарных решения: $\varkappa_0=(\dots,0,0,0,\dots)^{\mathrm{T}}$ и $\varkappa_1=(\dots,\Delta,\Delta,\Delta,\dots)^{\mathrm{T}}$. Стационарному решению $y(t)\equiv\Delta$ уравнения (2.8) соответствует стационарное решение $\varkappa_1=(\dots,\Delta,\Delta,\Delta,\dots)^{\mathrm{T}}$ системы (4.11)–(4.12).

Очевидно, что устойчивость стационарного решения среди всех решений уравнения (4.11) гарантирует устойчивость стационарного решения среди решений уравнения (4.11) типа бегущей волны (условие 4.12).

Определение 4.4. *Стационарное решение $\overline{\varkappa}$ уравнения* (4.11) *с фазовым пространством $K^1_{2\mu}$ называется устойчивым по Ляпунову, если существует $\gamma>0$ такое, что всякое решение $\varkappa(t)$ уравнения* (4.11), *удовлетворяющее условию $\|\varkappa(0)-\overline{\varkappa}\|_{2\mu}<\gamma$, определено для всех положительных t и для всякого $\varepsilon>0$ найдется $0<\sigma<\gamma$ такое, что при $\|\varkappa(0)-\overline{\varkappa}\|_{2\mu}<\sigma$ справедливо условие $\|\varkappa(t)-\overline{\varkappa}\|_{2\mu}<\varepsilon$ для всех $t>0$.*

Рассмотрим уравнения

$$\beta\mu^2-(\alpha+\beta+\delta)\mu+\alpha=0\quad\text{при}\quad\alpha>\beta,\tag{4.13}$$
$$\alpha\mu^2-(\alpha+\beta+\delta)\mu+\beta=0\quad\text{при}\quad\alpha<\beta.\tag{4.14}$$

Решением уравнения (4.13) являются $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\overline{\lambda}}_1$, причем $\overline{\lambda}_1<1$, $\overline{\overline{\lambda}}_1>1$. Решением уравнения (4.14) являются $\overline{\lambda}_2$,$\overline{\overline{\lambda}}_2$, причем $\overline{\lambda}_2<1$, $\overline{\overline{\lambda}}_2>1$.

Обозначим $\tau_{\min}=\min\limits_{\mu(\tau)\geq\overline{\lambda}_1}\tau$, $\overline{\lambda}=\overline{\lambda}_1$, если $\alpha\geq\beta$, и $\tau_{\min}=\min\limits_{\mu(\tau)\geq\overline{\lambda}_2}\tau$, $\overline{\lambda}=\overline{\lambda}_2$, если $\alpha<\beta$. Определения $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$ приводятся в конце третьего раздела. Так как функция $\mu_2(\tau)$ определена для $\overline{\tau}\leq\tau<+\infty$ то, очевидно, что $\tau_{\min}\in[\overline{\tau},+\infty)$. Обозначим $\delta=-\varphi'(\Delta)$. Из определения функции φ следует, что $\delta>0$.

Сформулируем теорему об устойчивости стационарного решения уравнения (4.11).

Теорема 4.2. *Для любых $\alpha,\beta,\delta>0$ и периодов $\tau\in(0,\infty)$ стационарное решение $\varkappa_1=(\dots,\Delta,\Delta,\Delta,\dots)^{\mathrm{T}}$ уравнения* (4.11) *с параметром $\mu\in(\overline{\lambda},1)$ в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$ является устойчивым.*

Очевидно, что из устойчивости стационарного решения уравнения (4.11) следует устойчивость стационарного решения системы (4.11)–(4.12).

Определение 4.3 (устойчивость стационарного решения уравнения (2.8)) дословно повторяется в пространстве $L^1_\mu C^{(0)}(R)$ для любого $\mu \in (0,1)$.

Определим связь между устойчивостью стационарного решения системы (4.11)–(4.12) и устойчивостью стационарного решения уравнения (2.18).

Лемма 4.5. Из устойчивости стационарного решения $\varkappa_1 = (\dots\Delta,\Delta,\Delta,\dots)^{\mathrm{T}}$ *системы* (4.11)–(4.12) *в фазовом пространстве* $K_{2\mu}$, $\mu \in (\overline{\lambda},1)$ *следует устойчивость стационарного решения* $y(t) \equiv \Delta$ *уравнения* (2.8) *в пространстве* $L^1_\mu C^{(0)}(R)$ *для любого* $\mu \in (\nu,\mu_2(\tau))$, *где* $\nu = \max(\mu_1(\tau),\overline{\lambda})$.

Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.3. Для любых $\alpha,\beta,\delta > 0$ *и периодов* τ, *удовлетворяющих условию* $\tau_{\min} < \tau < +\infty$, *стационарное решение* $y(t) \equiv \Delta$ *уравнения* (2.8) *среди решений из пространства* $\mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(R)$ *для любого* $\mu \in (\nu,\mu_2(\tau))$ *устойчиво.*

Определение 4.2 (устойчивость стационарного решения системы (2.4)–(2.5)) дословно повторяется в пространстве $L^1_\mu C^{(0)}(R)$ для любого $\mu \in (0,1)$.

Сформулируем теорему об устойчивости стационарного решения первоначальной системы (2.4)–(2.5).

Теорема 4.4. Для любых $\alpha,\beta,\delta > 0$ *и периодов* τ, *удовлетворяющих условию* $\tau_{\min} < \tau < +\infty$, *стационарное решение* $\{x_n(t)\}_{n\in Z} \equiv (\dots,\Delta,\Delta,\Delta,\dots)$ *системы* (2.4)–(2.5) *среди решений, для которых каждая из координат принадлежит пространству* $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}(R)$ *для любого* $\mu \in (\nu,\mu_2(\tau))$, *является устойчивым.*

5. Заключение

Получена теорема существования и единственности режима грузоперевозок с заданной системой контроля. Стационарные режимы грузоперевозок исследованы на устойчивость.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2.1. Пусть $\{y_n(\cdot)\}_{n\in Z}$ есть решение системы (2.6)–(2.7). На пространстве функций $\{y_n(\cdot)\}_{n\in Z}$ введем оператор P, который действует по следующему правилу: $P[\{y_n(\cdot)\}_{n\in Z}] = y(\cdot)$, где $y(t) = y_{-[t]}(t-[t])$ для любого $t \in R$ и где $[t]$ – целая часть t. Несложно проверить, что таким образом определенная функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению (2.8). В одну сторону лемма доказана.

Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть $y(t)$ является решением уравнения (2.8). На пространстве функции $y(t)$ введем оператор Q следующим образом: $Q[y(\cdot)] = \{y_n(\cdot)\}_{n\in Z}$, где $y_n(t) = y(t-n)$ для любого $t \in R_+$, $n \in Z$. Таким образом определенные функции $\{y_n(t)\}_{n\in Z}$ удовлетворяют системе (2.6)–(2.7).

Доказательство теоремы 3.2. Действительно, для любого τ, удовлетворяющего условию $\overline{\tau} < \tau < +\infty$, существует интервал $(\mu_1(\tau),\ \mu_2(\tau))$ и для всех $(\tau,\widetilde{\mu}), \widetilde{\mu} \in (\mu_1(\tau),\ \mu_2(\tau))$ выполняется неравенство (3.6). В таком случае согласно теореме 3.1 для любой начальной точки r и любого начального значения a существует единственное решение $y(t)$ начальной задачи (3.2)–(3.3), причем $y(t)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\widetilde{\mu}} C^{(0)}(R)$, где $\widetilde{\mu}$ – произвольная точка интервала $(\mu_1(\tau),\ \mu_2(\tau))$.

Доказательство теоремы 3.3. Действительно, всякому решению $y(t)$ уравнения (3.2) соответствует решение $\{x_n(\cdot)\}_{n\in Z}$ системы (2.4)–(2.5), где для любого

$n \in Z$ имеем $x_n(\tau t) = y(t-n)$. Переформулировав начальное условие $y(r) = a$, $r = \left(\dfrac{\overline{t}}{\tau} - \overline{n}\right)$, для системы (2.4)–(2.5) получим начальное условие $x_{\overline{n}}(\overline{t}) = a$. Если функция $y(t)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(R)$, то функции $x_n(t)$, где $x_n(\tau t) = y(t-n)$, для любого $n \in Z$ будут принадлежать пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}(R)$.

Доказательство леммы 4.1. Доказательство леммы станет очевидным, если вспомнить, что решения системы (2.4)–(2.5) и уравнения (2.8) связаны условием: $x_n(\tau t) = y(t-n)$, т.е. $x_0(\tau t) = y(t)$.

Доказательство леммы 4.3. Доказательство следует из перестановочности операторов T и G.

Доказательство леммы 4.4. Покажем, что в произвольной точке $\overline{\varkappa} \in K^1_{2\mu}$ существует производная по Гато $\phi'_{2\mu}(\overline{\varkappa})$, причем $\phi'_{2\mu}(\overline{\varkappa}) = \{\varphi'(\overline{z}_n)\}_{n\in Z}$. Так как функция $\varphi'(\cdot)$ по определению ограничена, то $\{\varphi'(z_n)\}_{n\in Z} \in K^1_{2\mu}$.

$$\|\phi_{2\mu}(\overline{\varkappa}+th) - \phi_{2\mu}(\overline{\varkappa}) - t\phi'_{2\mu}(\overline{\varkappa})h\|_{2\mu} =$$
$$= \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\varphi(\overline{z}_i + th_i) - \varphi(\overline{z}_i) - t\varphi'(\overline{z}_i)h_i|^2 \mu^{2|i|}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из теоремы о среднем следует, что $\varphi(\overline{z}_i + th_i) - \varphi(\overline{z}_i) = t\varphi'(\theta_i)h_i$, где $\overline{z}_i \le \theta_i \le \overline{z}_i + th_i$. Подставим данное значение в выражение под знаком суммы и вынесем t за знак суммы. В результате получим следующее выражение:

$$t\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|} = \sum_{i=-\infty}^{-(N-1)} |(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|} +$$
$$+ \sum_{i=-N}^{N} (\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} |(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|}.$$

Так как $h \in K^1_{2\mu}$, а функция $\varphi'(\cdot)$ ограничена ($|\varphi'(\cdot)| \le L$), следовательно, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$\sum_{i=-\infty}^{-(N-1)} |(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} |(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|} < 4L\varepsilon^2.$$

Функция $\varphi'(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\overline{L}$, следовательно, при фиксированном N и достаточно малом t

$$\sum_{i=-N}^{N} |(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\overline{z}_i))h_i|^2 \mu^{2|i|} \le \overline{L}\varepsilon^2.$$

Итак, мы получили, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что имеет место неравенство $\dfrac{\|\phi_{2\mu}(\overline{\varkappa}+th) - \phi_{2\mu}(\overline{\varkappa}) - t\phi'_{2\mu}(\overline{\varkappa})h\|_{2\mu}}{t} \le \sqrt{4L + \overline{L}}\varepsilon$ при $|t| < \sigma$. Следовательно, в точке $\overline{\varkappa}$ существует производная Гато.

Так как функция $\varphi'(\cdot)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, то согласно лемме 4.2 отображение $\phi'_{2\mu}$ действует из $K^1_{2\mu}$ в $K^1_{2\mu}$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица. Итак, функция $\phi_{2\mu}$ непрерывна, существует производная по Гато в произвольной точке и она непрерывна. Следовательно [5], существует производная по Фреше.

Доказательство теоремы 4.2. Через $\overline{A}_{2\mu}$ обозначим следующую бесконечномерную трехдиагональную матрицу:

$$\overline{A}_{2\mu} = \begin{pmatrix} -(\alpha+\beta+\delta) & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -(\alpha+\beta+\delta) & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & -(\alpha+\beta+\delta) & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -(\alpha+\beta+\delta) \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (4.11) в окрестности точки $\varkappa_1 = (\dots, \Delta, \Delta, \Delta, \dots)^{\mathrm{T}}$ примет вид:

$$\dot{\widetilde{\varkappa}}(t) = \tau^{-1}[\overline{A}_{2\mu}\widetilde{\varkappa} + \mathcal{R}(\widetilde{\varkappa})], \tag{П.1}$$

причем $\dfrac{\|\mathcal{R}(\widetilde{\varkappa})\|_{2\mu}}{\|\widetilde{\varkappa}\|_{2\mu}} \to 0$ при $\|\widetilde{\varkappa}\|_{2\mu} \to 0$.

Решению $\varkappa_1 = (\dots\Delta, \Delta, \Delta, \dots)^{\mathrm{T}}$ уравнения (4.11) соответствует решение $\widetilde{\varkappa}_0 = (\dots 0, 0, 0, \dots)^{\mathrm{T}}$ уравнения (П.1). Таким образом, мы будем исследовать на устойчивость стационарное решение $\widetilde{\varkappa}_0 = (\dots 0, 0, 0, \dots)^{\mathrm{T}}$ уравнения (П.1) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$. Для этого воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению из [6]. Согласно этой теореме для того, чтобы решение $\widetilde{\varkappa}_0$ уравнения (П.1) было устойчивым, достаточно, чтобы остаток ряда $\mathcal{R}(\widetilde{\varkappa})$ был членом выше первого порядка малости относительно $\widetilde{\varkappa}$, т.е. $\dfrac{\|\mathcal{R}(\widetilde{\varkappa})\|}{\|\widetilde{\varkappa}\|_{2\mu}} \to 0$ при $\|\widetilde{\varkappa}\|_{2\mu} \to 0$ (что выполняется), а спектр σ оператора $\overline{A}_{2\mu}$ лежал в левой полуплоскости. Итак, нам осталось изучить спектр оператора $\overline{A}_{2\mu}$.

Учитывая вид оператора сдвига T, оператор $\overline{A}_{2\mu}$ можно представить следующим образом:

$$\overline{A}_{2\mu} = \alpha T - (\alpha+\beta+\delta)E + \beta T^{-1} = F(T).$$

Здесь E – единичный оператор. Из теоремы о спектре [7] следует, что $\sigma(\overline{A}_{2\mu}) = F(\sigma(T))$. Таким образом, достаточно найти образ спектра оператора T при отображении F. Как известно, спектр оператора T представляет собой кольцо, образованное двумя окружностями с радиусами μ и $\dfrac{1}{\mu}$, где $0 < \mu < 1$. Таким образом, для устойчивости стационарного решения достаточно, чтобы

$$\sup_{\mu<|u|<\frac{1}{\mu}} ReF(u) < 0.$$

Данное неравенство эквивалентно следующим неравенствам:

$$\beta\mu^2 - (\alpha+\beta+\delta)\mu + \alpha < 0 \quad \text{при } \alpha \geq \beta \tag{П.2}$$

и

$$\alpha\mu^2 - (\alpha+\beta+\delta)\mu + \beta < 0 \quad \text{при } \alpha < \beta. \tag{П.3}$$

Областями решений неравенств (П.2) и (П.3) являются соответственно интервалы $(\overline{\lambda}_1, \overline{\overline{\lambda}}_1)$ и $(\overline{\lambda}_2, \overline{\overline{\lambda}}_2)$, причем $\overline{\lambda}_1 < 1$, $\overline{\overline{\lambda}}_1 > 1$, $\overline{\lambda}_2 < 1$, $\overline{\overline{\lambda}}_2 > 1$. Ограничив данные области условием $0 < \mu < 1$, окончательно получим следующие решения: $(\overline{\lambda}_1, 1)$ для неравенства (П.2) и $(\overline{\lambda}_2, 1)$ для неравенства (П.3).

Таким образом, для любого $\overline{\lambda}_1 < \mu < 1$ при $\alpha > \beta$ и $\overline{\lambda}_2 < \mu < 1$ при $\alpha < \beta$, т.е. для любого $\overline{\lambda} < \mu < 1$, стационарное решение $\widetilde{\varkappa}_0 = (\ldots 0, 0, 0, \ldots)^{\mathrm{T}}$ уравнения (П.1) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$ является устойчивым. Из устойчивости стационарного решения $\widetilde{\varkappa}_0 = (\ldots 0, 0, 0, \ldots)^{\mathrm{T}}$ уравнения (П.1) следует устойчивость стационарного решения $\varkappa_1 = (\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots)^{\mathrm{T}}$ уравнения (4.11).

Доказательство леммы 4.5. Согласно теореме 3.2 в пространстве $(\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ существует единственное решение уравнения (2.8). Данное решение, независимо от близости начального значения к стационарному решению, определено на $(-\infty, +\infty)$. Из устойчивости стационарного решения $\varkappa_1$ в пространстве $K_{2\mu}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что для любого решения $\varkappa(t)$, удовлетворяющего условию $\|\varkappa(0) - \varkappa_1\|_{2\mu} < \sigma$ имеем $\|\varkappa(t) - \varkappa_1\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что при

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n(0) - \Delta|^2 \mu^{2|n|}\right]^{\frac{1}{2}} < \sigma$$

имеем

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n(t) - \Delta|^2 \mu^{2|n|}\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что при $|z_0(0) - \Delta| < \sigma$ выполняется неравенство $|z_0(t) - \Delta| < \varepsilon$ для всех $t > 0$. Согласно теореме 4.1 решениям системы (4.11)–(4.12) в фазовом пространстве $K_{2\mu}$, $\mu \in (\overline{\lambda}, 1)$ соответствуют решения уравнения (2.8) в пространстве $L^1_\mu C^{(0)}(R)$, где μ меняется в том же интервале. Как мы знаем, $z_0(t) = y(t)$, и, следовательно, мы приходим к следующему выводу: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что для любого решения $y(t) \in L^1_\mu C^{(0)}(R)$, $\mu \in (\overline{\lambda}, 1)$, удовлетворяющего условию $|y(0) - \Delta| < \sigma$, имеем $|y(t) - \Delta| < \varepsilon$ для всех $t > 0$. Таким образом, для того, чтобы стационарное решение $y(t) \equiv \Delta$ уравнения (2.8) было устойчивым, достаточно выполнения условия $\mu_2(\tau) > \overline{\lambda}$. В этом случае стационарное решение будет устойчивым в пространстве $L^1_\mu C^{(0)}(R), \mu \in (\max(\mu_1(\tau), \overline{\lambda}), \mu_2(\tau))$. Напомним, что функция $\mu_2(\tau)$ возрастающая, $\min\limits_{\tau} \mu_2(\tau) = \overline{\mu}(\overline{\tau})$ и $\mu_2(\tau) \to 1$ при $\tau \to +\infty$. Если $\overline{\mu} > \overline{\lambda}$, то очевидно, что $\tau_{\min} = \overline{\tau}$ и для всех $\tau > \tau_{\min}$ будет выполняться неравенство $\mu_2(\tau) > \overline{\lambda}$. Если же $\overline{\mu} \leq \overline{\lambda}$, то существует значение $\tau_{\min}$ такое, что $\mu(\tau_{\min}) = \overline{\lambda}$. Очевидно, что в этом случае $\tau_{\min} \geq \overline{\tau}$ и при $\tau > \tau_{\min}$ будет выполняться неравенство $\mu_2(\tau) > \overline{\lambda}$.

Доказательство теоремы 4.3. Доказательство непосредственно следует из леммы (4.5).

Доказательство теоремы 4.4. Доказательство непосредственно следует из леммы 4.1. Стоит лишь отметить, что если решение $y(t)$ уравнения (2.8) принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(R)$, то координата $x_0(t)$ решения системы (2.4)–(2.5), связанная с $y(t)$ условием $x_0(\tau t) = y(t)$, будет принадлежать пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}(R)$ для любого $\mu \in (0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л.В., Гавурин М.К.* Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков / Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.: Изд-во АН СССР, 1949.
2. *Авен О.И., Ловецкий С.Е., Моисеенко Г.Е.* Оптимизация транспортных потоков. М.: Наука, 1985.
3. *Хачатрян Н.К.* Динамическая модель транснациональных грузоперевозок. Препринт. М.: ЦЭМИ РАН, 2002.
4. *Бекларян Л.А.* Об одной модели транснациональных грузоперевозок // Отчет лаб. "Экспериментальная экономика" ЦЭМИ РАН, 2001.
5. *Бекларян Л.А.* Введение в качественную теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и их приложения. М.: Изд-во ЦЭМИ РАН, 1996.
6. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
7. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.А. Бобылевым.

Поступила в редакцию 17.10.2002